UNIVERSITÄT HAMBURG
DEPARTMENT PHYSIK

Leptophile Dunkle-Materie-Modelle und die kleinsten gravitativ gebundenen Dunkle-Materie-Halos

Diplomarbeit

vorgelegt von
Yasar Goedecke

Hamburg

2011

Erster Gutachter: Dr. Torsten Bringmann
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Dieter Horns

Abstract

We consider in this Thesis a very general leptophilic Dark Matter model, as currently discussed in the literature due to the unexpected high positron fluxes, measured by PAMELA. We calculate the cut-off mass of the smallest gravitationally bound DM objects for a wide range of parameter space and compare the expected photon fluxes from such regions of high DM density (due to scattering of annihilationsproducts of DM particles with photons of the cosmic background radiation), with the measured photon spectrum of Fermi-LAT. We get as result that the model is not able to explain simultaneously the PAMELA data and satisfy the Fermi-LAT measurements for a wide range of parameter space.

We consider in this Thesis a very general leptophilic Dark Matter model, as currently discussed in the literature due to the unexpected high positron fluxes, measured by PAMELA. We calculate the cut-off mass of the smallest gravitationally bound DM objects for a wide range of parameter space and compare the expected photon fluxes from such regions of high DM density (due to scattering of annihilationsproducts of DM particles with photons of the cosmic background radiation), with the measured photon spectrum of Fermi-LAT. We get as result that the model is not able to explain simultaneously the PAMELA data and satisfy the Fermi-LAT measurements for a wide range of parameter space.

In this thesis we construct a general model of leptophilic Dark Matter (DM) as it is being discussed in literature due to the unexpectedly high positron fluxes measured by PAMELA. We calculate the cut-off mass of the smallest gravitationally bound DM objects for a wide range of the parameter space for the model. Following this, we compare the photon fluxes emmitted from the smallest substructures of large DM-Halos due to scattering processes by the annihilation products of the DM particles on low energy photons to the photon spectrum measured by Fermi-LAT. We obtain the result that for a wide range of the parameter space the constructed model is not able both to explain the PAMELA data and to remain below the exclusion limit set by the photon fluxes measured by Fermi-LAT.

Kurzfassung

Wir konstruieren in dieser Arbeit ein allgemeines Modell leptophiler Dunkler Materie (DM), wie es in der Literatur aufgrund der unerwartet hohen Positronenflüsse, die von PAMELA gemessen wurden, häufig diskutiert wird. Wir berechnen als zentrales Element dieser Arbeit die kinetische Entkopplungstemperatur der DM-Teilchen, sowie die Cutoff-Masse der kleinsten gravitativ gebundenen Objekte aus DM für einen großen Bereich des Parameterraumes des Modells. Anschließend benutzen wir die Analysen von Pinzke et al. um aus dem Vergleich der erwarteten Photonenflüsse des DM-Halos des Fornax Galaxienhaufens mit dem von Fermi-LAT gemessenen Photonenspektrum, Grenzen an den Parameterraum

unseres Modells zu erhalten. Wir erhalten als Resultat, dass das konstruierte Modell für einen großen Bereich des Parameterraumes nicht gleichzeitig die PAMELA Daten erklären und unterhalb der Ausschlussgrenze der von Fermi-LAT gemessenen Photonenflüsse bleiben kann.

Da steh ich nun,...

—Johann Wolfgang von Goethe, Faust I, Vers 358

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**
- 1.1 Kosmologie . . . 2
- 1.2 Dunkle Materie . . . 5
  - 1.2.1 Beobachtungsgeschichte . . . 5
  - 1.2.2 Dunkle Materie Modelle . . . 6
  - 1.2.3 Evolution der Dunklen Materie . . . 7

2 Thermodynamik im frühen Universum **9**
- 2.1 Gleichgewichtsthermodynamik . . . 10
  - 2.1.1 Entropie . . . 11
- 2.2 Liouville-Operator . . . 13
- 2.3 Kollisionsoperator . . . 14
- 2.4 Erstes Moment der Boltzmann-Gleichung . . . 16
  - 2.4.1 Entkopplung und Reliktdichte . . . 18
- 2.5 Zweites Moment der Boltzmann-Gleichung . . . 23
  - 2.5.1 Kollisionsoperator . . . 23
  - 2.5.2 Temperaturgleichung . . . 24
  - 2.5.3 Die kleinsten Protohalos . . . 26

3 Modell dieser Arbeit **33**
- 3.1 Motivation . . . 33
- 3.2 Konzept . . . 34
  - 3.2.1 Grenzen des Parameterraumes . . . 37
  - 3.2.2 Sommerfeld-Effekt . . . 41

4 Ergebnisse **47**
- 4.1 Reliktdichte und Kopplungskonstante . . . 47
  - 4.1.1 Matrixelemente . . . 47
  - 4.1.2 Reliktdichte . . . 51
- 4.2 Thermische Entkopplung . . . 53
  - 4.2.1 Streuung von Dunkle-Materie-Teilchen an Standardmodell-Teilchen . . . 54
  - 4.2.2 Streuung von Dunkle-Materie-Teilchen an Wechselwirkungsbosonen . . . 56
  - 4.2.3 Ergebnisse . . . 60
- 4.3 Protohalos . . . 63

Zusammenfassung **71**

Anhang **73**
A Zur Motivation und Herleitung der Boltzmann-Gleichung 73
A.1 Geometrie der klassischen Mechanik und statistischen Physik 73
A.2 Verallgemeinerungen der klassischen Theorie 75
B Wirkungsquerschnitt und Mandelstam-Variablen 77
C Entwicklung des Kollisionsoperators 79

Kapitel 1

Einleitung

Seit Sir Isaac Newton im Jahre 1687 die "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" veröffentlichte und damit den Grundstein der klassischen Mechanik legte hat sich das physikalische Verständnis des Universums stark verändert. Von den Formulierungen der Maxwell-Gleichungen 1864, die das Verständnis des Lichtes als elektromagnetische Wellen grundlegend änderten, über die Relativitätstheorien Einsteins 1905 und 1915, die das Paradigma der Gravitation und Kausalität revolutionierten, bis hin zur Quantenmechanik 1926 und zur Quantenfeldtheorie, welche die Grundlage der modernen Teilchenphysik ist und im "Standardmodell" drei der vier grundlegenden Kräfte in Eichtheorien vereinigt, wurde eine gewaltige Evolution im Verständnis des Universums durchlaufen die noch nicht beendet ist. Wir haben dabei ein hohes Maß an Verständnis des "sichtbaren" Universums erreicht, doch zeigt sich, dass wir damit gerade einmal $4-5\%$ des "messbaren" Universums erklären können. 72% des Universums bestehen nach heutiger Erkenntnis aus einer "Dunklen Energie", die sich durch die beschleunigte Expansion bemerkbar macht und deren Natur bis heute unklar ist. Die übrigen 23% bestehen aus "Dunkler Materie", die sich durch eine Vielzahl gravitativer Effekte bemerkbar macht und keine andere Form von Wechselwirkung mit der sichtbaren (baryonischen) Materie zeigt (weshalb sie, ebenso wie die Dunkle Energie, als "Dunkel" bezeichnet wird). Diese Effekte zeigen eindeutig, dass es Physik jenseits des heutzutage weitestgehend bestätigten Standardmodells der Teilchenphysik gibt. Entsprechend gibt es auch eine Vielzahl von Ansätzen und Theorien, die insbesondere versuchen, die Dunkle Materie in Erweiterungen des Standardmodells zu beschreiben. Die vielversprechendsten Modelle liefern Dunkle Materie dabei sogar als "Nebenprodukt" in Form von schwach wechselwirkenden Teilchen, die durch innere Erhaltungsgrößen vor dem Zerfall geschützt sind. Ein Beispiel einer solchen Theorie ist die Supersymmetrie (SUSY). Doch gibt es bislang keine Theorie, die alle Phänomene widerspruchsfrei erklärt und sich experimentell bestätigen lässt. Die grundlegende Natur der letzten unbekannten Komponenten des Universums ist womöglich eines der letzten großen Rätsel der Menschheit und mit Sicherheit ist deren Entdeckung eine der spannendsten und größten Herausforderungen der heutigen Zeit.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einem möglichen Erklärungsmodell der Dunklen Materie, wie es aufgrund unerwarteter Messungen des Forschungssatelliten "PAMELA" in der Fachwelt zur Zeit heiß diskutiert wird. Dem hier präsentierten

Konzept liegt dabei kein konkretes Modell zugrunde (wie z.B. SUSY), sondern es ist allgemein formuliert, um zu untersuchen, ob sich die kürzlich von PAMELA gemessenen Daten im Rahmen eines Dunkle-Materie-Modells erklären lassen.

Wir beginnen im ersten und zweiten Kapitel damit das Handwerkszeug zur Beschreibung von Dunkle-Materie-Teilchen im frühen Universum in einiger Ausführlichkeit zu entwickeln. Im dritten Kapitel wird dann das Dunkle-Materie-Konzept dieser Arbeit vorgestellt und im vierten Kapitel werden die Formalismen der ersten Teile auf dieses Konzept angewandt.

1.1 Kosmologie

Wir legen das kosmologische Standardmodell zugrunde, dass wir hier kurz vorstellen wollen [1, 2, 3]:

Im frühen Universum, als alle Elementarteilchen frei und im thermischen Gleichgewicht mit einander waren, war die Energiedichte nahezu homogen, wie man aus der Isotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung ersehen kann. Es ist daher angebracht, den Energie- und Materieinhalt des frühen Universums als perfekte Flüssigkeit zu nähern. Selbst heutzutage ist diese Näherung noch gerechtfertigt, denn wenn man im Universum über solche "kleinen" Inhomogenitäten wie Galaxien mittelt, dann ist es im großen noch homogen.

Die Evolution des Universums können wir nun durch die Einsteinschen Feldgleichungen beschreiben

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \tag{1.1}$$

mit dem Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$ einer idealen Flüssigkeit und der Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik als Lösung:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta \; d\phi^2 \right), \tag{1.2}$$

wobei a der Skalenfaktor ist und wir die Skalierung so wählen, dass $\kappa = -1, 1$ oder 0 ist, was angibt, ob das Universum eine negative bzw. positive Krümmung hat oder flach ist (Wir haben hier die Kosmologische Konstante von vornherein gleich Null gesetzt unter der Annahme, dass die Energiedichte des Vakuums extrem klein ist; unter dieser Voraussetzung entscheidet der Wert der Energiedichte über den Verlauf des Skalenfaktors. Für eine ausführliche Diskussion siehe z.B. [3]). Wir sehen anhand der Metrik nun, dass es ein ausgezeichnetes Bezugssystem im Universum gibt, nämlich jenes, in dem die Koordinaten (r, θ, ϕ) konstant sind. Physikalisch gesprochen ist dies das mitbewegte Bezugssystem ("mitbewegt" zur Ausdehnung des Universums, die durch den Skalenfaktor a bestimmt wird), von dem aus die kosmische Flüssigkeit perfekt isotrop erscheint (wird im Folgenden von einem mitbewegtem Bezugssystem die Rede sein, so ist stets dieses darunter zu verstehen).

Bevor wir allerdings nun die Friedmann-Gleichung hinschreiben, sind einige

Überlegungen zur Energiedichte nötig. Einen Ausdruck für die Änderung der Energiedichte erhalten wir durch die Erhaltung des Energie-Impulstensors $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Die $\nu = 0$ Komponente ergibt

$$a^3\dot{p} = \frac{d}{dt}(a^3\rho + a^3 p), \tag{1.3}$$

woraus sich, wie wir später sehen werden, die Entropieerhaltung ergibt. Für die weiteren Rechnungen formen wir (1.3) um und erhalten $\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p)$. Die räumlichen Komponenten liefern $\partial_i p = 0$. D.h. der Druck einer perfekten Flüssigkeit, die sich in einem mitbewegtem Bezugssystem in Ruhe befindet, ist räumlich konstant. Die zeitliche Änderung der Energiedichte hingegen ist nicht konstant, wie man es für ein flaches Universum ($a = 1$, $\dot{a} = 0$) erwarten würde. Betrachtet man nun eine Zustandsgleichung der Form

$$p = \omega\rho \tag{1.4}$$

mit konstantem $\omega \in \mathbb{R}$, dann wird (1.3) zu

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+\omega)\frac{\dot{a}}{a}, \tag{1.5}$$

mit der Lösung

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}. \tag{1.6}$$

Anhand von Gleichung (1.6) sieht man, auf welche Weise die Zustandsgleichung bestimmt, wie sich die Energiedichte durch die Expansion des Universums ändert. Wir unterscheiden nun drei Arten von perfekten Flüssigkeiten mit einer Zustandsgleichung der Form (1.4), dies sind nichtrelativistische ($\boldsymbol{p}^2 \ll m^2$), nicht wechselwirkende Teilchen (z.B. Staub, Sterne, oder auf kosmologischer Ebene ganze Galaxien) mit $\omega = 0$, Strahlung mit $E \gg m$ (z.B. elektromagnetische Strahlung oder massive relativistische Teilchen mit näherungsweise $v \approx c$) und $\omega = \frac{1}{3}$ sowie das Vakuum bzw. eine konstante Energiedichte ($\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{(8\pi G)}$) mit $\omega = -1$.

Man bezeichnet ein Universum, dessen Energiedichte durch Masse bestimmt wird, als "materiedominiert". Die Energiedichte ist in dem Fall

$$\rho_M \propto a^{-3}. \tag{1.7}$$

Ein Universum, bei dem die Strahlung den größten Beitrag zur Energiedichte liefert, bezeichnet man hingegen als "strahlungsdominiert" (wie es in unserem Universum die ersten Paar tausend Jahre nach dem Urknall der Fall war). In dem Fall ist die Energiedichte

$$\rho_R \propto a^{-4}. \tag{1.8}$$

Dass die Energiedichte der Strahlung schneller abfällt als die der Masse, ist dadurch zu erklären, dass Photonen zusätzlich durch die Rotverschiebung mit einem Faktor von a^{-1} Energie verlieren.

Wir wollen nun die Evolutionsgleichung für den Skalenfaktor berechnen, um sie dann für ein strahlungsdominiertes frühes Universum zu spezifizieren. Dazu gehen wir von den Einstein-Gleichungen aus und setzen die Metrik (1.2) ein.

Die Christoffelsymbole sind dann leicht zu berechnen und man erhält für die $\mu\nu = 00$ Komponente der Gleichung

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3p), \tag{1.9}$$

die $\mu\nu = ij$ Komponenten ergeben alle die Gleichung

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{\kappa}{a^2} = 4\pi G(\rho - p). \tag{1.10}$$

Benutzt man nun (1.9), um in (1.10) die zweifache Ableitung zu eliminieren, so erhält man die Friedmann-Gleichungen

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2} \tag{1.11}$$

und

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \tag{1.12}$$

Im Folgenden werden wir jedoch nur die erste Gleichung benutzen und diese als Friedmann-Gleichung bezeichnen. In einem frühen strahlungsdominierten Universum (d.h. zu Zeiten, in denen der Skalenfaktor a klein war) war der Krümmungsterm $\sim \kappa/a^2$ in der Friedmann-Gleichung deutlich weniger bestimmend als die Energiedichte $\rho \propto a^{-4}$. Darum lässt sich die Friedmann-Gleichung für das frühe strahlungsdominierte Universum schreiben als

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{1.13}$$

mit dem Hubble-Parameter $H := \frac{\dot{a}}{a}$, der die Expansion des Universums charakterisiert. Der Wert des Hubble-Parameters heutzutage (d.h. $t = t_0$) ist die Hubble-Konstante $H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} = 70 \pm 10 \frac{km}{s\ Mpc}$ bzw. man definiert $H_0 = 100h\frac{km}{s\ Mpc}$ mit $h \approx 0,7$ da es noch einige Unsicherheit bei diesem Wert gibt [4].
(1.11) definiert zugleich die kritische Energiedichte

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G} = 1,05 \times 10^{-5}\frac{h^2 GeV}{cm^3}, \tag{1.14}$$

bezüglich derer sich charakterisieren lässt, welche der drei Robertson-Walker-Geometrien unser Universum beschreibt:

$$\begin{array}{ccccc} \rho < \rho_{crit} & \leftrightarrow & \kappa < 0 & \leftrightarrow & \text{offen} \\ \rho = \rho_{crit} & \leftrightarrow & \kappa = 0 & \leftrightarrow & \text{flach} \\ \rho > \rho_{crit} & \leftrightarrow & \kappa > 0 & \leftrightarrow & \text{geschlossen} \end{array}$$

Man definiert dann den Dichteparameter bezüglich der kritischen Energiedichte als

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}}. \tag{1.15}$$

In der Literatur wird die heutige Energiedichte des Universums meistens in Form des Dichteparameters multipliziert mit der quadrierten Hubble-Konstanten Ωh^2 angegeben.

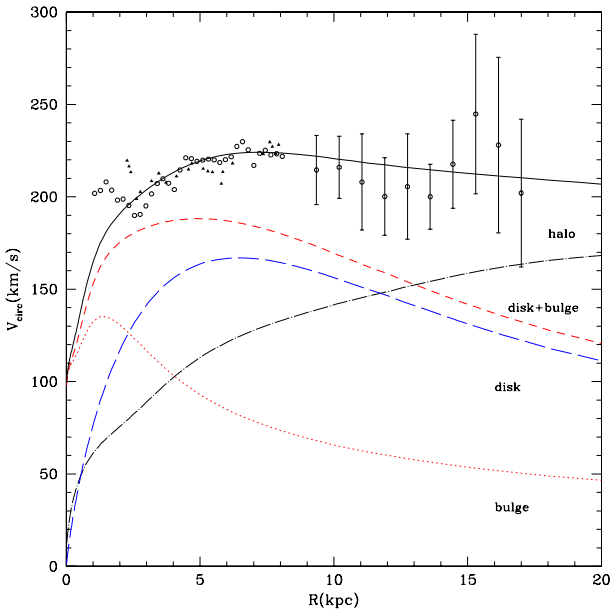


Abbildung 1.1: Zu sehen ist die Rotationskurve der Milchstraße zusammen mit Beiträgen einzelner Komponenten [7]. Die Rotationsgeschwindigkeiten der Sterne in der galaktischen Ebene sollten mit wachsendem Abstand zum Zentrum nach dem dritten Keplerschen Gesetz abnehmen. Die beobachtete Konstanz oder Steigung lässt sich allerdings unter der Annahme von Dunkler Materie erklären.

1.2 Dunkle Materie

1.2.1 Beobachtungsgeschichte

Bereits 1933 entdeckte Fritz Zwicky [5] unter Verwendung des Virialtheorems, dass der Coma-Haufen (ein Galaxienhaufen mit mehr als 1000 Einzelgalaxien) nicht alleine aufgrund der Gravitation der sichtbaren Konstituenten zusammen gehalten werden konnte. Er vermutete daher, dass es eine nicht sichtbare Materie gibt, die nur gravitativ wechselwirkt. Diese nicht direkt beobachtbare Masse nennen wir Dunkle Materie (im Folgenden mit DM abgekürzt). Seine Annahme stieß in der Fachwelt jedoch zunächst auf breite Ablehnung.

Als um 1960 Vera Rubin [6] die Rotationsgeschwindigkeiten der Sterne in der Galaktischen Ebene untersuchte, entdeckte sie, dass die Umlaufgeschwindigkeiten der Sterne mit steigendem Abstand zum Zentrum hin deutlich schneller abnehmen müssten als es der Fall ist (siehe Abb. 1.1). Dies lieferte einen weiteren Hinweis auf die Existenz galaktischer Dunkler Materie, die fortan von der Fachwelt ernst genommen wurde.
Heutzutage stellen Beobachtungen, wie z.B. die des Gravitationslinseneffektes (siehe Abb. 1.2), die stärksten Hinweise auf Dunkle Materie dar.
Der präziseste Wert der nicht-baryonischen Materiedichte heutzutage kommt von umfassenden Anpassungen der kosmologischen Parameter an eine Vielzahl von Messungen. Durch Anisotropiemessungen der kosmischen Hintergrundstrahlung

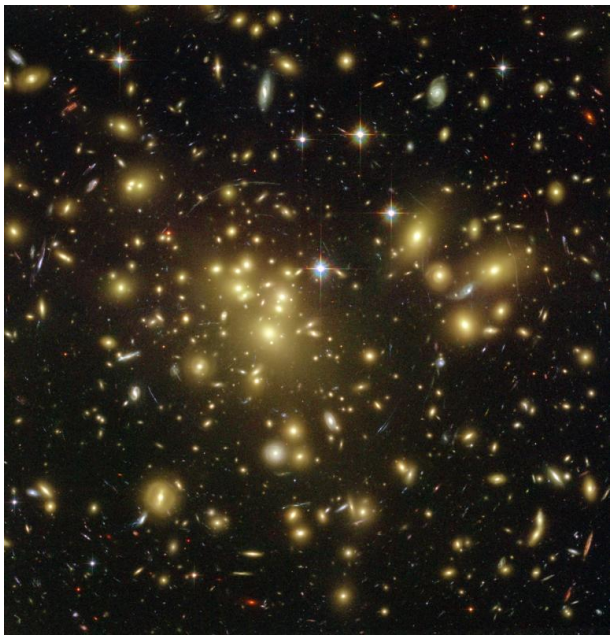


Abbildung 1.2: Gravitationslinseneffekt. Der Galaxienhaufen Abell 1689 ist eines der massereichsten Objekte des Universums. Er krümmt das Licht von dahinter liegenden Galaxien, so dass verzerrte Abbilder dieser Galaxien konzentrisch um Abell 1689 entstehen, wie sie in diesem Bild vom Hubble Space Teleskop zu sehen sind. Die sichtbare Masse des Galaxienhaufens liegt allerdings nur bei einem Prozent der benötigten Materie, die notwendig ist um den entstehenden Gravitationslinseneffekt zu erklären. Man folgert daher, dass die restliche Masse in Form von Dunkler Materie vorliegt. *Quelle: http://hubblesite.org/*

ergibt sich beispielsweise die Dichte der kalten nicht-baryonischen Materie zu [4]

$$\Omega_{nbm} h^2 = 0.110 \pm 0.006, \tag{1.16}$$

wobei zu bedenken ist, dass ein Teil der baryonischen Materiedichte

$$\Omega_b h^2 = 0.0227 \pm 0.0006 \tag{1.17}$$

ebenfalls einen Beitrag zur Dunklen Materie liefern kann, z.B. in Form von MACHOs (Massive Astrophysical Compact Halo Object).

1.2.2 Dunkle Materie Modelle

Gehen wir von dem heutzutage am weitesten verbreiteten Ansatz aus, dass es sich bei DM um bisher unbekannte Teilchen handelt, dann muss ein Kandidat für DM eine Vielzahl von Anforderungen erfüllen [8]: Die Teilchen müssen auf kosmologischen Zeitskalen vor dem Zerfall geschützt sein, sie dürfen nur schwach und gravitativ mit den Teilchen des Standardmodells (im Folgenden mit SM abgekürzt) wechselwirken und sie müssen im Rahmen ihres Modells die richtige Reliktdichte liefern.

Da die baryonische DM bestenfalls einen kleinen Anteil ausmacht (was ansonsten im Widerspruch zur primordialen Nukleosynthese steht) und z.B. in Form von braunen Zwergen oder kalten Gaswolken beiträgt, ist es naheliegend, dass es sich bei der DM um Teilchen jenseits des Standardmodells handelt. Man unterscheidet dabei zwischen heißer und kalter DM.

Heiße Dunkle Materie

Unter heißer DM versteht man die zum Zeitpunkt der Strukturbildung relativistischen Teilchen. Die dabei in Frage kommenden Neutrinos, die man lange Zeit als potentielle Kandidaten handelte, haben nach neueren Erkenntnissen keine ausreichend große Masse, um die Gesamtmasse der DM zu erklären. Es lässt sich ebenfalls ausschließen, dass andere schnelle Teilchen die DM dominieren, da aus entsprechenden Berechnungen hervorgeht, dass die Strukturbildung im Universum anders abgelaufen wäre: Aus der Annahme schneller DM-Teilchen folgt, dass Dichteschwankungen zuerst auf großen Skalen kollabiert wären (Galaxienhaufen $\rightarrow$ Galaxien $\rightarrow$ Sterne). Wobei es als erwiesen gilt (durch Altersbestimmung von Galaxien und Galaxienhaufen), dass der Prozess umgekehrt ablief.

Kalte Dunkle Materie

Kalte DM-Teilchen stellen die vielversprechendsten Kandidaten für die Erklärung aller DM-Phänomene. Als kalte DM bezeichnet man nichtrelativistische Teilchen, die neben der gravitativen Wechselwirkung nur der schwachen Wechselwirkung unterliegen, sogenannte WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles). Es handelt sich dabei in aller Regel um Modelle jenseits des Standardmodells. So bietet z.B. die minimale supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells (MSSM) das leichteste supersymmetrische Teilchen (LSP), welches alle Anforderungen erfüllt und durch R-Paritätserhaltung vor dem Zerfall geschützt ist.

In dieser Arbeit wird ein Konzept vorgestellt, welches unabhängig von konkreten Modellen (wie z.B. SUSY) ist und in dem eine neue Wechselwirkung postuliert wird.

1.2.3 Evolution der Dunklen Materie

Wir gehen nun von einem DM-Teilchen χ aus, das durch die Erhaltung einer inneren Quantenzahl (die modellabhängig ist) vor dem Zerfall geschützt ist und das ein Antiteilchen $\bar{\chi}$ besitzt, mit dem es in verschiedene (SM) Teilchen annihilieren kann (ein möglicher Spezialfall ist dabei, dass das DM-Teilchen sein eigenes Antiteilchen ist (Majoranateilchen)). Es soll zudem über Stöße mit den SM-Teilchen wechselwirken können. Wir nehmen an, dass kurz nach dem Urknall alle DM im chemischen und thermischen Gleichgewicht mit dem Rest des Universums war.
Unter chemischem Gleichgewicht versteht man, dass die Teilchendichte in dem mitbewegten Bezugssystem zeitlich konstant ist ($\partial_t(a^3 n_\chi) = 0$). D.h. dass die Prozessrate $\chi + \bar{\chi} \leftrightarrow X + \bar{X}$ (in jede beliebige erlaubte andere Teilchensorte X) in beide Richtungen die gleiche ist. Es werden also genauso viele Teilchen erzeugt wie vernichtet. Mit thermischen Gleichgewicht meinen wir, dass die Teilchen χ durch elastische Streuprozesse mit den SM-Teilchen wechselwirken und dadurch

die Temperatur für alle Teilchen gleich ist. Wir nehmen dabei an, dass sich die Menge der SM-Teilchen idealisiert als ein Wärmebad behandeln lässt und werden diese im Folgenden auch so bezeichnen.
Insbesondere interessieren wir uns für das Entkoppeln der Teilchen χ aus den Gleichgewichtszuständen, da sich aus den Entkopplungen Observablen ableiten lassen.
Die Entkopplung findet prinzipiell folgendermaßen statt:

Chemische Entkopplung

Sobald die Annihilationsrate Γ der Dunklen Materie Teilchen kleiner wird als die Expansionsrate H des Universums (also $\frac{\Gamma}{H} \approx 1$), ist das Gleichgewicht zwischen der Erzeugung und der Vernichtung von DM-Teilchen gestört. Die Temperatur T des Wärmebads kommt dabei durch die Expansion des Universums in die Größenordnung der Teilchenmasse m_χ. Es werden fortan weniger Teilchen χ produziert als vernichtet, wodurch die Teilchenzahl n_χ sinkt. Dies geschieht so lange, bis bei der Temperatur $T = T_{cd}$ die chemische Entkopplung stattfindet. Zu diesem Zeitpunkt ist die Expansionsrate so groß geworden, dass nahezu keine Annihilationen mehr stattfinden. Als direkte Konsequenz wird dadurch fortan die Teilchenzahl n_χ erhalten, die somit die Reliktdichte liefert und als Observable fassbar ist. Die typische Entkopplungstemperatur liegt bei WIMPs bei $T_{cd} \sim m_\chi/25$, d.h. dass sie zum Zeitpunkt der chemischen Entkopplung längst nicht mehr relativistisch sind.

Thermische Entkopplung

Nach der chemischen Entkopplung werden die Teilchen χ durch die elastischen Streuprozesse immer noch im thermischen Gleichgewicht gehalten, d.h. dass sie durch Energieaustausch die gleiche Temperatur besitzen wie das Wärmebad. Dies geschieht wiederum so lange, bis die elastische Streurate Γ_{el} kleiner wird als die Expansionsrate. Zu diesem Zeitpunkt entkoppeln die Teilchen und die Temperatur bleibt konstant. Abhängig von dieser Temperatur berechnet sich die Masse der kleinsten gravitativ gebundenen Halos aus DM, die hier als Observable zur Verfügung steht (siehe Kapitel 2.5.3).

Kapitel 2

Thermodynamik im frühen Universum

Unser Ziel in diesem Kapitel ist es ein Kalkül zu entwickeln, mit dem wir das Verhalten der DM-Teilchen im frühen Universum im Detail beschreiben können (siehe Einleitung). Wir werden dazu im ersten Abschnitt das Verhalten der Teilchen im chemischen und thermischen Gleichgewicht betrachten, um danach die Entkopplungsprozesse zu untersuchen. Zu diesem Zweck betrachten wir die Phasenraumverteilung der uns interessierenden Teilchen.
Wir definieren eine Einteilchen-Phasenraum-Verteilungsfunktion, die für ein Teilchen die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass es bestimmte Punkte im Phasenraum (TM) besetzt:

$$f : TM \to \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Betrachtet man jedoch eine große Anzahl identischer Teilchen, so wird jeder Phasenraumpunkt mit der entsprechenden Häufigkeit, die durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung f gegeben ist, auch besetzt. In diesem Sinne definieren wir die Teilchendichte

$$n = g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), \tag{2.2}$$

wobei g die internen Freiheitsgrade zählt.

Die Evolution der Teilchen wird dann beschrieben durch die Boltzmann-Gleichung, die wir hier postulieren:

$$\hat{L}[f] = C[f], \tag{2.3}$$

wobei $\hat{L}$ der Liouville-Operator ist, der die wechselwirkungsfreie Entwicklung der betrachteten Teilchensorte beschreibt und C der Kollisionsoperator, der Streuungs- und Annihilationsprozesse beschreibt.
Im Anhang A ist in einiger Ausführlichkeit beschrieben, welche Ideen hinter dieser Gleichung stehen und wie sie sich durch Verallgemeinerungen aus der klassischen statistischen Physik ableiten lassen.

In Abschnitt 2.4 werden wir aus dem ersten Moment der Boltzmann-Gleichung (2.3) eine Differentialgleichung herleiten, die die Evolution der Teilchendichte

einer Teilchensorte χ bescheibt. Im darauf folgenden Abschnitt 2.5 werden wir dann auf ähnliche Weise eine Evolutionsgleichung für die Temperatur der Teilchensorte χ aus dem zweiten Moment der Boltzmann-Gleichung herleiten. Mit diesen Gleichungen lassen sich anschließend die chemische und thermische Entkopplung der Teilchen χ aus dem Wärmebad berechnen.

2.1 Gleichgewichtsthermodynamik

Bevor wir die Boltzmann-Gleichung nun im Detail aufstellen und lösen, wollen wir die Lösung im Gleichgewichtszustand genauer untersuchen. Aufgrund des kosmologischen Prinzips kann die Verteilungsfunktion nur abhängig sein von $|\boldsymbol{p}|$ und der Zeit t, also $f = f(|\boldsymbol{p}|, t)$.
Betrachten wir das frühe Universum, d.h. zu Zeiten, in denen alle Teilchen im thermodynamischen (chemischen und kinetischen) Gleichgewicht waren und noch keine Entkopplungen stattfanden, dann lässt sich f in guter Näherung durch die Gleichgewichtsverteilung beschreiben:

$$f_i(|\boldsymbol{p}|) = \frac{1}{e^{\frac{E_i(|\boldsymbol{p}|)-\mu_i}{T(t)}} \pm 1} \tag{2.4}$$

(der Index i nummeriert alle Teilchensorten durch). Sie lässt sich als mittlere Besetzungszahl eines Zustandes der Energie E_i im thermodynamischen Gleichgewicht bei der absoluten Temperatur T interpretieren. Dabei steht -1 für Bosonen, +1 für Fermionen, μ bezeichnet das chemische Potenzial und $E_i = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m_i^2}$. Das chemische Potential definieren wir dabei so, dass es im chemischen Gleichgewicht verschwindet ($\mu_{EQ} \equiv 0$).
Aus der Verteilungsfunktion folgen dann die Energiedichte

$$\rho_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int E_i(\boldsymbol{p}) f_i(|\boldsymbol{p}|) d^3p \tag{2.5}$$

und der Druck

$$p_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{3E_i(\boldsymbol{p})} f_i(|\boldsymbol{p}|) d^3p, \tag{2.6}$$

wobei g_i die Anzahl der inneren Freiheitsgrade der Teilchensorte i zählt.

Möchten wir nun die Integrale auswerten, so ist es hilfreich in Kugelkoordinaten zu transformieren $d^3p \to p^2 dp d\Omega$:

$$d^3p \to 4\pi \sqrt{E^2 - m_i^2} E dE. \tag{2.7}$$

Führt man die Integrationen aus, so ergibt sich im nichtrelativistischen Limes ($T/m \ll 1$)

$$n_{\mathrm{nr}} = g_i \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{T}} \tag{2.8}$$

$$\rho_{\mathrm{nr}} = m \cdot n_{\mathrm{nr}} \tag{2.9}$$

$$p_{\mathrm{nr}} = T \cdot n_{\mathrm{nr}} \tag{2.10}$$

und im ultrarelativistischen Limes ($T/m \gg 1$)

$$\rho_{\mathrm{rel}} = \frac{g_i}{6\pi^2}\int_0^\infty \frac{E^3 dE}{e^{\frac{E}{T}} \pm 1} = \begin{cases} \frac{\pi^2}{30} g_i T^4 & \mathrm{Bose-Einstein} \\ \frac{7}{8}\left(\frac{\pi^2}{30} g_i T^4\right) & \mathrm{Fermi-Dirac} \end{cases} \tag{2.11}$$

$$n_{\mathrm{rel}} = \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_i T^3 & \mathrm{Bose-Einstein} \\ \frac{3}{4}\left(\frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_i T^3\right) & \mathrm{Fermi-Dirac} \end{cases} \tag{2.12}$$

Was hier als erstes auffällt ist, dass die Anzahldichte nichtrelativistischer Teilchen exponentiell (Boltzmann-) unterdrückt ist. Möchten wir nun also den Gesamtbeitrag von allen Teilchenarten (bei der Temperatur T) zur Energie- und Anzahldichte berechnen, so ist es eine gute Näherung nur über die relativistischen Teilchen zu summieren, die bei der Temperatur T im thermischen Gleichgewicht sind.
Geht man davon aus, dass zu einer gegebenen Temperatur T des frühen Universums Entkopplungen von Teilchen aus dem thermischen Gleichgewicht bereits stattgefunden haben, dann werden diese Teilchen eine niedrigere Temperatur haben als die Photonen und relativistischen massiven Teilchen in dem Gleichgewicht, können aber immer noch relativistisch sein und somit bedeutsam für die Energie- und Anzahldichte. Darum führt man eine spezifische Temperatur T_i für jede Teilchenart ein und definiert die effektive Anzahl der Freiheitsgrade relativistischer Teilchen durch

$$g_{\mathrm{eff}} = \sum_{i=\mathrm{Bosonen}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8}\sum_{j=\mathrm{Fermionen}} g_j \left(\frac{T_j}{T}\right)^4, \tag{2.13}$$

womit man nun schreiben kann

$$\rho_{\mathrm{Re}}(T) = \frac{\pi^2}{30} g_{\mathrm{eff}}(T) T^4 = 3 p_{\mathrm{Re}}(T). \tag{2.14}$$

Setzt man dies in die Friedmann-Gleichung (1.13) ein, so erhält man

$$H = \sqrt{\frac{8\pi^3}{90}}\sqrt{g_{\mathrm{eff}}}\frac{T^2}{m_{\mathrm{Pl}}}. \tag{2.15}$$

2.1.1 Entropie

Wir werden im Folgenden einen Ausdruck für die Entropie im frühen Universum herleiten und zeigen, dass aus dem Erhalt des Energie-Impuls-Tensors einer perfekten Flüssigkeit die Entropieerhaltung folgt, wie wir im Kapitel 1.1 bereits erwähnt hatten. Die Entropie bildet daher eine gute Bezugsgröße, die wir häufig verwenden werden.
Man berechnet die Entropie mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, angewandt auf ein mitbewegtes (Einheits-) Volumenelement mit physikalischem Volumen $V = a^3$:

$$T dS = d(\rho V) + p dV = d[(\rho + p)V] - V dp \tag{2.16}$$

mit der Energiedichte (2.5) und dem Druck (2.6) im Gleichgewichtszustand. Über die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$ erhält man den Zusammengang zwischen Energiedichte und Druck:

$$T\frac{dp}{dT} = \rho + p. \tag{2.17}$$

Formt man dies nach dp um und setzt es in (2.16) ein, so erhält man

$$dS = \frac{1}{T}d[(\rho+p)V] - (\rho+p)V\frac{dT}{T^2} = d\Big[\frac{(\rho+p)V}{T} + const.\Big], \tag{2.18}$$

woran man die Entropie (abgesehen von einer Konstanten) $S = \frac{(\rho+p)V}{T}$ abliest.

Erinnern wir uns nun, dass aus der Erhaltung des Energie-Impuls-Tensors $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ (1.3) folgt:

$$a^3\dot{p} = \frac{d}{dt}(a^3\rho + a^3 p), \tag{2.19}$$

und setzen dort (2.17) ein, dann kommen wir nach kurzer Rechnung auf das zu erwartende Ergebnis:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{a^3}{T}[\rho(T) + p(T)]\right) = \frac{d}{dt}S = 0. \tag{2.20}$$

Es ist nun nützlich die Entropiedichte s zu definieren:

$$s \equiv \frac{S}{V} = \frac{\rho + p}{T}. \tag{2.21}$$

Benutzt man die Tatsache, dass der Beitrag nichtrelativistischer Teilchen zur Energiedichte exponentiell unterdrückt ist, dann lässt sich (2.21) sehr gut nähern durch

$$s = \frac{2\pi^2}{45}g_{*S}T^3 \tag{2.22}$$

mit der effektiven Anzahl der Freiheitsgrade (analog zu (2.13)):

$$g_{*S} = \sum_{i=\text{Bosonen}} g_i\left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \frac{7}{8}\sum_{j=\text{Fermionen}} g_j\left(\frac{T_i}{T}\right)^3. \tag{2.23}$$

Hierbei ist zu beachten ist, dass (2.23) gerade dann mit (2.13) identisch ist, wenn die Temperatur der Teilchen gleich ist, was in den meisten betrachteten Situationen zutrifft. Man berechnet daraus die Entropiedichte zur heutigen Zeit unter Berücksichtigung der Neutrinos (mit $T_\nu \approx 1.95$ K, $g_\nu = 2$) und Photonen (mit $T_\gamma \approx 2.73$K, $g_\gamma = 2$), zu $s_0 = 2970\ cm^{-3}$.

Als weitere nützliche Konsequenz erhält man aus der Entropieerhaltung die Änderung der Temperatur des Wärmebads mit der Zeit :

$$\begin{aligned} 0 =& a^{-3}\partial_t(a^3 s) = 3Hs + \frac{\dot{g}_{*S}}{g_{*S}}s + 3\frac{\dot{T}}{T}s \\ =& 3Hs + \frac{3}{T}\left(1 + \frac{T}{3g_{*S}}\frac{dg_{*S}}{dT}\right)\frac{dT}{dt}s \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = -\frac{HT}{1 + \frac{T}{3g_{*S}}\frac{dg_{*S}}{dT}}. \tag{2.25}$$

Diese Abhängigkeit wird im Folgenden häufig Verwendung finden.

2.2 Liouville-Operator

Wir werden in diesem Abschnitt den Formalismus der Boltzmann-Gleichung (2.3) entwickeln, mit dem wir das "Ausfrieren" von Teilchen aus dem Wärmebad beschreiben können. Dazu betrachten wir zuerst den Liouville-Operator auf der kosmologischen Raumzeit in einem mitbewegtem Bezugssystem $\bar{\mathbf{p}} \equiv a\mathbf{p}$. Nach Gleichung (A.36) ist er definiert als

$$\hat{L}[f] = \frac{d}{d\lambda} f\left(x^\mu(\lambda), p^\mu(\lambda)\right) = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{d\bar{p}^\mu}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial \bar{p}^\mu}. \tag{2.26}$$

Zum Auswerten des Ausdruckes $\frac{dp^\mu}{d\lambda}$ benutzt man, dass es sich bei $x^\mu(\lambda)$ um eine Geodäte handelt. (Eine Geodäte ist diejenige Kurve, die ihre eigenen Tangentialvektoren parallel transportiert, wobei der Paralleltransport analog zum euklidischen Raum derart definiert ist, dass die Komponenten eines Vektors entlang des Weges konstant sind $\frac{D}{d\lambda}V^\mu = \frac{dx^\nu}{d\lambda}\nabla_\nu V^\mu = 0$ [2]). Der Tangentialvektor des Weges $x^\mu(\lambda)$ ist (laut Konstruktion, siehe A.2) $\frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} = p^\mu$. Damit ist die Bedingung, dass p^μ paralleltransportiert wird:

$$\frac{D}{d\lambda}p^\mu = \frac{dx^\nu}{d\lambda}\nabla_\nu p^\mu = \frac{dp^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}p^\rho p^\sigma = 0 \tag{2.27}$$

(diese Geodätengleichung gilt natürlich nicht im System $\bar{\mathbf{p}}$). Benutzt man dies und die Forderung, dass χ auf der Massenschale liegt (was zur Folge hat, dass p^0 kein unabhängiger Freiheitsgrad ist, d.h. $\frac{\partial f}{\partial p^0} = 0$), dann erhält man

$$\begin{aligned}\hat{L}[f] &= \left(p^0\partial_t + a^{-1}\bar{p}^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \left(\frac{da}{d\lambda}p^i + a\frac{dp^i}{d\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{p}^i}\right) f \\ &= \left(p^0\partial_t + a^{-1}\bar{\boldsymbol{p}}\nabla + \frac{1}{a}\frac{da}{d\lambda}\bar{\boldsymbol{p}}\nabla_{\bar{\boldsymbol{p}}} - a\Gamma^i_{\rho\sigma}p^\rho p^\sigma\frac{\partial}{\partial \bar{p}^i}\right) f.\end{aligned} \tag{2.28}$$

Betrachten wir nun eine flache Robertson-Walker-Metrik $ds^2 = dt^2 - a(t)d\boldsymbol{x}^2$, so berechnen sich die räumlichen Zusammenhangskoeffizienten zu
$\Gamma^x_{x\tau} = \Gamma^x_{\tau x} = \Gamma^y_{y\tau} = \Gamma^y_{\tau y} = \Gamma^z_{z\tau} = \Gamma^z_{\tau z} = \frac{\dot{a}}{a}$. Dadurch vereinfacht sich $a\Gamma^i_{\rho\sigma}p^\rho p^\sigma\frac{\partial}{\partial \bar{p}^i}$ zu

$$a\Gamma^i_{\rho\sigma}p^\rho p^\sigma\frac{\partial}{\partial \bar{p}^i} = 2p^0 H\bar{\boldsymbol{p}}\Delta_{\bar{\boldsymbol{p}}}. \tag{2.29}$$

Da es sich bei λ um einen affinen Parameter handelt, ist $\frac{da}{d\lambda} = \dot{a}\frac{dt}{d\lambda}$ und mit $\frac{\partial}{\partial\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = p^\mu\partial_\mu$ folgt $\frac{da}{d\lambda} = \dot{a}p^0$. Aus der Homogenität des Raumes folgt $\nabla f = 0$.

Damit erhält man insgesamt

$$\hat{L}[f] = p^0\left(\partial_t - H\bar{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla_{\bar{\boldsymbol{p}}}\right) f. \tag{2.30}$$

Interessiert man sich nun für die Teilchendichte und benutzt (2.2), so ergibt sich

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\partial_t - H\boldsymbol{p}\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}})f(\boldsymbol{p}) = \partial_t \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(\boldsymbol{p}) - H\sum_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(p_i\partial_i)f(\boldsymbol{p}). \tag{2.31}$$

Werten wir nun den zweiten Term auf der rechten Seite mittels partieller Integration aus, so erhalten wir mit (2.2)

$$\int \frac{d^3p}{p^0(2\pi)^3}\hat{L}[f] = (\dot{n} + 3Hn)/g \tag{2.32}$$

und stellen fest, dass es gerade der Änderung der Teilchendichte in einem mitbewegtem Volumen entspricht $\frac{1}{a^3}\partial_t(a^3n) = \dot{n} + 3Hn$.

Es soll hier nochmals betont werden, dass die hier abgeleiteten Formeln die Evolution freier Teilchen beschreiben und somit für beliebige Teilchensorten einzeln gelten. So beschreiben wir hier beispielsweise die Teilchendichte der Teilchen χ. Die Evolution dessen Antiteilchens $\bar{\chi}$ ist dabei jedoch nicht berücksichtigt. Für die Antiteilchen gelten hier identische Formeln. Die Kopplung der Differentialgleichungen findet allerdings erst über den Kollisionsoperator statt, den wir im nachfolgenden Kapitel beschreiben.

2.3 Kollisionsoperator

In diesem Abschnitt werden wir den Kollisionsoperator definieren und auswerten: Der Kollisionsoperator ist in aller Allgemeinheit (also nicht nur für Streuungen von DM-Teilchen) für einen Prozess $\psi + a + b + \cdots \leftrightarrow i + j + \cdots$ definiert als [9]

$$\begin{aligned} C[f] \equiv & \int d\Pi_a d\Pi_b \cdots d\Pi_i d\Pi_j \cdots \\ & \times (2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_\psi + p_a + p_b \cdots - p_i - p_j \cdots\right) \\ & \times \Big[|\mathcal{M}|^2_{\psi+a+b+\cdots\to i+j+\cdots}[1 \pm f_i][1 \pm f_j]\cdots \; f_a \; f_b \cdots f_\psi \\ & - |\mathcal{M}|^2_{i+j+\cdots\leftarrow\psi+a+b+\cdots}[1 \pm f_a][1 \pm f_b]\cdots[1 \pm f_\psi] f_i f_j \cdots\Big], \end{aligned} \tag{2.33}$$

mit den Phasenraumverteilungsfunktionen f der Teilchen ψ und $a, b, ..., i, j, ...$ $(+)$ gilt für Bosonen, (-) für Fermionen und $d\Pi \equiv \frac{1}{2E}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}$.
Vergleicht man (2.33) nun mit (A.34), dann sieht man, dass hier die Übergangswahrscheinlichkeiten durch Matrixelemente mit Pauli-Unterdrückungs- bzw. Bose-Verstärkungsfaktoren der Endzustände gegeben sind, kombiniert mit Delta-Distributionen, die für die Energie-Impulserhaltung sorgen. Im Falle einer Bose-Einstein-Kondensation würden die Besetzungszahlfaktoren die Übergangswahrscheinlichkeit erhöhen und im Falle von Fermi-Entartung reduzieren. Des Weiteren ist die Summation in eine Integration übergegangen.

Es ist nun zu beachten, dass die DM zwei unterschiedlichen Reaktionsarten unterliegt, der elastischen und der inelastischen Streuung. Darum besteht der

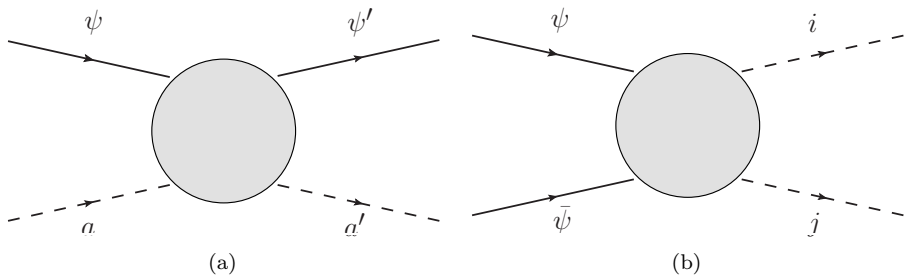


Abbildung 2.1: Beiträge zum Kollisionsoperator: Streuung $\psi + a \to \psi' + a'$ (links) und Annihilation $\psi + \bar{\psi} \leftrightarrow i + j$ (rechts)

Gesamtkollisionsoperator aus diesen beiden Beiträgen der Streuung $C_S[f]$ und der Annihilation $C_A[f]$:

$$C[f] = C_S[f] + C_A[f]. \tag{2.34}$$

Wir werden dabei im Folgenden jeweils nur $2 \to 2$ Prozesse betrachten.

Der Operatorterm der elastischen Streuung, $C_S[f]$, beschreibt Prozesse der Art $\psi + a \to \psi' + a'$, (die Striche deuten dabei an, dass es sich noch um die gleichen Teilchen handelt, sie jetzt jedoch andere Energien und Impulse haben). Er ergibt sich nach (2.33) durch (siehe Abb.2.1(a)):

$$\begin{aligned} C_S[f] \equiv & \int d\Pi_{\psi'} d\Pi_a d\Pi_{a'} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_\psi + p_a - p_{\psi'} - p_{a'}\right) |\mathcal{M}|^2 \\ & \times \Big[[1 \pm f_{a'}][1 \pm f_{\psi'}] \; f_a \; f_\psi - f_{\psi'} f_{a'} [1 \pm f_a][1 \pm f_\psi] \Big]. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Hierbei wurde Zeitumkehrinvarianz (oder CP-Invarianz) angenommen, so dass das Matrixelement der Reaktion in beide Richtungen gleich ist:

$$|\mathcal{M}|^2_{\psi + a \to \psi' + a'} = |\mathcal{M}|^2_{\psi' + a' \to \psi + a} \equiv |\mathcal{M}|^2. \tag{2.36}$$

Durch die elastischen Streuprozesse werden die zu betrachtenden Teilchen ψ dicht am kinetischen Gleichgewicht gehalten. Dies ermöglicht es, als eine gute Näherung, die Phasenraumverteilungsfunktion f_ψ durch (2.4) zu nähern. Da die Streupartner der Teilchen ψ SM-Teilchen des Wärmebads sind, folgen sie ebenfalls einer Phasenraumverteilungsfunktion der Form (2.4) mit verschwindendem chemischen Potential.

Der Kollisionsterm $C_A[f]$ der inelastischen Streuung ergibt sich für eine Reaktion $\psi + \bar{\psi} \leftrightarrow i + j$ nach (2.33) durch:

$$\begin{aligned} C_A[f] \equiv & \int d\Pi_{\bar{\psi}} d\Pi_i d\Pi_j (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_\psi + p_{\bar{\psi}} - p_i - p_j\right) \\ & \times \Big[|\mathcal{M}|^2_{\psi + \bar{\psi} \to i + j} f_\psi f_{\bar{\psi}} [1 \pm f_i][1 \pm f_j] - |\mathcal{M}|^2_{i + j \to \psi + \bar{\psi}} f_i f_j [1 \pm f_\psi][1 \pm f_{\bar{\psi}}] \Big]. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Wie beim elastischen Streuterm kann hier eine Zeitumkehrinvarianz angenommen werden, so dass gilt:

$$|\mathcal{M}|^2_{\psi+\bar{\psi}\to i+j} = |\mathcal{M}|^2_{i+j\to\psi+\bar{\psi}} \equiv |\mathcal{M}|^2. \tag{2.38}$$

Hiermit können wir die Definition des chemischen Gleichgewichtes präziser fassen. Wir definieren das chemische Gleichgewicht als den Fall, in dem die Annihilations- und Erzeugungsrate der Teilchen gleich ist, so dass der Annihilationsoperator verschwindet: $C_A[f^{eq}] \equiv 0$, d.h.

$$f^{eq}_{\psi} f^{eq}_{\bar{\psi}}[1 \pm f^{eq}_i][1 \pm f^{eq}_j] = f^{eq}_i f^{eq}_j[1 \pm f^{eq}_{\psi}][1 \pm f^{eq}_{\bar{\psi}}]. \tag{2.39}$$

2.4 Erstes Moment der Boltzmann-Gleichung

Wir werden im Folgenden eine Differentialgleichung aufstellen, mit der wir die Entwicklung der Teilchendichte n_χ beschreiben können. Wir halten uns dabei an [9, 10] und betrachten das erste Moment der Boltzmann-Gleichung (2.3)

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{g}{p_0}\hat{L}[f] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{g}{p_0}C[f], \tag{2.40}$$

für eine $2 \leftrightarrow 2$ Teilchenreaktion $\chi\bar{\chi} \leftrightarrow X\bar{X}$, mit schweren DM-Teilchen χ und allen SM-Teilchen X, in die sie annihilieren können.
Für die folgenden Rechnungen können wir weitere Vereinfachungen des Kollisionsoperators durchführen:

Wir gehen davon aus, dass die DM zum Zeitpunkt der Entkopplung nichtrelativistisch ist, d.h. $E_\chi \approx m_\chi + \frac{p^2}{2m_\chi} \gg T$. Dies wiederum bedeutet, dass die Unterdrückungs- und stimulierten Emissionsfaktoren $(1 \pm f_\chi) \simeq 1$ sicher vernachlässigt werden können. Die Energieerhaltung verlangt weiter, dass die Energie der SM-Teilchen ebenfalls größer ist als die Temperatur $\omega_X, \tilde{\omega}_{\bar{X}} > m_\chi \gg T$, weshalb auch diese Pauli-Faktoren $(1 \pm f_X) \simeq 1$ vernachlässigt werden können [1]. Damit können wir den Annihilationsterm schreiben als:

$$C_A[f] = \int d\Pi_{\bar{\chi}} d\Pi_X d\Pi_{\bar{X}} (2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2 \delta^{(4)}\left(p_\chi + p_{\bar{\chi}} - p_X - p_{\bar{X}}\right)\Big[f_\chi f_{\bar{\chi}} - f_X f_{\bar{X}}\Big]. \tag{2.42}$$

Nun betrachten wir den Faktor $\Big[f_\chi f_{\bar{\chi}} - f_X f_{\bar{X}}\Big]$ und erinnern uns an die Definition des chemischen Gleichgewichts (2.39),

$$f^{EQ}_\chi f^{EQ}_{\bar{\chi}}[1 \pm f_X][1 \pm f_{\bar{X}}] = f_X f_{\bar{X}}[1 \pm f^{EQ}_\chi][1 \pm f^{EQ}_{\bar{\chi}}] \tag{2.43}$$

[1] Man überzeugt sich leicht davon, dass man zu einer Boltzmann-Statistik übergehen kann, indem man die durchschnittliche Energie pro SM-Teilchen im Wärmebad als Quotient von (2.11) und (2.12) berechnet, (was eine gute Näherung ist, da nichtrelativistische Teilchen exponentiell unterdrückt sind) [1]:

$$\langle\omega_X\rangle = \frac{\rho}{n} \sim 3.15\ T \quad\to\quad e^{\omega_X/T} \gg 1 \quad\to\quad f \approx e^{-\omega_X/T} \tag{2.41}$$

bzw. mit $f \ll 1$ (für alle Teilchen), dann erhalten wir [2]

$$f_\chi^{EQ} f_{\bar{\chi}}^{EQ} = f_X f_{\bar{X}}. \tag{2.46}$$

Benutzen wir dieses Ergebnis und (2.32), so erhalten wir die Boltzmann-Gleichung (2.40):

$$\begin{aligned}\dot{n}_\chi + 3Hn_\chi =& \frac{g}{2}\int d\Pi_\chi d\Pi_{\bar{\chi}} d\Pi_X d\Pi_{\bar{X}} (2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2 \\ & \times \delta^{(4)}\left(p_\chi + p_{\bar{\chi}} - p_X - p_{\bar{X}}\right)\left[f_\chi f_{\bar{\chi}} - f_\chi^{EQ} f_{\bar{\chi}}^{EQ}\right].\end{aligned} \tag{2.47}$$

Der Beitrag der elastischen Streuung $C_S[f]$ (2.35) zum Kollisionsoperator verschwindet unter dem zusätzlichen Integral durch seine Schief-Symmetrie, was die anschaulich offensichtliche Tatsache widerspiegelt, dass Streuprozesse die Teilchenzahl nicht ändern [11].

Wir haben hier also erreicht, dass die Evolution von n_χ ohne Bezug auf die Verteilungsfunktionen der Endzustandsteilchen ausgedrückt wird. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{n}_\chi + 3Hn_\chi =& -\frac{g}{2}\int d\Pi_\chi d\Pi_{\bar{\chi}} \underbrace{\int d\Pi_X d\Pi_{\bar{X}} (2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2 \delta^{(4)}\left(p_\chi + p_{\bar{\chi}} - p_X - p_{\bar{X}}\right)}_{=\sigma\cdot 4\sqrt{(p_\chi\cdot p_{\bar{\chi}})^2 - m_\chi^4}} \\ & \times \left[f_\chi f_{\bar{\chi}} - f_\chi^{EQ} f_{\bar{\chi}}^{EQ}\right] \\ =& -2g\int d\Pi_\chi d\Pi_{\bar{\chi}} \sigma \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{(p_\chi\cdot p_{\bar{\chi}})^2 - m_\chi^4}}{E_\chi E_{\bar{\chi}}}}_{\equiv v_{\text{Møl}}} \left[f_\chi f_{\bar{\chi}} - f_\chi^{EQ} f_{\bar{\chi}}^{EQ}\right] \\ =& -\frac{2}{g}\int \sigma v_{\text{Møl}} \left(dn_\chi dn_{\bar{\chi}} - dn_\chi^{EQ} dn_{\bar{\chi}}^{EQ}\right),\end{aligned} \tag{2.48}$$

wobei $dn = g\, f \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}$ aus (2.2) benutzt, der Wirkungsquerschnitt σ (siehe Anhang B) eingeführt und die Møller-Geschwindigkeit $v_{\text{Møl}}$ definiert wurde [3].

[2] Diese Relation können wir für die Boltzmann-Statistik sofort einsehen. Benutzt man:

$$\begin{aligned} f_X &= e^{-\omega_X/T} \\ f_{\bar{X}} &= e^{-\omega_{\bar{X}}/T}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

und die Energieerhaltung $E_\chi + E_{\bar{\chi}} = \omega_X + \omega_{\bar{X}}$, so sieht man sofort, dass gilt:

$$f_X f_{\bar{X}} = e^{-(\omega_X + \omega_{\bar{X}})/T} = e^{-(E_\chi + E_{\bar{\chi}})/T} = f_\chi^{EQ} f_{\bar{\chi}}^{EQ}. \tag{2.45}$$

[3] Die Møller-Geschwindigkeit ist so definiert, dass die Größe $v_{\text{Møl}} n_1 n_2$ invariant unter Lorentztransformationen ist, und der Relativgeschwindigkeit im Laborsystem entspricht [10]. (In Abhängigkeit von den Teilchengeschwindigkeiten der einlaufenden Teilchen 1 und 2, $\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{p_1}/E_1$ und $\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{p_2}/E_2$, ist die Møller Geschwindigkeit gegeben durch $v_{\text{Møl}} = \sqrt{|\boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v_2}|^2 - |\boldsymbol{v_1} \times \boldsymbol{v_2}|^2}$).

Um unnötige Schreibarbeit zu sparen, werden wir einen Aspekt des DM-Modells, welches dieser Arbeit zugrundeliegt vorwegnehmen: Wir werden in dieser Arbeit ausschließlich ein fermionisches DM-Teilchen betrachten, das außer der Spin-Orientierung keine weiteren inneren Freiheitsgrade besitzt. Damit ist $g = 2$ und der Vorfaktor in (2.48) verschwindet.
Wie in [11] gezeigt wird, sind die Verteilungen im kinetischen Gleichgewicht proportional zu denen im chemischen Gleichgewicht, mit einem Proportionalitätsfaktor, der unabhängig ist von den Impulsen. Darum gilt (sowohl vor als auch nach der chemischen Entkopplung, aber vor der kinetischen Entkopplung)

$$\dot{n}_\chi + 3Hn_\chi = -\langle \sigma v_{\text{Møl}} \rangle \left(n_\chi n_{\bar{\chi}} - n_\chi^{EQ} n_{\bar{\chi}}^{EQ} \right), \tag{2.49}$$

mit der Definition der thermischen Mittelung des Produktes aus Wirkungsquerschnittes und der Møller Geschwindigkeit:

$$\langle \sigma v_{\text{Møl}} \rangle \equiv \frac{\int \sigma v_{\text{Møl}} \, dn_\chi^{EQ} dn_{\bar{\chi}}^{EQ}}{\int dn_\chi^{EQ} dn_{\bar{\chi}}^{EQ}}. \tag{2.50}$$

Eine entsprechende Evolutionsgleichung erhält man für die Antiteilchen $\bar{\chi}$:

$$\dot{n}_{\bar{\chi}} + 3Hn_{\bar{\chi}} = -\langle \sigma v_{\text{Møl}} \rangle \left(n_\chi n_{\bar{\chi}} - n_\chi^{EQ} n_{\bar{\chi}}^{EQ} \right). \tag{2.51}$$

Es fällt hier nun auf, dass die Teilchendichten der Teilchen χ und Antiteilchen $\bar{\chi}$ in den Evolutionsgleichung (2.49) und (2.51) über den Kollisionsterm koppeln, wie wir ja schon am Ende von Abschnitt 2.2 erwähnt hatten.
Unter der Annahme einer CP-Invarianz lassen sich die Gleichungen jedoch entkoppeln, da somit gewährleistet wird, dass die Teilchen χ die gleichen Verteilungen haben wie ihre Antiteilchen (das Gleiche ist insbesondere auch dann immer erfüllt wenn es sich um Majoranateilchen handelt, d.h. $\chi = \bar{\chi}$). Damit vereinfacht sich (2.49) zu:

$$\dot{n}_\chi + 3Hn_\chi = -\langle \sigma v_{\text{Møl}} \rangle \left(n_\chi^2 - n_\chi^{2\ EQ} \right). \tag{2.52}$$

2.4.1 Entkopplung und Reliktdichte

Im Rahmen der Diplomarbeit wurde die Boltzmann-Gleichung (2.52) im relevanten Definitionsbereich numerisch gelöst. Um vorab jedoch ein besseres Verständnis für die Lösungen zu bekommen, werden in diesem Abschnitt analytische Grenzlösungen präsentiert und die Boltzmann-Gleichung in einer Form dargestellt die numerische Lösungen begünstigt.
Zunächst jedoch betrachten wir die thermische Mittelung (2.50).

Thermische Mittelung

Es ist in der Literatur üblich, das Produkt von Wirkungsquerschnitt und Møller-Geschwindigkeit nach Potenzen der Møller-Geschwindigkeit zu entwickeln, da die DM-Teilchen zum Zeitpunkt der chemischen Entkopplung in der Regel nichtrelativistisch waren:

$$\sigma v_{\text{Møl}} \approx a + bv^2 + cv^4 + ... \tag{2.53}$$

Somit wird die thermische Mittelung auf Potenzen der Møller Geschwindigkeit reduziert:

$$\langle \sigma v \rangle \approx a + b \left\langle v^2 \right\rangle + c \left\langle v^4 \right\rangle + ... \tag{2.54}$$

Für den nichtrelativistischen Grenzfall erhält man im Schwerpunktsystem der Teilchen die Näherungen:

$$\begin{aligned} \left\langle v^2 \right\rangle &= \frac{\int v^2 dn_\chi^{EQ} dn_{\bar{\chi}}^{EQ}}{\int dn_\chi^{EQ} dn_{\bar{\chi}}^{EQ}} \approx 6\frac{T}{m_1} + O\left(T^3\right) \\ \left\langle v^4 \right\rangle &\approx 60 \left(\frac{T}{m_1}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Dies ist eine gute Näherung für kleine Geschwindigkeiten. Nimmt man jedoch eine Maxwell-Boltzmannsche Geschwindigkeitsverteilung an für die Zeit, in der sich die DM-Teilchen im kinetischen Gleichgewicht mit dem Wärmebad befinden, so zeigt sich, dass die DM-Teilchen zum Zeitpunkt der chemischen Entkopplung Geschwindigkeiten von $v \sim 0.3\ c$ haben. Damit sind relativistische Korrekturen von $5 - 10\%$ zu erwarten [10].
Des Weiteren können bei der numerischen Berechnung des Doppelintegrals in Gl. (2.50) Schwierigkeiten auftreten. Wir werden daher im Folgenden für die numerische Berechnung der Boltzmann-Gleichung eine Einfach-Integraldarstellung herleiten [10], die eine Entwicklung des Wirkungsquerschnittes überflüssig macht und für alle Temperaturen $T \lesssim 3m_\chi$ gilt.
Dazu schreiben wir das Volumenelement analog zu (2.7) als

$$d^3p_\chi d^3p_{\bar{\chi}} = \frac{(4\pi)^2}{2} p_\chi p_{\bar{\chi}} dE_\chi dE_{\bar{\chi}} \mathrm{dcos}(\theta), \tag{2.56}$$

wobei θ der Winkel zwischen $\boldsymbol{p}_\chi$ und $\boldsymbol{p}_{\bar{\chi}}$ ist. Als nächstes führen wir eine Variablensubstitution durch und wechseln von $\{E_\chi, E_{\bar{\chi}}, \theta\}$ zu $\{E_+, E_-, s\}$, die definiert sind durch

$$\begin{aligned} E_+ = E_\chi + E_{\bar{\chi}}, \qquad E_- = E_\chi - E_{\bar{\chi}} \\ s = 2m_\chi^2 + 2E_\chi E_{\bar{\chi}} - 2p_\chi p_{\bar{\chi}} \cos(\theta). \end{aligned} \tag{2.57}$$

Damit wird das Volumenelement zu

$$d^3p_\chi d^3p_{\bar{\chi}} = \frac{\pi^2}{2}\left(E_+^2 - E_-^2\right) dE_+ dE_- ds \tag{2.58}$$

und die Integrationsgrenzen transformieren sich von
$\{E_\chi > m_\chi, E_{\bar{\chi}} > m\chi, |\cos(\theta)| \leq 1\}$ zu

$$\begin{aligned} |E_-| \leq & \sqrt{1 - \frac{4m_\chi^2}{s}} \sqrt{E_+^2 - s}, \\ E_+ \geq \sqrt{s}, & \quad s \geq 4m_\chi^2. \end{aligned} \tag{2.59}$$

In diesen Variablen lässt sich nun die Integration über E_+ und E_- des Zählers von (2.50) ausführen:

$$\begin{aligned}\int \sigma v_{\text{Møl}}\, dn_\chi^{EQ} dn_{\bar{\chi}}^{EQ} &= \frac{\pi^2 g^2}{2} \int dE_+ \int dE_- \int ds\ \sigma v_{\text{Møl}} \left(E_+^2 - E_-^2\right) e^{-E_+/T} \\ &= 2\pi^2 g^2 \int ds \sigma(s - 4m_\chi^2) \int dE_+ e^{-E_+/T} \sqrt{E_+^2 - s} \\ &= 2\pi^2 g^2 T \int ds \sigma(s - 4m_\chi^2) \sqrt{s}\ \mathrm{K}_1(m/T),\end{aligned} \tag{2.60}$$

wobei wir von (B.49) Gebrauch gemacht haben und davon, dass der Wirkungsquerschnitt nur von der Mandelstamvariable s abhängt (vgl. Anhang B). Auf ähnliche Weise lässt sich der Nenner berechnen, mit dem Ergebnis:

$$\int\ dn_\chi^{EQ} dn_{\bar{\chi}}^{EQ} = \left(4\pi^2 g^2 m_\chi^2 T\ \mathrm{K}_2(m/T)\right)^2. \tag{2.61}$$

Dabei bezeichnen K_i die modifizierten Besselfunktionen der Ordnung i. Dies führt uns somit insgesamt zu

$$\langle \sigma v_{\text{Møl}} \rangle = \frac{1}{8m_\chi^4 T\ \mathrm{K}_2^2(m/T)} \int_{4m_\chi^2}^{\infty} ds \sigma(s - 4m_\chi^2) \sqrt{s}\ \mathrm{K}_1(m/T). \tag{2.62}$$

Wir haben damit eine Möglichkeit gefunden, die thermische Mittelung auf eine einfache Integration zu reduzieren, die sich schnell numerisch ausführen lässt.

Es ist nützlich neue Variablen einzuführen, in denen der Expansionsterm verschwindet, um die Gleichung (2.52) zu lösen. Man bezieht dazu die Teilchenzahldichte auf die Entropiedichte s durch $Y \equiv \frac{n}{s}$. Wie in Abschnitt 2.1.1 erwähnt wurde ist die Entropie in einem mitbewegtem Koordinatensystem im frühen Universum konstant, $S = a^3 \cdot s = const.$, wodurch folgt, dass $\frac{dY}{dt} = \frac{\dot{n}}{s} - \frac{n}{s^2}\dot{s}$ mit $\dot{s} = -3Hs$ also $\dot{Y} = \frac{\dot{n}}{s} + 3H\frac{n}{s}$ gilt, so dass man

$$\frac{dY}{dt} = -s \langle \sigma v_{\text{Møl}} \rangle \left(Y^2 - Y_{EQ}^2\right) \tag{2.63}$$

erhält. Da die rechte Seite der Gleichung nur von der Temperatur abhängt, ist es nun üblich die Temperatur T als unabhängige Variable in der dimensionslosen Form $x = \frac{m}{T}$ zu benutzen . Die Änderung der Temperatur mit der Zeit ist dabei gegeben durch (2.25). Damit erhält man

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\ \frac{\tilde{g}_{*s}}{\sqrt{g_{eff}}}\ m_{Pl}\ m_\chi\ x^{-2} \langle \sigma v_{\text{Møl}} \rangle \left(Y^2 - Y_{EQ}^2\right), \tag{2.64}$$

wobei wir $\tilde{g}_{*s}$ definiert haben als

$$\tilde{g}_{*s} \equiv g_{*s} \left(1 + \frac{1}{3}\frac{g'_{*s}}{g_{*s}} T\right). \tag{2.65}$$

Bevor wir nun (2.64) lösen, betrachten wir noch die Gleichgewichtslösung $Y_{EQ} \equiv n_{EQ}/s$. Bildet man die Verhältnisse von (2.8) und (2.12) mit (2.22)

im nichtrelativistischen und ultrarelativistischen Limes, so ergibt sich

$$\begin{aligned} Y_{EQ}(x) &= \frac{45}{2\pi^4}\left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2}\frac{g}{g_{*s}}x^{3/2}e^{-x} && (x \gg 3) \\ Y_{EQ}(x) &= \frac{45\zeta(3)}{2\pi^4}\frac{g_{eff}}{g_{*s}} && (x \ll 3). \end{aligned} \tag{2.66}$$

Nun führen wir eine weitere abkürzende Schreibweise ein. Wir schreiben (2.64) mit $\Delta = Y - Y_{EQ}$ als Abweichung vom Gleichgewicht:

$$\Delta' = -Y'_{EQ} - \lambda \left\langle \sigma v_{\text{Møl}} \right\rangle x^{-2}\Delta(2Y_{EQ} + \Delta), \tag{2.67}$$

mit $\lambda = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\frac{\tilde{g}_{*s}}{\sqrt{g_{eff}}}m_{Pl}m$. Diese Gleichung lässt sich analytisch nicht im gesamten Definitionsbereich lösen, doch ist diese Darstellung für numerische Lösungen sinnvoll. Zudem lässt sie sich zu Zeiten lange vor dem Freezeout ($1 < x \ll x_f$) und zu Zeiten lange nach dem Freezeout ($x \gg x_f$) analytisch lösen:

Für die nun folgende Berechnung der Grenzlösungen werden wir jedoch von der Näherung (2.54) bis zur quadratischen Ordnung in v ausgehen, um das Verhalten der Boltzmann-Gleichung zu studieren.
Lange vor dem Freezeout waren die Teilchen nahezu im Gleichgewicht und der Unterschied von Y und Y_{EQ} war sehr klein. Darum können wir in guter Näherung $\Delta' = 0$ setzen. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta &\simeq -\lambda^{-1}(a + 6b/x)^{-1}x^2 Y'_{EQ}/(2Y_{EQ} + \Delta) \\ &\simeq (a + 6b/x)^{-1}x^2/2\lambda, \end{aligned} \tag{2.68}$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde, dass $\Delta^2 \approx 0$ ist und $-Y'_{EQ}/Y_{EQ}$ für $x > 3$ gegen 1 konvergiert.

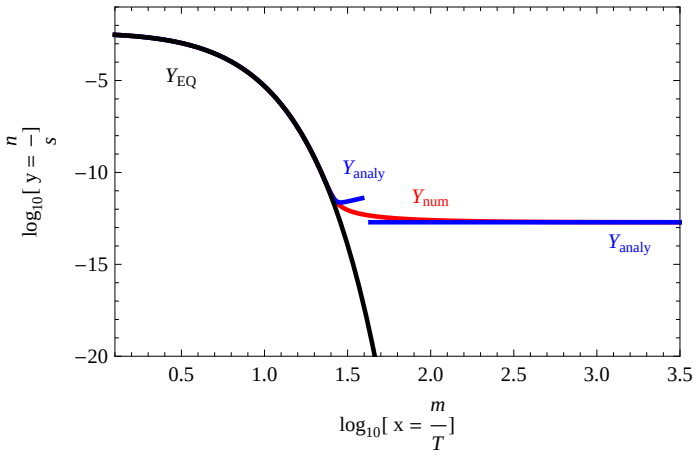
Lange nach dem Freezeout ($x \gg x_f$) hat sich Y von Y_{EQ} entkoppelt:
$\Delta \simeq Y(x \gtrsim x_f) = Y_{EQ}(x_f) \gg Y_{EQ}(x)$. Darum können Terme, die Y'_{EQ} und Y_{EQ} enthalten, sicher vernachlässigt werden:

$$\Delta' = -\lambda(a + 6b/x)x^{-2}\Delta^2. \tag{2.69}$$

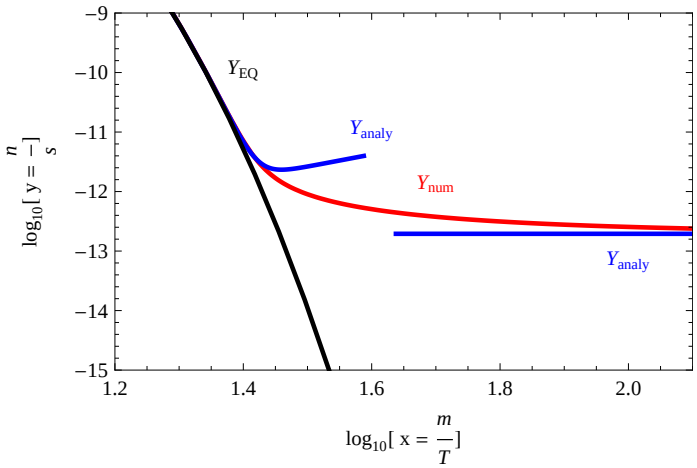
Nach Integration von $x = x_f$ bis $x = \infty$ erhält man dann

$$Y_\infty = \Delta_\infty = \frac{x_f}{\lambda}(a + 3b/x_f)^{-1}. \tag{2.70}$$

Dies ist die Teilchendichte der Teilchen χ (pro Entropiedichte) nach der Entkopplung. Wir erhalten daraus die heutige Energiedichte $\rho_0^\chi = s_0 Y_\infty m_\chi$ und über (1.15) die Reliktdichte der Teilchen χ. Es ist hierbei zu beachten, dass die gesamte Reliktdichte der DM-Teilchen jedoch sowohl von den Teilchen als auch von deren Antiteilchen bestimmt wird. Wie wir jedoch bereits ausgeführt haben, folgen die Antiteilchen der gleichen Verteilung, so dass wir hier davon ausgehen



(a)



(b)

Abbildung 2.2: (a) Vergleich der numerischen Lösung der Boltzmann-Gleichung unter Benutzung von (2.62) mit den analytischen Teil-Lösungen, wobei als bester "Fitparameter" $c \approx 0.6$ verwendet wurde. (b) Detailansicht des Entkopplungsprozesses von (a).

können, dass $\rho_0^{ges} = \rho_0^{\chi} + \rho_0^{\bar{\chi}} = 2\rho_0^{\chi}$ ist. Die Reliktdichte der DM-Teilchen lautet damit

$$\Omega = 2\frac{s_0 Y_\infty m_\chi}{\rho_{\text{crit}}} \tag{2.71}$$

(Die Null bezeichnet dabei den heutigen Zeitpunkt).

Es bleibt damit noch die Aufgabe x_f zu bestimmen. Dazu bedenken wir, dass x_f die Temperatur ist, bei der Y aufhört Y_{EQ} zu folgen und dann konstant bleibt $Y(x \gtrsim x_f) = Y_{EQ}(x_f)$. Wir definieren x_f daher über das Kriterium

$$\Delta(x_f) \equiv cY_{EQ}(x_f), \tag{2.72}$$

wobei c eine numerische Konstante ist, die man durch Anpassen der analytischen Lösungen an die "exakte" numerische Lösung bestimmt.
Dann erhält man aus der Lösung (2.68) für das frühe Universum
$\Delta \simeq (a + 6b/x)^{-1}x^2/\lambda(2 + c)$ und mit (2.66) und dem Kriterium (2.72)

$$e^{x_f} = c(c+2)\sqrt{\frac{45}{8}}\frac{1}{4\pi^3}\tilde{g}_{eff}m_{Pl}m\frac{(a+6b/x_f)}{\sqrt{x_f}}, \tag{2.73}$$

eine iterativ lösbare algebraische Gleichung für die Entkopplungstemperatur der DM-Teilchen aus dem chemischen Gleichgewicht (mit $\tilde{g}_{eff} = \frac{g}{\sqrt{g_{eff}}}\frac{\tilde{g}_{*s}}{g_{*s}}$). Man beachte, dass die Entkopplungstemperatur durch (2.73) nur logarithmisch von dem Parameter c abhängt. In Abb. 2.2(a) und 2.2(a) sind numerische Lösungen der Boltzmann-Gleichung gezeigt, zusammen mit den oben beschriebenen Lösungen in den Wertebereichen vor und nach dem Freezeout.

2.5 Zweites Moment der Boltzmann-Gleichung

Wir werden im Folgenden eine Gleichung aufstellen, anhand derer wir die Evolution der "Temperatur"der DM-Teilchen χ bestimmen können. Dazu definieren wir die "Temperatur" als einen Parameter T_χ, der der Temperatur der SM-Teilchen gleicht, solange die DM im thermischen Gleichgewicht mit dem Wärmebad ist ($T = T_\chi$), und der sich nach der Entkopplung gemäß der Rotverschiebung freier Teilchen entwickelt, d.h. $T_\chi \sim a^{-2}$. Wir definieren den Parameter T_χ daher durch

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\boldsymbol{p}^2 f(\boldsymbol{p}) \equiv 3m_\chi T_\chi n_\chi. \tag{2.74}$$

Zur Herleitung einer Evolutionsgleichung der Temperatur gehen wir dann von der Boltzmann-Gleichung $\hat{L}[f] = C[f]$ aus und integrieren beide Seiten [4]

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\boldsymbol{p}^2}{p_0}\hat{L}[f] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\boldsymbol{p}^2}{p_0}C[f]. \tag{2.75}$$

Für den Liouville-Operator können wir den Ausdruck (2.30) verwenden. Der Kollisionsoperator aus (2.34) muss jetzt jedoch weiter ausgewertet werden.

2.5.1 Kollisionsoperator

Zunächst beachten wir, dass die kinetische Entkopplung in aller Regel weit nach der chemischen Entkopplung stattfindet, so dass wir den Annihilationsterm aus (2.34) nicht zu berücksichtigen brauchen. Wir beginnen also mit dem Streuterm des Kollisionsoperators (2.35) für eine $2 \leftrightarrow 2$ Teilchenreaktion $\chi_p + X_k \rightarrow \chi_{\tilde{p}} + X_{\tilde{k}}$

$$\begin{aligned} C = \int & d\Pi_k d\Pi_{\tilde{k}} d\Pi_{\tilde{p}} (2\pi)^4 \delta^4(\tilde{p} + \tilde{k} - p - k)|\mathcal{M}|^2 \\ & \times g_{SM}\Big[(1 \mp g^{\pm})(\omega)g^{\pm}(\tilde{\omega})f(\tilde{\boldsymbol{p}}) - (1 \mp g^{\pm})(\tilde{\omega})g^{\pm}(\omega)f(\boldsymbol{p})\Big], \end{aligned} \tag{2.76}$$

[4] Sofern eine Verwechslungsgefahr mit dem ersten Moment der Boltzmann-Gleichung ausgeschlossen ist, werden wir auch das zweite Moment der Boltzmann-Gleichung kurz als Boltzmann-Gleichung bezeichnen.

wobei $p^\mu = (E, \boldsymbol{p})$ den Viererimpuls der einlaufenden DM-Teilchen bezeichnet und $k^\mu = (\omega, \boldsymbol{k})$ den Viererimpuls der einlaufenden SM-Teilchen (die auslaufenden Teilchen haben jeweils eine Tilde).
Wir haben hier die Pauli-Unterdrückungsfaktoren für DM vernachlässigt, da wir davon ausgehen, dass die chemische Entkopplung bereits stattfand und die Energie der nichtrelativistischen DM-Teilchen daher viel größer ist als die Temperatur $m_\chi \gg T_\chi$. Des Weiteren benutzen wir für die SM-Teilchen die Gleichgewichtslösung (2.4) mit verschwindendem chemischen Potential: $g^\pm(\omega) = (e^{\omega/T} \pm 1)^{-1}$.
Die Idee der weiteren Auswertung ergibt sich aus der Kinematik des Streuprozesses: Da wir ein DM-Teilchen betrachten, dessen Masse bedeutend größer ist als die Masse seines Streupartners, wissen wir aus der Streutheorie, dass der Impulsübertrag für die elastische DM Streuung sehr klein ist. Es ist daher naheliegend, eine Entwicklung des Kollisionsoperators bezüglich des Impulsübertrags $|\boldsymbol{p} - \tilde{\boldsymbol{p}}|$ durchzuführen.
Nach einer länglichen Rechnung, die im Detail im Anhang C ausgeführt wird, erhalten wir für den ersten und zweiten Entwicklungsterm

$$C = C^1 + C^2 = c(T) m_\chi^2 [T m_\chi \Delta_{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{p} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} + 3] f(\boldsymbol{p}) \tag{2.77}$$

mit

$$c(T) = \sum_i \frac{g_{SM}}{6(2\pi)^3 T m_\chi^4} \int dk\ k^5\ \omega^{-1} |\mathcal{M}|^2_{\substack{t=0 \\ \theta=\pi/2}} g^\pm(1 \mp g^\pm)(\omega), \tag{2.78}$$

wobei mit i die Summation über alle Streupartner angedeutet ist.

2.5.2 Temperaturgleichung

Wir werden nun Gleichung (2.75) auswerten und beginnen mit der linken Seite:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \boldsymbol{p}^2 (\partial_t - H\boldsymbol{p} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}}) f(\boldsymbol{p}) = \partial_t \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \boldsymbol{p}^2 f(\boldsymbol{p}) - H \sum_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \boldsymbol{p}^2 (p_i \partial_i) f(\boldsymbol{p}) \tag{2.79}$$

Man überlegt sich, dass
$-\sum_i \int d^3p\ \boldsymbol{p}^2 p_i \partial_{p_i} f(p) =$
$\sum_i \int d^3p\ \partial_{p_i}(\boldsymbol{p}^2 p_i) f(p) - \sum_i \int d^2p\ \boldsymbol{p}^2\ p_i f(p)|^{+\infty}_{-\infty} = \int d^3p\ 5\boldsymbol{p}^2 f(p) = 15 m_\chi T_\chi n_\chi,$
gilt, wobei hier an $f(|\boldsymbol{p}|, t)$ die Forderung gestellt wurde, dass f für $p_i \to \pm\infty$ schneller gegen 0 gehen soll als p_i^3 wächst. Dies ist eine sinnvolle Forderung, da es sich bei den Teilchen χ um schwere nichtrelativistische Dunkle Materie Teilchen handelt, deren Impuls im Verhältnis zur Masse vernachlässigbar ist. Damit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \boldsymbol{p}^2 (\partial_t - H\boldsymbol{p} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}}) f(\boldsymbol{p}) &= 3\partial_t (m_\chi T_\chi n_\chi) + 15 H m_\chi T_\chi n_\chi \\ &= 3 m_\chi n_\chi (\partial_t + 2H) T_\chi, \end{aligned} \tag{2.80}$$

wobei benutzt wurde, dass die chemische Entkopplung bereits stattfand. Betrachten wir nun die rechte Seite der Boltzmann-Gleichung

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\boldsymbol{p}^2}{p_0}c(T)m_\chi^2\left\{m_\chi T\Delta_{\boldsymbol{p}}+\boldsymbol{p}\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}}+3\right\}f(\boldsymbol{p}). \tag{2.81}$$

Der erste Term liefert nach zweifacher partieller Integration
$\int d^3p\ \boldsymbol{p}^2\Delta_{\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{p}) = 6\int d^3pf(\boldsymbol{p}) = 6n_\chi$ unter der Voraussetzung, dass $\partial_i f$ schnell genug abfällt: $p_i^2\partial_{p_i}f|_\infty^\infty = 0$. Damit ergibt sich dann:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\boldsymbol{p}^2}{p_0}C[f] = c(T)m_\chi(6m_\chi Tn_\chi - 6\ m_\chi T_\chi n_\chi). \tag{2.82}$$

Und damit erhalten wir insgesamt für das zweite Moment der Boltzmann-Gleichung:

$$(\partial_t + 2H)T_\chi = 2m_\chi c(T)(T - T_\chi). \tag{2.83}$$

Wir führen jetzt analog zum ersten Moment der Boltzmann-Gleichung neue Variablen ein, so dass der Expansionsterm verschwindet:

$$y \equiv \frac{T_\chi}{s^{2/3}} \tag{2.84}$$

$$x \equiv \frac{m_\chi}{T}. \tag{2.85}$$

Somit erhält man für die linke Seite von (2.83)

$$\begin{aligned}(\partial_t + 2H)T_\chi &= s^{2/3}\dot{y}\\ &= s^{2/3}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dT}\frac{dT}{dt}\\ &= s^{2/3}\frac{dy}{dT}\frac{m_\chi H}{T\tilde{g}_{*s}/g_{*s}}\end{aligned} \tag{2.86}$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2m_\chi^2 c(T)}{Hs^{2/3}x^2}\frac{\tilde{g}_{*s}}{g_{*s}}\left(1-\frac{T_\chi}{T}\right). \tag{2.87}$$

Anhand von (2.87) lässt sich der qualitative Kurvenverlauf bestimmen:
Für große T wächst der Vorfaktor der Klammer $\propto \frac{c(T)}{H} \propto \frac{T^{4+n}}{T^2}$ (wobei n die dominante Ordnung des Matrixelements ist; typischerweise 2), so dass eine spezielle Lösung der Gleichung $\propto T + h(T)$ sein wird, wobei die Funktion $h(T)$ für große T gegen eine Konstante konvergiert. Für große T, d.h. frühe Zeiten, erhält man also als Lösung, dass sich die DM-Teilchen im thermischen Gleichgewicht mit dem Wärmebad befinden, so dass deren Temperaturen gleich sind: $T_\chi = T$. Für kleine T wird der Vorfaktor verschwindend klein und damit $y = const.$ Letzteres bedeutet aber, dass die DM vom Wärmebad thermisch entkoppelt ist und sich der Temperaturparameter $T_\chi \propto s^{2/3} \propto a^{-2}$ gemäß der Rotverschiebung freier Teilchen entwickelt, wie wir es erwartet hatten. Eine typische numerische Lösung der Boltzmann-Gleichung ist in Abb. 2.3 gezeigt.

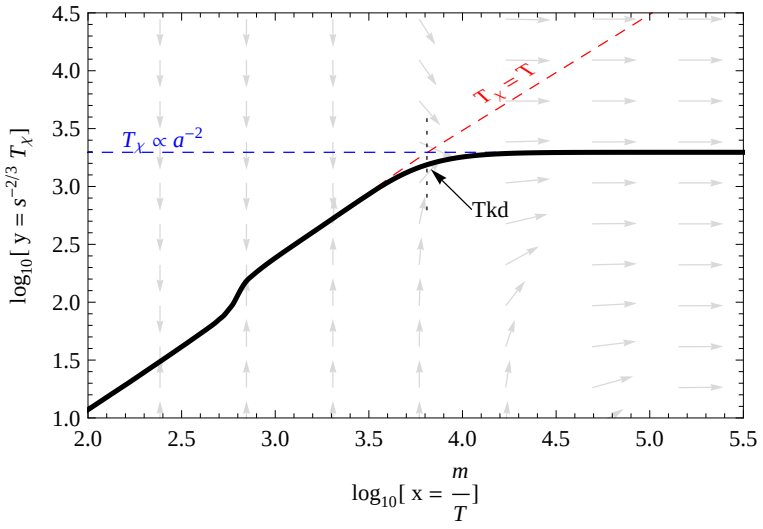


Abbildung 2.3: Typische numerische Lösung der Boltzmann-Gleichung (2.87). Es ist zudem das erwartete Grenzverhalten sowie der definierte Entkopplungspunkt gezeigt.

Man sieht anhand von Abb. 2.3, dass die Entkopplung auf einer sehr kurzen Zeitskala passiert. Daher ist es naheliegend die Entkopplungstemperatur durch Gleichsetzen der beiden Regime zu definieren. Im Bereich $T_\chi = T$ haben wir $y = \frac{T}{s^{2/3}}$ und gleichgesetzt mit $y = const. = y|_{x\to\infty}$, erhält man

$$x_{kd} \equiv y|_{x\to\infty} \times \frac{s^{2/3}}{T^2} m_\chi. \tag{2.88}$$

2.5.3 Die kleinsten Protohalos

In diesem Abschnitt werden wir uns mit den kleinsten gravitativ gebundenen Objekten aus Dunkler Materie befassen. Diese sind die zugehörigen "Observablen" der kinetischen Entkopplung. Es wird zunächst qualitativ erläutert werden, wie die Bildung solcher Objekte zustande kommt. Nachfolgend wird die quantitative Beschreibung dieser Objekte skizziert und anschließend diskutiert welche möglichen messbaren Konsequenzen daraus resultieren.

Nach dem allgemein weitestgehend anerkannten Inflationsmodell ist die Strukturbildung im Universum auf Quantenfluktuationen des Vakuums während der Inflationsphase zurückzuführen. Solche Dichteschwankungen haben sich in späteren Zeiten, während der materiedominierten Ära, durch den Einfluss der Gravitation zu großen Inhomogenitäten ausgebildet. Wir werden im Folgenden die Auswirkungen solcher Dichtefluktuationen auf die Dunkle Materie untersuchen.

Vor der kinetischen Entkopplung folgten Dichteschwankungen $\delta \equiv \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}}$ der DM-Teilchen denen des Wärmebads $\delta_\chi = \delta_b = \delta_\gamma$ durch die starke Kopplung

der DM-Teilchen an das Wärmebad. Stellt man die Evolutionsgleichung für eine Dichteschwankung δ auf, so hat sie prinzipiell die Form

$$\ddot{\delta} + [\text{Druck} - \text{Gravitation}]\delta = 0. \tag{2.89}$$

Aus dieser schematischen Gleichung lässt sich die Entwicklung von Dichteschwankungen bereits ablesen: Wenn durch eine Dichteschwankung eine Region mit einer Überdichte entsteht, der Strahlungsdruck allerdings zu groß ist, dann wird die Region mit Überdichte sich nicht weiter verdichten können, sondern wieder verschwinden. Ist der Strahlungsdruck jedoch klein gegenüber der Gravitation, so wird eine Region mit Überdichte exponentiell wachsen. Interessant ist jedoch der Fall, in dem der Strahlungsdruck und die Gravitation die gleiche Größenordnung haben: Die Materie wird zunächst durch die Gravitation zur Region mit der Überdichte hin verdichtet, bis der Strahlungsdruck so groß ist, dass die Überdichte sich in einer Art sphärischen "Schallwelle" ausbreitet. Es entstehen somit die sogenannten "akustischen Oszillationen". Derartige Oszillationen bergen allerdings auch eine Dämpfung, die sich folgendermaßen erklärt: Wenn die Oszillationsfrequenz im Verhältnis zur Wechselwirkungsrate groß wird, dann dämpft die Wechselwirkung der DM mit dem relativistischen Plasma die Oszillation. Durch die Dämpfung wird ein Limit an die kleinstmögliche Masse gesetzt, die eine stabile Dichteschwankung haben kann, wie wir weiter unten sehen werden [12].

Ein weiterer, wenn auch weniger bestimmender Effekt, der kleine Dichteschwankungen vor der kinetischen Entkopplung unterdrückt, ist durch die hohe Viskosität gegeben, die durch ständige Streuprozesse der DM-Teilchen mit den SM-Teilchen entstand. Die Auswirkungen dieser Dämpfung sind jedoch ebenfalls stark von der Entkopplungstemperatur T_{kd} abhängig und können z.B. im Fall von Neutralinos Dichteschwankungen mit einer Masse, die kleiner ist als $10^{-9}M_{\odot}$ vernichten [13].

Nach der kinetischen Entkopplung finden keine Wechselwirkungen der DM-Teilchen mit den Teilchen des Wärmebads mehr statt. Die DM-Teilchen können sich somit frei entlang ihrer Geodäten bewegen. Wenn daher die Eigendistanz $l_{\text{fs}}(t)) = \int_{t_0}^{t} dt'/a(t')$ der DM-Teilchen, die sie in der Zeit t zurücklegen, größer ist als die Wellenlänge einer Dichteschwankung $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, dann können sie sich von Gebieten höherer Dichte in Gebiete niedrigerer Dichte bewegen, wodurch jede Dichteschwankung, deren Masse, und damit deren Wellenlänge, zu klein ist, "ausgewaschen" wird, d.h. verschwindet. Es ist offensichtlich, dass dieser Effekt stark von der Temperatur T_{kd} der DM-Teilchen bei der Entkopplung abhängt. Wir werden im Folgenden diesen Vorgang etwas detaillierter beschreiben:
Wenn Dichtefluktuationen auftreten, so bewirken diese eine Verzerrung des Gravitationsfeldes, die sich (in der Newton-Eichung [14]) durch zwei weitere Funktionen Ψ und Φ in der Metrik beschreiben lassen. Aus (1.2) wird dann

$$ds^2 = a^2(\eta)\left(-(1+2\Phi)d\eta^2 + (1-2\Psi)dx^2\right), \tag{2.90}$$

wobei wir hier die konforme Zeit $d\eta = \frac{dt}{a(\eta)}$ eingeführt haben.
Nach der kinetischen Entkopplung wird die Evolution der DM-Teilchen durch

die kollisionsfreie Boltzmann-Gleichung beschrieben: $\hat{L}[f] = 0$. Die Boltzmann-Gleichung nimmt dann für die Verteilungsfunktion $f(\boldsymbol{x}, q\boldsymbol{n}, \eta)$ die Form

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{dx^i}{d\eta}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dq}{d\eta}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{dn_j}{d\eta}\frac{\partial}{\partial n_j}\right) f(\boldsymbol{x}, q\boldsymbol{n}, \eta) = 0 \tag{2.91}$$

an, wobei $q\boldsymbol{n} = \boldsymbol{q} = a\boldsymbol{p}$ die Norm und Richtung des mitbewegten Impulses bezeichnet. Im thermischen Gleichgewicht erhalten wir wieder die Boltzmann-Verteilung von (2.4), $f(\boldsymbol{x}, q\boldsymbol{n}, \eta) = f_0(q, \eta) = e^{\frac{\mu - E}{T}}$. Betrachten wir nun Abweichungen von der Gleichgewichtslösung in Form von Störungen

$$f(\boldsymbol{x}, q\boldsymbol{n}, \eta) = f_0(q, \eta) + \delta f(\boldsymbol{x}, q\boldsymbol{n}, \eta), \tag{2.92}$$

und interessieren uns im Folgenden nur für Störungen erster Ordnung. Da die freie Bewegung der nichtrelativistischen DM-Teilchen nur auf Skalen passiert, die deutlich kleiner sind als der maximale kausale Interaktionsradius (der "Horizont"), können die Störungen der Metrik vernachlässigt werden (siehe hierfür z.B. [14]). Der letzte Term der Boltzmann-Gleichung (2.91) verschwindet dann, da bei Abwesenheit der Störungen in der Metrik frei bewegte Teilchen nicht einfach ihre Richtung ändern. Der vorletzte Term verschwindet ebenfalls, da aus der Geodätengleichung (2.27) folgt, dass dieser Term proportional zu den Störungen Ψ und Φ ist.
Es bleiben somit nur noch die ersten beiden Terme von (2.91) stehen
($\frac{\partial f}{\partial\eta} + \frac{p_i}{a}\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$). Um die räumlichen Ableitungen zu umgehen und um ein besseres Bild der Größenordnungen zu haben, ist es nun üblich in den Fourier-Raum zu wechseln, wodurch $f(\boldsymbol{x}, q\boldsymbol{n}, \eta)$ zu $f(\boldsymbol{k}, q\boldsymbol{n}, \eta)$ wird. Die Boltzmann-Gleichung wird dann in erster Ordnung der Störung zu:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + i\frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k}}{a\ m}\right)\delta f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q}, \eta) = 0. \tag{2.93}$$

Betrachten wir nun die Anfangsbedingungen: Nahe der kinetischen Entkopplung wird die Phasenraumverteilungsfunktion der Maxwell-Boltzmann-Verteilung sehr ähnlich sein. Es müssen allerdings auch Dichteschwankungen während der Entkopplung berücksichtigt werden. Betrachtet man daher kleine Schwankungen der Temperatur (δT) und des chemischen Potenzials ($\delta\mu$) und entwickelt die Verteilungsfunktion diesbezüglich bis zur ersten Ordnung, so erhält man als Anfangsbedingung die Abweichung vom thermischen Gleichgewicht bei der kinetischen Entkopplung:

$$\left(\frac{\delta f}{f_0}\right)(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q}, \eta) = \delta\left(\frac{\mu}{T}\right) + \left(\frac{E}{T}\right)\frac{\delta T}{T} + \mathcal{O}(\delta^2). \tag{2.94}$$

Es bleibt damit noch Ausdrücke für die Schwankungen der Temperatur und des chemischen Potentials zu finden. Aus der Entropieerhaltung pro DM-Teilchen erhält man eine Relation für den DM Dichtekontrast $\Delta(k, \eta_{kd}) \equiv \frac{\delta n}{n} \sim \frac{3}{2}\frac{\delta T}{T}$. Benutzt man jetzt die Gibbs-Duhem-Relation $n\delta\mu = -s\delta T + \delta p$ mit (2.5), dann erhält man $\delta\left(\frac{\mu}{T}\right) \approx -\left(\frac{2m}{3T}\right)\Delta(k, \eta_{kd})$ und damit insgesamt

$$\left(\frac{\delta f}{f_0}\right)(k, q, \eta_{kd}) = \frac{q_{kd}^2/2m}{3T_{kd}/2}\Delta(k, \eta_{kd}) + \mathcal{O}(\delta^2). \tag{2.95}$$

Die Abweichung vom Gleichgewicht ist also proportional zum Dichtekontrast multipliziert mit dem Verhältnis der kinetischen Energie eines Teilchens zur mittleren thermischen Energie.
Mit dieser Anfangsbedingung lautet die Lösung der Boltzmann-Gleichung (2.91) dann

$$\left(\frac{\delta f}{f_0}\right)(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q},\eta) = \left(\frac{\delta f}{f_0}\right)(k,q,\eta_{kd})e^{-il(q,\eta)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}}, \tag{2.96}$$

wobei $l(q,\eta)$ die mitbewegte Weglänge ist, die ein freies Teilchen bis zur Zeit η wandert:

$$l(q,\eta) = \int_{\eta_{kd}}^{\eta} d\eta' \frac{q/m}{a(\eta')}. \tag{2.97}$$

Interessieren wir uns nun für den zuvor beschriebenen Cutoff, dann berechnen wir die freie Weglänge nicht für ein einzelnes Teilchen, sondern mitteln über die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung und berechnen die Weglänge für die gemittelte Geschwindigkeit

$$l(q,\eta) \sim \bar{v}_{kd} a_{kd} \int_{\eta_{kd}}^{\eta} \frac{d\eta'}{a(\eta')}, \tag{2.98}$$

mit $\bar{v}_{kd} = \sqrt{3gT_{kd}/m}$. Um nun das Spektrum der Dichteschwankungen besser beschreiben zu können definieren wir

$$k_{\mathrm{fs}}(\eta) \equiv \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T_{kd}/m}[l(q_{kd},\eta)/(q_{kd}/m)]}. \tag{2.99}$$

Für ein strahlungsdominiertes Universum lässt sich (2.99) dann bestimmen zu [15]

$$\begin{aligned} k_{\mathrm{fs}}(\eta) &\approx \left(\frac{m}{T_{kd}}\right)^{1/2} \frac{a_{eq}/a_{kd}}{\ln(4a_{eq}/a_{kd})} \frac{a_{eq}}{a_0} H_{eq} \\ &\approx \frac{1.70\times10^6}{\mathrm{Mpc}} \frac{(m/100\ \mathrm{GeV})^{1/2} g_{\mathrm{eff}}^{1/4} (T_{kd}/30\ \mathrm{MeV})^{1/2}}{1+\ln(g_{\mathrm{eff}}^{1/4} T_{kd}/30\ \mathrm{MeV})/19.2}. \end{aligned} \tag{2.100}$$

Berechnet man daraus die in einer Kugel mit Radius $R = \frac{\pi}{k_{\mathrm{fs}}}$ eingeschlossene DM-Masse, dann erhält man [16]

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{fs}}(R) \approx& \frac{4\pi}{3}\rho_\chi \left(\frac{\pi}{k_{\mathrm{fs}}}\right)^3 \\ &= 2.9\times10^{-6} \left(\frac{1+\ln\left(g_{\mathrm{eff}}^{1/4} T_{\mathrm{kd}}/50\ \mathrm{MeV}\right)/19.1}{(m_\chi/100\ \mathrm{GeV})^{1/2} g_{\mathrm{eff}}^{1/4} (T_{\mathrm{kd}}/50\ \mathrm{MeV})^{1/2}}\right)^3 M_\odot, \end{aligned} \tag{2.101}$$

die minimale Masse, die notwendig ist, damit die Dichteschwankung nicht durch die Dämpfung der freien Teilchen unterdrückt wird.

Besonders anschaulich wird das Ergebnis, wenn man die spektrale Dichte betrachtet, die wir folgendermaßen definieren: Betrachtet man die Energiedichte ρ im frühen Universum mit einer Störung δ,

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = \bar{\rho}(\boldsymbol{x}, t)[1 + \delta(\boldsymbol{x}, t)], \tag{2.102}$$

geht in den Fourierraum $\delta(\boldsymbol{x}, t) \rightarrow \delta_{\boldsymbol{k}}(t)$ und nimmt eine Gaußsche Verteilung der Fluktuationen an, so sind die einzelnen Moden unabhängig voneinander und man definiert die spektrale Dichte durch

$$\langle \delta_{\boldsymbol{k}} \delta^*_{\boldsymbol{k}'} \rangle \equiv \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\delta(k) \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k'}). \tag{2.103}$$

In Abb 2.4 ist der typische Verlauf der spektralen Dichte zu sehen (hier für zwei SUSY Modelle aus [15]). Deutlich zu sehen ist der exponentielle Einbruch bei k_{fs}, was bedeutet, dass Dichteschwankungen mit großen k, also kleinen Ausdehnungen, nicht vorkommen. Die freie Bewegung der DM-Teilchen setzt daher, wie zuvor beschrieben, ein Limit für die Mindestmasse, die eine Dichteschwankung haben muss, um überleben zu können, da jede Dichteschwankung mit einer Masse unter M_{fs} ausgewaschen wird.

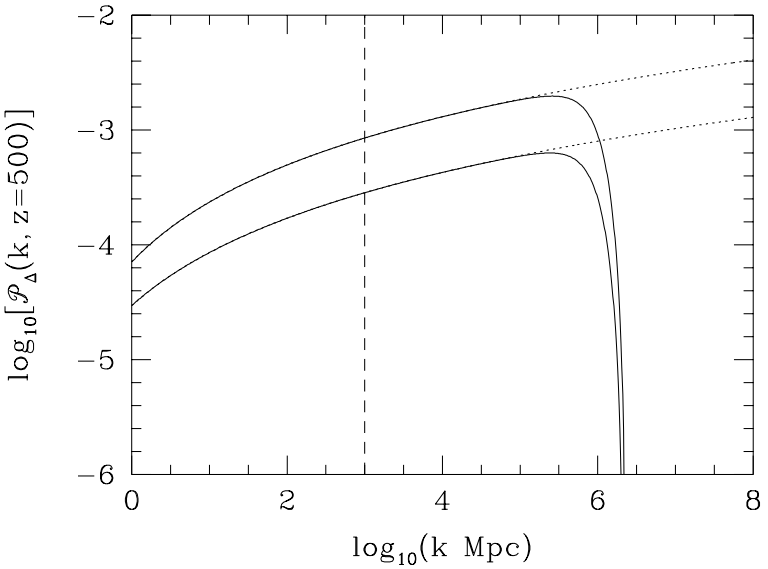


Abbildung 2.4: Es sind zwei typische Dichtespektren zweier SUSY Modelle aus [15] zu sehen. Die gepunkteten Linien beschreiben dabei den hypothetischen Verlauf der spektralen Dichte wenn keine Dämpfungserscheinungen auftreten würden (die vertikale gestrichelte Linie gibt den Wert der viskosen Dämpfungsskala an).

Wie oben bereits erwähnt wurde, setzen die akustischen Oszillationen ebenfalls eine Grenze an die Mindestmasse, die eine Dichtefluktuation haben muss, um nicht durch ein Dämpfungseffekt ausgelöscht zu werden. Die entsprechenden

Rechnungen werden z.B. in [12] skizziert, mit dem Ergebnis, dass die in einer Sphäre mit Radius $R = \frac{\pi}{k_{\mathrm{ao}}}$ enthaltene Masse gegeben ist durch [16]

$$M_{\mathrm{ao}} \approx 3.4 \times 10^{-6} \left(\frac{g_{\mathrm{eff}}^{1/4} T_{\mathrm{kd}}}{50 \text{ MeV}} \right)^3 M_{\odot}. \tag{2.104}$$

Da die beiden hier beschriebenen Dämpfungsmechanismen unabhängig voneinander sind und deren numerische Größe von dem zugrundeliegenden Modell der DM-Teilchen abhängig ist, wird der dominierende Cutoff durch

$$M_{\mathrm{cut}} = \max[M_{\mathrm{fs}}, M_{\mathrm{ao}}] \tag{2.105}$$

bestimmt. Die resultierenden Werte sind stark modellabhängig und können z.B. für SUSY DM (Neutralino) problemlos Werte zwischen $10^{-15} M_{\odot}$ und $10^{4} M_{\odot}$ annehmen [16], während für das leichteste Kaluza-Klein-Teilchen die Cutoff-Massen typischerweise nur im Bereich zwischen $10^{-6} M_{\odot}$ und $10^{-4} M_{\odot}$ liegen [16].

Beobachtungskonsequenzen

Wie im Einleitungskapitel bereits erwähnt wurde, sind die Auswirkungen der DM-Halos durch eine Vielzahl gravitativer Effekte bekannt. Solche Halos sind ebenfalls besonders für den indirekten Nachweis der DM interessant, da in Bereichen hoher DM Dichte auch die Wahrscheinlichkeit für Annihilationsprozesse erhöht ist. Orte großer DM Konzentration sind das Galaktische Zentrum, sphärische Zwerggalaxien, die Trabanten der Milchstraße sind, und natürlich Galaxienhaufen, die die massereichsten Objekte der Universums darstellen [17]. Durch die vermehrt auftretenden DM Annihilationen sind von diesen Regionen γ-Strahlen zu erwarten, die z.B. durch inverse Compton Streuung hochenergetischer Annihilationsprodukte an Photonen von Sternen oder der Kosmischen Hintergrundstrahlung entstehen (was der entscheidendste Prozess ist, den wir mit dem Modell dieser Arbeit erwarten). Unter der Annahme, dass die kleinsten DM-Halos als Substrukturen größerer Halos bis heute überleben, lässt sich der Beitrag dieser Substrukturen zum Gesamtphotonenfluss des Halos berechnen. Es wurde dafür gezeigt, dass die kleinsten Substrukturen großer DM-Halos den dominanten Beitrag zum Gesamtphotonenfluss ausmachen können, wenn diese bedeutend dichter sind als das Hauptsystem [18]. Wir werden daher die Cutoff-Massen der DM-Halos, des in dieser Arbeit betrachteten Modells, mit [17] vergleichen, in dem der Photonenfluss eines ähnlichen DM-Modells für Galaxienhaufen bestimmt und mit den besten derzeitigen Messergebnissen von Fermi-LAT verglichen wird.
Ein direkter Nachweis der kleinsten gravitativ gebundenen DM-Halos ist jedoch eine besondere Herausforderung, da zum einen bis zum jetzigen Zeitpunkt nicht klar ist, ob derartige Halos bis zur heutigen Zeit wirklich überlebt haben oder die meisten z.B. durch Gezeitenkräfte vernichtet wurden, die bei der Verschmelzung größerer Objekte entstanden. Zum anderen ist der direkte Nachweis solcher Micro-Halos extrem schwierig, da diese Objekte in aller Regel viel zu massearm sind um Gravitationslinseneffekte zu erzeugen und auch der direkte Nachweis über Annihilationsprozesse zur heutigen Zeit technisch kaum realisierbar ist.

Selbstverständlich wäre es jedoch ein besonderer Erfolg der Wissenschaft die kleinsten gravitativ gebundenen DM-Objekte zu entdecken, da zum einen deren Masse einen direkten Rückschluss auf die kinetische Entkopplung erlaubt und zum anderen damit ein Einblick in die frühe Strukturbildung des Universums ermöglicht wird, wie es ihn bisher nicht gibt [19].

Kapitel 3

Modell dieser Arbeit

3.1 Motivation

Grundlage dieser Arbeit ist die in [20] beschriebene Theorie, die durch Messungen unerwartet hoher Flüsse hochenergetischer Leptonen bei PAMELA und ATIC motiviert wurde [21, 22], welche sich als indirekte Detektion von Dunkler Materie interpretieren lassen:

Wenn Dunkle Materie in Standardmodell-Teilchen annihiliert, dann können diese Annihilationsprodukte von Detektoren wie PAMELA und ATIC gemessen werden. Dies ist besonders interessant, da es direkte Rückschlüsse auf den Wirkungsquerschnitt der Annihilation erlaubt, welcher die Reliktdichte bestimmt.
Aktuelle Daten von PAMELA [21] zeigen, dass in einem Energiebereich von (10-100) GeV mehr Positronen gemessen wurden als durch Wechselwirkungen kosmischer Protonen mit dem interstellaren Medium erklärt werden können. Eine mögliche Erklärung wäre daher eine Annihilation von Dunkler Materie in e^+e^-, was allerdings zur heutigen Zeit einen Wirkungsquerschnitt erfordern würde, der den Wirkungsquerschnitt eines thermisch produzierten schweren DM-Teilchens $m_\chi \sim 1 - 2$ TeV um mehrere Größenordnungen übersteigt: $\langle\sigma v\rangle_{\text{PAMELA}} \simeq 400 - 800 \langle\sigma v\rangle$ (mit $\langle\sigma v\rangle \simeq 3 \times 10^{-26} \frac{cm^3}{s}$) [23].
Weitere Daten von ATIC [22] geben einen Überschuss an gemessenen e^+e^- bei (300-800) GeV an (ATIC kann Elektronen von Positronen nicht unterscheiden), der nicht durch Supernovaexplosionen, welche die Hauptquelle relativistischer kosmischer Elektronen sind, erklärt werden kann. Des Weiteren gibt es Daten von WMAP und EGRET, die sich als Abstrahlungs- bzw. Streuprozesse hochenergetischer Elektronen und Positronen erklären lassen, welche durch DM-Annihilationen erzeugt wurden [24]. Obwohl es bereits für jedes einzelne Experiment astrophysikalische Erklärungsmodelle gibt [25, 26, 27], bildet es doch einen starken Anreiz, "alle" Phänomene durch ein einziges DM-Modell zu beschreiben.
Ein solches Modell wollen wir im Folgenden diskutieren, welches historisch durch PAMELA etc. motiviert wurde, aber auch unabhängig davon als mögliche Erweiterung des Standardmodells interessant sein kann.

3.2 Konzept

Wollen wir ein Modell konstruieren, dass insbesondere die Daten von PAMELA erklärt, so ergeben sich folgende Probleme:
Erstens benötigen wir einen Wirkungsquerschnitt für die Annihilation, der bedeutend größer ist als der durch die Reliktdichte erlaubte [28].
Zweitens benötigen wir eine hohe Annihilationsrate in hochenergetische Leptonen (d.h. ein "hartes" Spektrum).
Drittens müsste zusätzlich die Annihilationsrate in Quarks gering sein, da kein erhöhter Antiprotonenfluss bei PAMELA gemessen wurde [29].

Wie in [20] ausgeführt wird, lässt sich unter Einführung eines neuen, leichten Wechselwirkungsteilchens eine Theorie konstruieren, die alle Anforderungen erfüllt:
Die Grundidee ist dabei, zum schweren fermionischen DM-Teilchen χ (das eine Masse in der Größenordnung von $m_\chi \sim 1$ TeV hat) ein leichtes bosonisches Wechselwirkungsfeld ϕ zu postulieren (dessen Masse in der Größenordnung von einigen 100 MeV bis wenigen GeV liegt), über welches das DM-Teilchen ausschließlich wechselwirkt (d.h. es gibt keine direkte Kopplung an SM-Teilchen). Wir wählen zur Konstruktion der Theorie ein skalares Wechselwirkungsfeld. Die Theorie ließe sich jedoch analog mit Vektorbosonen konstruieren [20], die wir hier der Einfachheit halber aber nicht betrachten werden.
Das fermionische DM-Teilchen muss auf langen Zeitskalen stabil sein und deshalb durch eine modellabhängige Erhaltungsgröße vor dem Zerfall geschützt werden (z.B. die R-Parität in der SUSY-Theorie). Das Wechselwirkungsteilchen unterliegt hingegen keinem solchen "Zerfallsschutz".
Um den Zerfall der Wechselwirkungsteilchen in leichte aber hochenergetische Leptonen zu erreichen und die geforderte Abwesenheit von Proton-Antiprotonzerfällen zu ermöglichen, kann man die Masse des Wechselwirkungsteilchens so klein wählen, dass der Zerfall in schwere Hadronenkanäle kinematisch unzugänglich ist. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die Wechselwirkungsteilchen im Allgemeinen nicht trotzdem in Pionen zerfallen können, was bei hohen Massen m_ϕ sogar der dominante Kanal werden kann. Entscheidend ist dabei jedoch, dass auch ein Zerfallsprozess in e^-e^+, $\mu^-\mu^+$ und $\pi^-\pi^+$ im Verhältnis $(1:1:2)$ die PAMELA und Fermi Daten erklären kann [23].
Als weitere Möglichkeit, kann man auch die Kopplung der Wechselwirkungsbosonen an Quarks derart klein wählen, dass Zerfallsprodukte in Hadronen vernachlässigt werden können.
Wir werden in diesem Modell die Masse der Wechselwirkungsbosonen einschränken, so dass der Zerfall in schwere Hadronen (wie Protonen) kinematisch verboten ist. Zusätzlich werden wir jedoch auch die Wechselwirkung mit Quarks weitestgehend vernachlässigen, da diese zum einen auf die zentralen Ergebnisse dieser Arbeit kaum einen Einfluss hätte[1], zum anderen, weil wir einen möglichst umfassenden Parameterraum untersuchen wollen, der bei einer Kopplung der

[1] Die kinetische Entkopplung der DM-Teilchen findet in aller Regel in der von Leptonen dominierten Ära des Universums statt, d.h. nach dem QCD-Phasenübergang, als sich alle Quarks in Hadronen gebunden haben, die dann das chemische Gleichgewicht verließen und aufgrund des Materie-Antimaterie Ungleichgewichts nur eine "kleine" Menge von Hadronen zurückließen.

Wechselwirkungsteilchen an Quarks durch eine Vielzahl von Experimenten (z.B. Mesonen-Zerfallsexperimente) beschränkt werden würde (für eine ausführliche Diskussion dazu siehe Abschnitt 3.2.1).
Durch die kleine Masse des Wechselwirkungsteilchens entsteht zudem, für niedrige Relativgeschwindigkeiten der DM, ein Effekt, der sich "Sommerfeld-Effekt" nennt und der den Wirkungsquerschnitt der Annihilation $\bar{\chi}\chi \to \phi\phi$ (zur heutigen Zeit) stark erhöht. Wir werden in Abschnitt 3.2.2 genauer auf diesen Effekt eingehen und im Folgenden die Grundlagen des Modells konkret ausarbeiten.
Als erstes postulieren wir den Wechselwirkungshamiltonian der DM-Teilchen (mit den Feldoperatoren ψ) mit den Bosonenfeld ϕ. Er sei gegeben durch die Yukawa-Theorie:

$$H = H_{\text{Dirac}} + H_{\text{Klein-Gordon}} + \int d^3x \; g_\chi^\phi \; :\bar{\psi}\psi\phi:, \tag{3.1}$$

wobei : ... : die Normalordnung bezeichnet. Die Kopplungskonstante g_χ^ϕ lässt sich dadurch bestimmen, dass man unter Berücksichtigung aller Annihilationskanäle des DM-Teilchens die Reliktdichte gemäß (2.71) nach dem chemischen Entkoppeln bestimmt und die Kopplungskonstante dann so fixiert, dass die Reliktdichte gerade die gemessene kalte nichtbaryonische Materiedichte im Universum ergibt.
Die Wechselwirkung des Bosonenfeldes ϕ mit den Leptonen ℓ des SM sei ebenfalls durch die Yukawa-Theorie gegeben (im Folgenden sei ℓ sowohl als Synonym für die Leptonen selbst auch auch für deren Feldoperatoren $\psi_\ell \equiv \ell$ verstanden)

$$H_{\text{Int}} = \int d^3x \; g_\ell^\phi \; :\bar{\ell}\ell\phi: . \tag{3.2}$$

Es ist dabei zu betonen, dass die Kopplungskonstante g_ℓ^ϕ der Wechselwirkungsbosonen mit den SM-Teilchen unabhängig von der Kopplungskonstante g_χ^ϕ an das DM-Feld ist (für Grenzen siehe Abschnitt 3.2.1).

Bei diesem einfachen Konzept erscheint jetzt jedoch das Problem, dass die Annihilation der DM in skalare Bosonen für kleine Relativgeschwindigkeiten stark unterdrückt ist. Dies erfordert die Einführung eines weiteren pseudoskalaren Wechselwirkungsteilchens, was man folgendermaßen einsehen kann:
Wir betrachten die Annihilation eines DM-Teilchens und Antiteilchens, die sich im Schwerpunktsystem mit der Relativgeschwindigkeit v aufeinander zubewegen. Wenn wir die Relativgeschwindigkeit gegen Null gehen lassen, dann ist der Gesamtdrehimpuls des Systems im Grenzfall $v = 0$ durch die Addition der Spins gegeben. Da es sich um zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen handelt, ist der Gesamtdrehimpuls daher immer entweder 0 oder 1. Der antisymmetrische Singulett-Zustand $|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$ hat dabei eine negative Parität, wogegen der symmetrische Triplett-Zustand ($|1,-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$, $|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$, $|1,1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$) eine positive Parität hat. Da das DM-Feld nach Voraussetzung nur mit seinem skalaren Bosonenfeld ϕ wechselwirken kann, ist der einzig mögliche Annihilationskanal in niedrigster Ordnung der Störungsrechnung der in zwei skalare ϕ-Bosonen. Dieser Endzustand hat damit aber immer eine positive Parität. Aufgrund der Paritätserhaltung können bei niedrigen Geschwindigkeiten somit nur solche DM-Teilchen annihilieren, deren Gesamtspin zu 1 koppelt. Betrachtet man hingegen die Partialwellenzerlegung des Wirkungsquerschnittes multipliziert mit

der Møller Geschwindigkeit $v\sigma \approx a + bv^2 + O(v^4)$ aus (2.52), so sieht man, dass bei $v = 0$ nur die s-Welle einen Beitrag liefert, was wiederum bedeutet, dass nur die DM-Teilchen, die einen Gesamtspin von 0 haben für $v = 0$ in die Wechselwirkungsteilchen annihilieren können. Diese Annihilation ist aber gerade durch die Paritätserhaltung verboten, was bedeutet, dass $\sigma(v = 0) = 0$ gilt.
Es ist nun aber gerade die Idee der Theorie, dass der Wirkungsquerschnitt der Annihilation gegenwärtig, d.h. für sehr kleine Geschwindigkeiten der DM, (unter Ausnutzung des Sommerfeld-Effekts), sehr groß ist, so dass das erwünschte harte Positronenspektrum entsteht. Darum führen wir ein weiteres Wechselwirkungsteilchen ein: Wir postulieren ein pseudoskalares Feld ϕ_a und fordern Paritätsinvarianz des Hamiltonian. Damit der Wechselwirkungsterm paritätsinvariant ist, muss das Produkt $\bar{\psi}\psi$ ersetzt werden durch einen pseudoskalaren Term $\bar{\psi}\gamma^5\psi$. Dadurch wird der Wechselwirkungsterm zu

$$H_{\text{Int}} = \int d^3x \;\; g_\chi^{\phi_s} \;\; : \bar{\psi}\psi\phi_s : \; + \, g_\chi^{\phi_a} : \bar{\psi}\gamma^5\psi \;\; \phi_a : . \tag{3.3}$$

Mit dem zusätzlichen pseudoskalaren Feld erreichen wir einen Annihilationswirkungsquerschnitt für den Prozess $\bar{\chi}\chi \to \phi_s\phi_a$, der für kleine Geschwindigkeiten nicht verschwindet (es ist noch anzumerken, dass der Prozess $\bar{\chi}\chi \to \phi_a\phi_a$ aus dem gleichen Grund unterdrückt ist wie $\bar{\chi}\chi \to \phi_s\phi_s$). Wir haben damit die erste notwendige Bedingung des Modells erfüllt. Um nun die gemessenen Positronenflüsse von PAMELA zu erklären, müssen wir die Kopplung der Wechselwirkungsteilchen an das Standardmodell spezifizieren:
Analog zu der Kopplung der DM-Teilchen an die Wechselwirkungsbosonen erweitern wir die Kopplung ans SM um das pseudoskalare Bosonenfeld und postulieren den Yukawa-Hamiltonian

$$H_{\text{Int}} = \int d^3x \;\; g_\ell^{\phi_s} \;\; : \bar{\ell}\ell\phi_s : \; + \, g_\ell^{\phi_a} : \bar{\ell}\gamma^5\ell \;\; \phi_a : . \tag{3.4}$$

Die Kopplungen liefern uns somit insgesamt vier freie Parameter, $g_\chi^{\phi_s}$, $g_\chi^{\phi_a}$, $g_\ell^{\phi_s}$ und $g_\ell^{\phi_a}$ (die wir im Folgenden nur noch mit g_χ^s, g_χ^a, g_ℓ^s und g_ℓ^a bezeichnen werden). Wie bereits zuvor erwähnt, können wir durch die Festlegung der Reliktdichte die Kopplung an das DM-Feld spezifizieren. Durch die Einführung des pseudoskalaren Feldes ist die Kopplung allerdings nicht mehr eindeutig festgelegt, sondern man findet lediglich einen Wert für das Produkt $g_\chi^s \; g_\chi^a$, (der massenabhängig ist). Die Kopplungskonstanten lassen sich jedoch mit der zusätzlichen Forderung $\frac{\alpha}{4\pi} \ll 1$, was eine notwendige Bedingung der Störungstheorie ist, auf einen sehr kleinen Bereich festlegen. Es wird sich z.B. zeigen, dass man durch die Festlegung der Reliktdichte (für $m_\chi = 1$ TeV) $g_\chi^s \; g_\chi^a \approx 0.4$ erhält, was bewirkt, dass die Kopplungskonstanten auf ein Intervall von $0.03 \ll g_\chi^{a,s} \ll 12.6$ festgelegt sind. Wir werden darum im Folgenden den Spezialfall $g_\chi^a = g_\chi^s$ betrachten, insbesondere da die Variation der Konstanten im definierten Intervall kaum einen Einfluss auf die kinetische Entkopplung hat.
Die Grenzen an die Kopplungskonstanten g_ℓ^s und g_ℓ^a, sowie an die Massen der Wechselwirkungsbosonen, werden im nachfolgenden Abschnitt diskutiert.

3.2.1 Grenzen des Parameterraumes

Wir werden in diesem Abschnitt Grenzen an die Kopplungskonstanten g_ℓ^s und g_ℓ^a der Wechselwirkungsbosonen mit den SM-Teilchen aus experimentellen Befunden suchen, diese bei den weiteren Berechnungen allerdings nicht streng anwenden, sondern als grobe Richtwerte im Hinterkopf behalten und erst wieder bei der Diskussion der Ergebnisse Bezug darauf nehmen.

Es werden in der Literatur eine Vielzahl von Erweiterungen des Standardmodells diskutiert, die neue Wechselwirkungsfelder einführen. Die am häufigsten diskutierten Felder sind dabei Vektorbosonen, skalare und pseudoskalare Bosonen. Entsprechend gibt es eine Vielzahl von Experimenten, die die Massen und Kopplungen solcher Wechselwirkungsfelder an das SM beschränken [30].
Der Großteil der experimentellen Grenzen gilt jedoch für bedeutend leichtere Teilchen als wir sie betrachten (sogenannte WISPs - weakly interacting sub-eV particles) und erfordert Kopplungen an Quarks.

Wir haben in dieser Arbeit keine Kopplung an Quarks eingeführt, um die Allgemeinheit der Parameterraumanalyse nicht zu beschränken.
Würden wir jedoch eine signifikante Kopplung an Quarks zulassen, so müssten wir eine Vielzahl von experimentellen Grenzen in Betracht ziehen, die die Kopplungskonstanten und Massen beschränken würden [31]. Ein solches Modell wird in [32] diskutiert, was wir hier kurz skizzieren wollen.
Nomura und Thaler postulieren ein fermionisches DM-Teilchen mit einer Masse von $m_\chi \sim 1$ TeV, das primär in ein pseudoskalares "Axion"[2] und ein skalares Boson annihiliert [32]. Die Kopplung der skalaren Bosonen an die SM-Teilchen wird in diesem Modell dadurch umgangen, dass davon ausgegangen wird, dass die skalaren Bosonen bedeutend schwerer sind als die Axionen und überwiegend in diese zerfallen: $s \to aa$. Unter Berücksichtigung der experimentellen Grenzen an die Masse des Axions, die z.B. durch Kaon-Zerfälle gegeben werden, erhalten Nomura und Thaler dann als Ergebnis, dass das Konzept die Positronenflüsse erfolgreich beschreibt wenn die Masse der Axionen m_a im Bereich

$$m_\mathrm{K} - m_\pi < m_a \lesssim 800 \text{ MeV} \tag{3.5}$$

liegt. In dem Fall zerfallen sie primär in harte Myonen, die selbst wiederum primär in harte Elektronen und Positronen zerfallen. Die Masse der skalaren Bosonen liegt dabei in der Größenordnung von $1 - 10$ GeV.

Wie in Abschnitt 3.2 bereits erwähnt wurde, vermeiden wir den unerwünschten Zerfall der Wechselwirkungsteilchen in Protonen-Antiprotonen grundlegend durch die Beschränkung der Massen m_s und m_a. Diese erhalten wir entsprechend zum einen dadurch, dass der Zerfall in Elektronen möglich sein muss, d.h. $2m_e < m_{s,a}$,

[2] Axionen sind nach Konstruktion aus dem "starken CP-Problem" WISPs mit einer Masse $m_a \ll$ MeV, bei denen eine feste Korrelation zwischen Masse und Kopplungskonstante besteht. Deren "Verallgemeinerung", die Axion-ähnlichen-Teilchen (ALP) haben definitionsgemäß nur einen Annihilationskanal in Photonen und kein festes Verhältnis von Masse und Kopplungskonstante [33]. Streng genommen handelt es sich in [32] darum nicht um Axionen, da die "Zerfallskonstante" nicht mit der Axion-Masse korreliert ist. Es handelt sich aber auch ebenfalls nicht um "Axion-ähnliche-Teilchen", da gerade die Annihilation in Photonen unterdrückt ist und die Annihilation in Leptonen betrachtet wird [33].

zum anderen durch die Tatsache, dass nach Voraussetzung der Zerfall in schwere Hadronen kinematisch verboten sein soll, woraus wir $2m_e < m_{s,a} < 2m_{\text{Proton}}$ bestimmen. Aus dem gemessenen γ-Spektrum von Zwerggalaxien (siehe Abschnitt 2.5.3) sowie aus der DM-Selbstwechselwirkung, lassen sich weitere Grenzen an die Masse der Wechselwirkungsteilchen konstruieren, die einen Massenbereich $m_\phi \lesssim 100$ MeV ablehnen [23, 34, 35, 36]. Wir werden daher in dieser Arbeit primär einen Massenbereich von 100 MeV $< m_{s,a} < 2m_{\text{Proton}}$ betrachten. Motiviert durch [32] werden wir allerdings auch Massen des Skalarfeldes im GeV-Bereich zulassen.
Die Grenzen an die Kopplungskonstanten g_ℓ^s und g_ℓ^a müssen wir aus aktuellen Experimenten adaptieren, da sich die Kopplungskonstanten nicht auf eine ähnliche Weise miteinander korrelieren lassen, wie es für g_χ^s und g_χ^a der Fall war. Eine aktuelle Übersicht der Grenzen an Kopplungskonstanten ist aus [30] in Abb. 3.1(a) gezeigt. Der uns interessierende Abschnitt des Parameterraums ist in Abb. 3.1(a) mit der Bezeichnung "Unified DM" gekennzeichnet (siehe dazu [30]) und in größerer Ansicht aus [37] in Abb. 3.1(b) gezeigt.

Die Grenzen durch die Υ-Zerfallsexperimente, sowie die Supernovaexplosion 1987a in Abb. 3.1(b) werden wir nicht beachten, da sie Kopplungen an Quarks erfordern.
Die für uns vielleicht bedeutendste Einschränkung wird durch das anormale magnetische Moment des Myons a_μ gegeben, welches die Abweichung des gyromagnetischen Verhältnisses g_μ von dem vorhersagten Wert der Dirac-Gleichung $g_\mu = 2$ beschreibt: $a_\mu \equiv \frac{g_\mu - 2}{2}$ (siehe z.B. [4]). Laut Abb. 3.1(b) ist dadurch eine Beschränkung an die Kopplungskonstante von bis zu 10^{-3} zu erwarten. Da in unserem Fall allerdings das skalare- und pseudoskalare Feld jeweils einen Beitrag liefert, werden wir die Berechnung der Grenze hier kurz skizzieren:
Man findet einen experimentellen Wert des magnetischen Moments des Myons a_μ^{Exp} [3], der sich auch durch die Quanten-Loop-Effekte des SM nicht vollständig erklären lässt, so dass eine Abweichung vom experimentellen Wert zum vorhergesagten Wert des SM entsteht, die in der 4σ-Umgebung des Messwertes liegt [4]:

$$\Delta a_\mu = a_\mu^{\text{Exp}} - a_\mu^{\text{SM}} \approx 255 \times 10^{-11}. \tag{3.6}$$

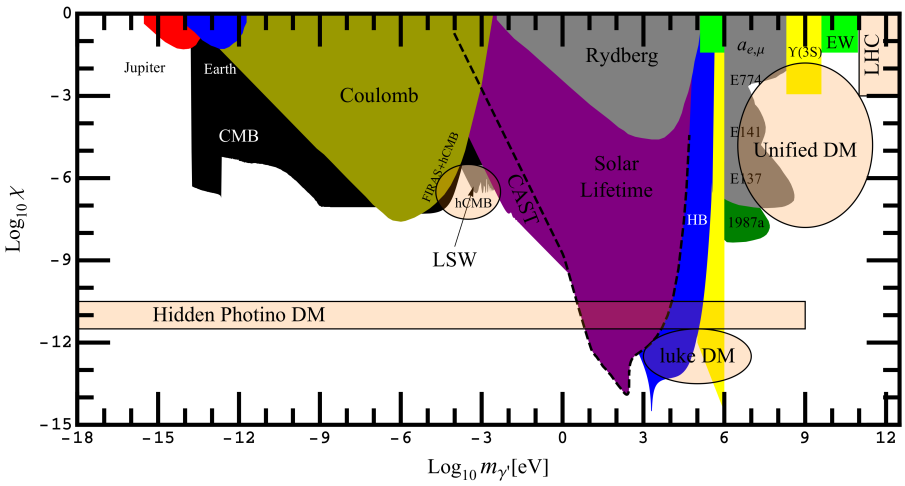
Man verlangt üblicherweise von einer Erweiterung des SM, dass der entstehende Beitrag zum magnetischen Moment des Myons, δa_μ, die Diskrepanz nicht um mehr als die 5σ-Umgebung erhöht [31]

$$|\delta a_\mu| \leq 40 \times 10^{-10}. \tag{3.7}$$

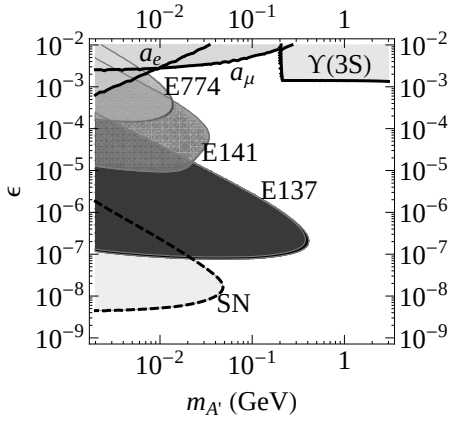
Wir erhalten im Rahmen unseres Modells sowohl einen Beitrag vom skalaren als auch vom pseudoskalaren Teilchen $\delta a_\mu = a_\mu^s + a_\mu^a$, dessen Feynman-Diagramm in Abb. 3.2(a) gezeigt ist und dessen analytischen Ausdruck wir aus [38] entnehmen: Der Beitrag des pseudoskalaren Feldes ist

$$a_\mu^a = -(g_\ell^a)^2 \frac{q_\mu m_\mu^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \frac{-x^3}{m_\mu^2 x^2 + m_a^2(1-x)}, \tag{3.8}$$

[3] Wir benutzen hier die Bezeichnung "magnetisches Moment" auch als Synonym für die Abweichung a_μ



(a)



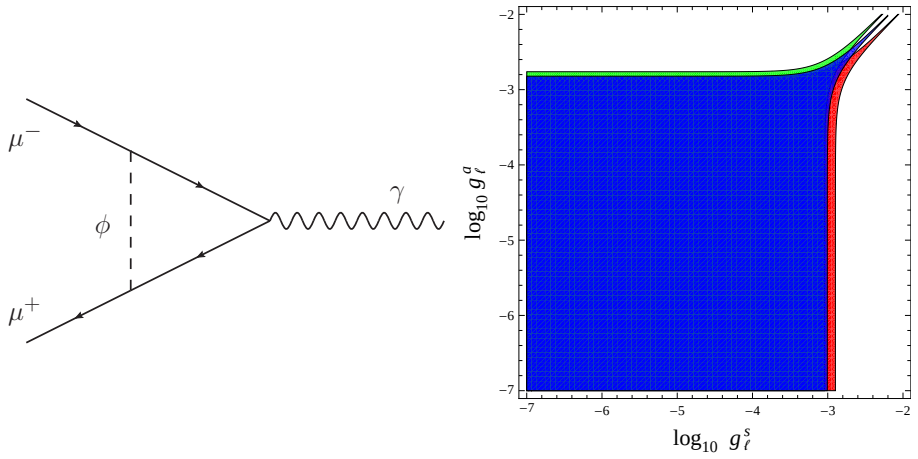
(b)

Abbildung 3.1: Aktuelle Grenzbedingungen an Theorien jenseits des SM (die Achsenbeschriftungen sind nur unterschiedliche Bezeichnungen derselben Werte und entsprechen unserer Kopplungskonstanten und Massen).

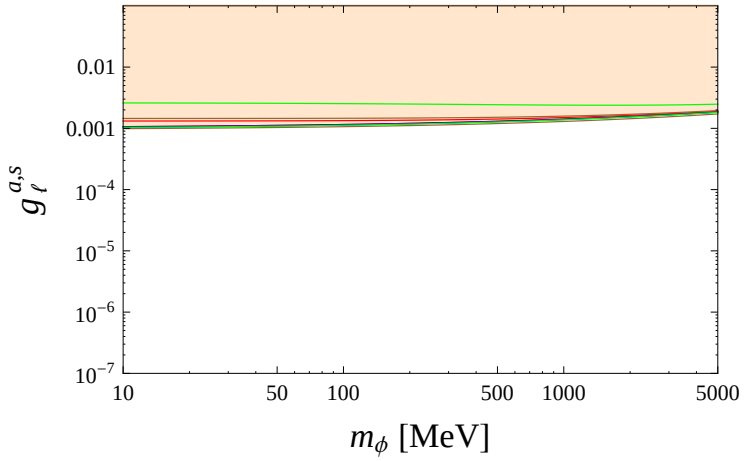
und der des skalaren Feldes ist

$$a_\mu^s = -(g_\ell^s)^2 \frac{q_\mu m_\mu^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \frac{2x^2 - x^3}{m_\mu^2 x^2 + m_s^2(1-x)}. \tag{3.9}$$

In Abb. 3.2(c) sind die resultierenden Grenzen für den Spezialfall $g_\ell^s = g_\ell^a$ gezeigt. Es ist insbesondere zu sehen, dass sie in guter Näherung unabhängig von den Massen sind. In Abb. 3.2(b) sind die Kopplungskonstanten g_ℓ^s und g_ℓ^a variiert und für unterschiedliche Werte der Massen gezeigt. Es ist zu erkennen, dass für beide Kopplungskonstanten in guter Näherung derselbe Grenzwert von $g_\ell^{s,a} \lesssim 10^{-3}$ gilt.



(a) (b)



(c)

Abbildung 3.2: (a) Feynman-Diagramm des Beitrags der Bosonenfelder $\phi^{a,s}$ zum magnetischen Moment des Myons. (b) Bereich der Kopplungskonstanten, für den gilt $|a_\mu^s + a_\mu^a| \leq 40 \times 10^{-10}$, mit $m_a = m_s = 500$ MeV (blau), $m_a = 5000$ MeV und $m_s = 100$ MeV (grün) und $m_s = 5000$ MeV und $m_a = 100$ MeV (rot). Man beachte: Im Unterschied zu allen anderen Diagrammen, wurden hier die *erlaubten* Bereiche farblich markiert. (c) Kopplungskonstante $g_\ell^s = g_\ell^a$ für die Fälle $m_a = m_s$, sowie für die Fälle, dass m_s (m_a) jeweils um 400, 800 und um 5000 MeV schwerer ist als m_a (m_s).

Die Experimente SLAC E137, SLAC E141 und Fermilab E774 sind sogenannte "Fixed-Target"- oder "Beam dump"-Experimente, bei denen ein hochenergetischer Elektronenstrahl auf ein schweres Target geschossen wird, wobei Abstrahlungsprozesse der neuen Wechselwirkungsteilchen (analog der Bremsstrahlung) möglich sind. Die neuen Wechselwirkungsteilchen würden hinter dem Target in

e^+e^- oder $\mu^+\mu^-$ Paare zerfallen, die dann mit Detektoren messbar wären. Misst man entsprechend nur Zerfallsprodukte, die in ihrer Rate den Erwartungen des Standardmodells entsprechen, so kann man dadurch Grenzen an die Massen und Kopplungen solcher hypothetischer Teilchen bestimmen.
Da wir auf einen Massenbereich 100 MeV $< m_{s,a} < 2m_{\text{Proton}}$ eingeschränkt sind, spielen nur die Grenzen des Experiments E137 eine Rolle. Aus Abb. 3.1(b) lassen sich daher direkt die erlaubten Werte der Kopplungskonstanten abschätzen. Man erhält für Teilchen der Masse $100 - 200$ MeV einen verbotenen Bereich von $g_\ell \sim 10^{-6} - 10^{-7}$ und für Teilchen der Masse 300 MeV einen verbotenen Bereich von $g_\ell \sim 5 \times 10^{-7} - 10^{-7}$.

Wir haben in diesem Abschnitt nun einige Grenzen an die Kopplungskonstanten der Wechselwirkungsbosonen gefunden, auf die wir allerdings erst wieder in Abschnitt 4.3 bei der Diskussion der Ergebnisse eingehen werden. Wie sich im Folgenden zudem zeigen wird, sind die zentralen Ergebnisse dieser Arbeit nur von den (Grenzen der) skalaren Bosonen abhängig, was die Diskussion bedeutend erleichtert.

In dem folgenden Abschnitt werden wir nun den für die hohe Annihilationsrate der DM-Teilchen benötigten Sommerfeld-Effekt einführen und erläutern.

3.2.2 Sommerfeld-Effekt

Der Sommerfeld-Effekt ist ein quantenmechanischer Effekt, der bei kleinen Geschwindigkeiten eine Erhöhung des Wirkungsquerschnittes zweier annihilierender Teilchen bewirkt. Für ein besseres Verständnis dieses Effektes diskutieren wir zunächst ein klassisches Analogon: Wir betrachten den Wirkungsquerschnitt eines Asteroiden mit einem Planeten. Wir setzen uns dazu ins Ruhesystem des kugelförmigen Planeten, mit dem Radius R. Die Ausdehnung des Asteroiden sei gegenüber der des Planeten vernachlässigbar. Ohne Gravitation wäre der Wirkungsquerschnitt durch $\sigma_0 = \pi R^2$ gegeben. Aufgrund der Gravitation tritt jedoch auch dann noch eine Wechselwirkung ein, wenn der Stoßparameter größer ist als der Planetenradius $b > R$. Es gibt daher einen maximalen Stoßparameter $b_{\max}$ für welchen der Asteroid die Planetenoberfläche tangential trifft. Der Wirkungsquerschnitt mit Gravitation beträgt daher $\sigma = \pi b_{\max}^2$. Man findet einen Ausdruck für $b_{\max}$, wenn man Energie und Drehimpulserhaltung in unendlicher Entfernung zum Planeten und auf der Planetenoberfläche benutzt. Der Wirkungsquerschnitt lässt sich dann schreiben als

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{v_{\text{esc}}^2}{v^2}\right). \tag{3.10}$$

Wobei v die Anfangsgeschwindigkeit des Asteroiden bezeichnet und $v_{\text{esc}} = \frac{2GM}{R}$ die Fluchtgeschwindigkeit von der Planetenoberfläche ist.
Anhand von Gleichung (3.10) sieht man, dass der Wirkungsquerschnitt für kleine Geschwindigkeiten $v \ll v_{\text{esc}}$ stark wächst. Dies ist daher ein klassisches Analogon zum quantenmechanischen Sommerfeld-Effekt.

Betrachten wir nun analog zum klassischen Fall ein quantenmechanisches Teilchen, welches zur Zeit $t = t_0$ durch die Wellenfunktion $\psi_0(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} a_{\boldsymbol{k}}$

beschrieben wird und welches sich in großer Entfernung zum Ursprung des Koordinatensystems befindet, in dem ein Teilchen lokalisiert sei, welches mit dem einlaufenden Teilchen annihilieren kann. Die Wechselwirkung wird durch einen Hamilton-Operator beschrieben: $H_{ann} = U_{ann}\delta^3(\boldsymbol{x})$. Man stelle sich nun vor, dass sich das Wellenpaket des ersten Teilchens mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k}_0/m$ z.B. entlang der z-Achse auf den Ursprung zu bewegt, (wobei $\boldsymbol{k}_0$ am Maximum von $a_{\boldsymbol{k}}$ liegt). Dann ist die Wechselwirkungsrate proportional zu $|\psi_0(\mathbf{0})|^2$.
Schalten wir jetzt jedoch (analog zum klassischen Beispiel) ein Zentralpotential $V(r)$ hinzu, dann wird sich durch selbiges der Betrag der Wellenfunktion am Ursprung ändern. Wir können damit schreiben

$$\sigma = \sigma_0 S, \tag{3.11}$$

mit dem ursprünglichen Wirkungsquerschnitt σ_0 und dem Sommerfeld-Faktor (im Folgenden mit SF abgekürzt) S, der gegeben ist durch

$$S = \frac{|\psi(\mathbf{0})|^2}{|\psi_0(\mathbf{0})|^2}. \tag{3.12}$$

Wir betrachten im Folgenden nur eine s-Wellen-Annihilation. Dann erfüllt die Wellenfunktion die Schrödinger-Gleichung [39]

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi + V(r)\psi = \frac{k^2}{2m}\psi \tag{3.13}$$

mit der Randbedingung, dass

$$\psi(\boldsymbol{x}) \to e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) \tag{3.14}$$

für $r \to \infty$ ist [40].
Damit wird die Berechnung des SFs zu einem Standardproblem der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Benutzen wir die Normalisierung der Wellenfunktion, die durch Gleichung (3.14) gegeben wird, dann können wir den SF vereinfachen zu $S = |\psi(\mathbf{0})|^2$.
Nun benutzen wir die Rotationssymmetrie des Zentralpotentials, indem wir ψ in Legendre-Polynome P_l und die radiale Wellenfunktion $R_{kl}(r)$ entwickeln,

$$\psi = \sum_l A_l P_l(\cos(\theta)) R_{kl}(r), \tag{3.15}$$

wobei $R_{kl}(r)$ die radiale Schrödinger-Gleichung erfüllt:

$$-\frac{1}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R_{kl}\right) + \left(\frac{l(l+1)}{2mr^2} + V(r)\right)R_{kl} = \frac{k^2}{2m}R_{kl}. \tag{3.16}$$

Wenn das Potential $V(r)$ bei $r = 0$ nicht schneller fällt als $1/r$, dann ist $R_{kl} \sim r^l$ für $r \to 0$. Das bedeutet aber, dass alle Terme im Ursprung verschwinden, außer dem für $l = 0$. Wählt man die Koeffizienten A_l jetzt derart, dass die asymptotische Form (3.14) erfüllt wird, dann erhält man

$$\psi = \frac{1}{k}\sum_l i^l(2l+1)e^{i\delta_l}P_l(\cos(\theta))R_{kl}(r), \tag{3.17}$$

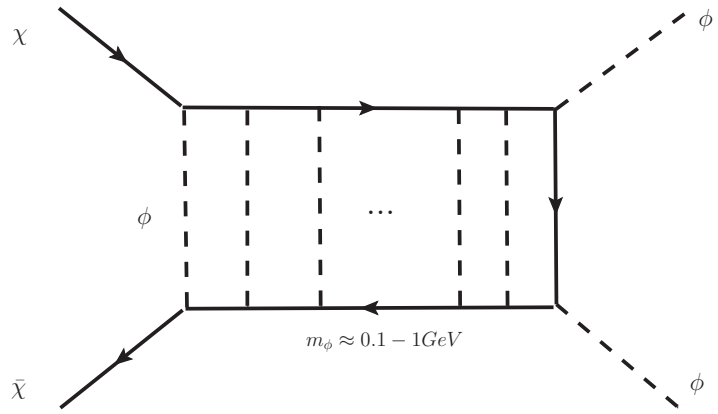


Abbildung 3.3: Beispiel eines Leiterdiagramms der Annihilation $\chi\bar{\chi} \to \phi\phi$

woraus ersichtlich wird, dass sich der SF mit $l = 0$ vereinfacht zu

$$S_k = \left| \frac{R_{k,l=0}(0)}{k} \right|^2. \tag{3.18}$$

Substituiert man des Weiteren in (3.16) $\chi_k \equiv r R_{k,l=0}$, dann führt dies auf die eindimensionale Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dr^2}\chi_k + V(r)\chi_k = \frac{k^2}{2m}\chi_k, \tag{3.19}$$

zusammen mit den Randbedingungen

$$\chi(0) = 0 \tag{3.20}$$

und

$$\chi(r) \to \sin(kr + \delta) \tag{3.21}$$

für $r \to \infty$. Wie man durch Ableiten der Substitutionsvorschrift sieht, "vereinfacht" sich damit auch der SF zu

$$S = \left| \frac{1}{k}\frac{d\chi}{dr}(0) \right|^2. \tag{3.22}$$

Zur Lösung der Schrödinger-Gleichung und der Berechnung des SFs müssen wir nun das Wechselwirkungspotential aus dem postulierten Hamiltonian (3.1) bestimmen. Dazu macht man sich klar, dass der Sommerfeld-Effekt auf dem Niveau der Quantenfeldtheorie durch Leiterdiagramme erklärt wird (siehe Abb. 3.3), bei denen mehrfach Wechselwirkungsteilchen zwischen dem DM-Teilchen und dessen Antiteilchen ausgetauscht werden. Der Vergleich der nichtrelativistischen Näherung eines solchen "Streuprozesses" von $\chi + \bar{\chi}$ mit der Streuamplitude in der Bornschen Näherung führt dann auf ein Wechselwirkungspotential, welches gerade das Yukawa-Potential ist [41]:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{2r}e^{-m_\phi r}, \tag{3.23}$$

mit $\alpha = \frac{g^2}{4\pi}$, wobei g die Kopplungskonstante ist. (Man beachte, dass das Yukawa-Potential von skalaren und pseudoskalaren Wechselwirkungsteilchen dasselbe ist.)

Die Schrödinger-Gleichung (3.19) mit dem Potential (3.23) ist im allgemeinen nicht analytisch lösbar. Lässt man die Masse des Wechselwirkungsteilchens jedoch gegen Null gehen, $m_\phi \to 0$, so erhalten wir das Coulomb-Potential, für das eine analytische Lösung existiert. Man berechnet für diesen Fall den SF zu (für eine ausführliche Rechnung siehe z.B. [42])

$$S = \frac{\pi/\epsilon_v}{1 - e^{-\pi/\epsilon_v}}, \tag{3.24}$$

wobei wir $\epsilon_v \equiv v/\alpha$ definiert haben. Wie man aus (3.24) sofort sieht, bewirkt der Sommerfeld-Effekt bei kleinen Geschwindigkeiten eine Erhöhung des Wirkungsquerschnittes und verschwindet erwartungsgemäß für große Geschwindigkeiten: $S \to 1$ für $v \to c$. In Abb. 3.4(a) ist die Lösung (3.24) (blaue gestrichelte Linie) zusammen mit einigen numerischen Lösungen des vollen Yukawa-Potentials gezeigt.

Mit Hinblick auf die numerische Lösung von (3.19) legt das Potential (3.23) eine Substitution nahe: $x = m_\phi r$, mit der die Schrödinger-Gleichung die folgende Form annimmt [42]:

$$-\frac{d^2\chi}{dx^2} - \frac{\alpha}{fx}e^{-x} = \left(\frac{v}{f}\right)^2 \chi, \tag{3.25}$$

wobei wir $k \equiv v \cdot m$ benutzt und das Massenverhältnis $f \equiv \frac{m_\phi}{m_\chi}$ definiert haben. Da es sich allerdings für die numerische Lösung von Gl. (3.25) als unpraktisch erweist, eine Randbedingung im unendlichen zu wählen, geht man von den Dirichlet-Randbedingungen durch folgende Überlegung zu Cauchy-Randbedingungen über: Die Randbedingung (3.21) definiert das Verhalten im Unendlichen als Sinus-Schwingung mit der Amplitude Eins. Durch die Amplitude der Randbedingung (3.21) wird für die Lösung der Schrödinger-Gleichung auch die Steigung am Ursprung festgelegt. Umgekehrt kann man auch die Steigung am Ursprung festlegen, wodurch sich allerdings die Lösung der Schrödinger-Gleichung um die Amplitude A ändert: $\tilde{\chi} = A \cdot \chi$. Benutzen wir nun die Lösung $\bar{\chi}$ und legen die Randbedingung durch die Steigung am Ursprung fest

$$\frac{d\tilde{\chi}}{dx}(0) = 1, \tag{3.26}$$

dann vereinfacht sich der SF auf

$$S = \left|\frac{f}{Av}\right|^2. \tag{3.27}$$

Es bleibt damit nur den Wert von A zu bestimmen. Dazu ist es notwendig, zu überlegen, wann $\tilde{\chi}$ die asymptotische Form erreicht. Dies wird sicherlich in einem großen Abstand zum Ursprung sein, bei dem die kinetische Energie des Teilchens viel größer ist als das Yukawa-Potential. Man berechnet dazu den Ort gleicher Energie durch

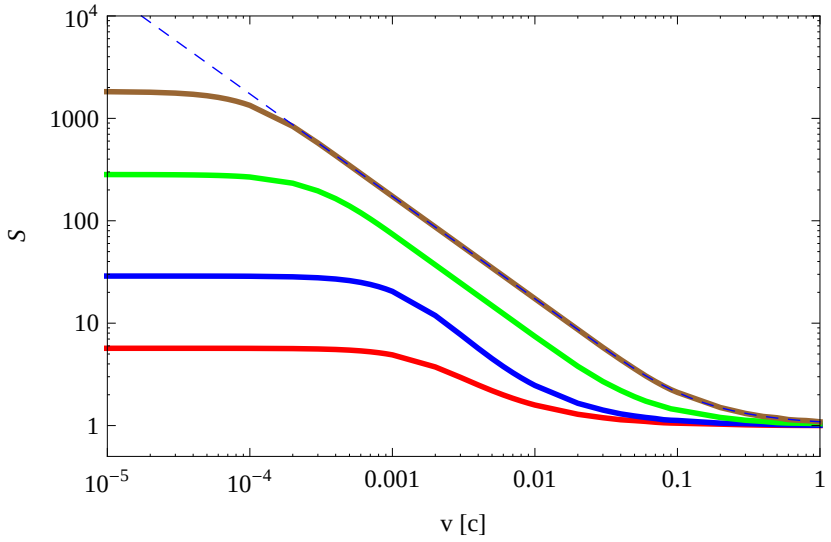
$$\frac{\alpha}{x_{\text{range}}}e^{-x_{\text{range}}} = \frac{v^2}{f} \quad \Rightarrow \quad x_{\text{range}} = W\left(\frac{f\alpha}{v^2}\right), \tag{3.28}$$

wobei W die lambertsche W-Funktion bezeichnet. Um einen Wert für A zu erhalten ist es nun nützlich (3.21) zu benutzen. Aus $\tilde{\chi} = A \sin\left(\frac{v}{f}x + \delta\right)$ und $\frac{d\tilde{\chi}}{dx} = \frac{v}{f}A \cos\left(\frac{v}{f}x + \delta\right)$ erhält man damit:

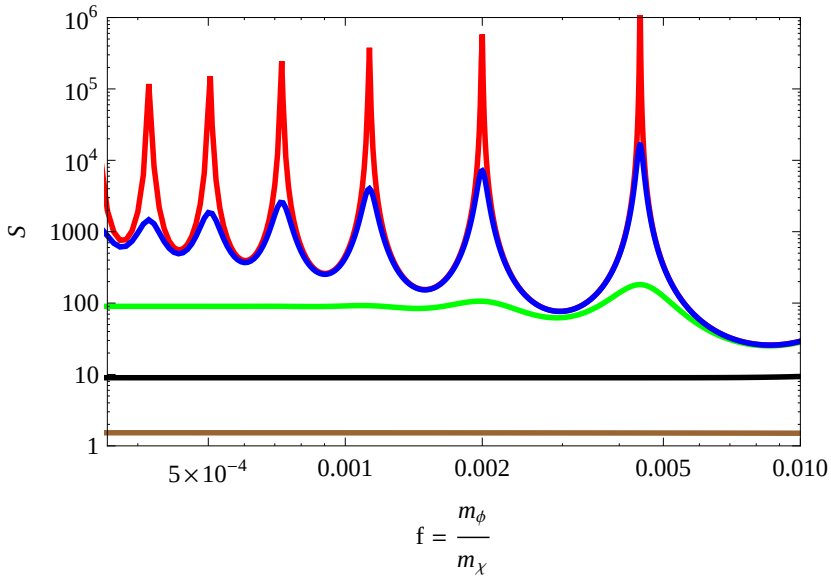
$$A = \sqrt{\tilde{\chi}^2 + \left(\frac{f}{v}\frac{d\tilde{\chi}}{dx}\right)^2}. \tag{3.29}$$

Dadurch hat man ein numerisch schnell lösbares System zur Berechnung des SFs gefunden: Man löst die Schrödinger-Gleichung (3.25) und berechnet damit die asymptotische Amplitude (3.29), indem man bei x_{range} startet und x solange erhöht bis (3.29) konvergiert. Mit A lässt sich der SF (3.27) dann auf eine einfache Weise bestimmen.

Im Vergleich zu (3.24) erhält man auf diese Weise für das volle Yukawa-Potential zwei entscheidende qualitative Unterschiede:
Mit der Näherung $m_\phi \to 0$ trifft man die Aussage, dass die kinetische Energie der Kollision viel kleiner ist als die Masse des Austauschteilchens, multipliziert mit der Kopplungsgröße: $m_\chi v^2 \gg \alpha m_\phi$. Für sehr kleine Geschwindigkeiten trifft diese Annahme allerdings nicht zu, wodurch (3.24) in diesem Bereich seine Gültigkeit verliert. Der SF divergiert somit nicht für kleine Geschwindigkeiten, sondern erreicht bei kleinen Geschwindigkeiten eine Sättigung (siehe Abb. 3.4(a)). Es ist damit also nicht möglich für kleine Geschwindigkeiten einen beliebig großen Wirkungsquerschnitt zu erreichen.
Zum zweiten treten für bestimmte Werte von f quasi-gebundene Zustände auf, die Resonanzerscheinungen bewirken. Die Resonanzen können analog zur Streuung am Potentialtopf (endlicher Tiefe) angesehen werden. Beim Potentialtopf erhält der Transmissionskoeffizient Resonanzen durch destruktive Interferenzen (siehe z.B. [40]) und durch die exponentiell verkürzte Reichweite des Yukawa-Potentials (im Verhältnis zum Coulomb-Potential) tritt hier ein ähnlicher Effekt auf.



(a)



(b)

Abbildung 3.4: In (a) sind einige numerisch berechnete SFen als Funktion der Geschwindigkeit gezeigt, dabei steht Rot für $m_\chi = 100$ GeV, Blau für $m_\chi = 200$ MeV, Grün für $m_\chi = 700$ MeV und Braun für $m_\chi = 1.9$ TeV (es wurde dabei bereits für jede Masse die Kopplungskonstante benutzt die den richtigen Wert der Reliktdichte liefert). Des Weiteren ist für den letzten Fall auch die analytische Lösung (3.24) als blaue gestrichelte Linie gezeigt. Durchgängig ist $g = 0.65$ und $m_\phi = 500$ MeV gewählt worden. Es ist zu beachten, dass die Werte der DM-Massen speziell so gewählt wurden, dass keine Resonanzen getroffen wurden. In (b) ist der SF zur Illustration der Resonanzen in Abhängigkeit von dem Massenverhältnis gezeigt für $v = 10^{-1}$ (braun), $v = 10^{-2}$ (schwarz), $v = 10^{-3}$ (grün), $v = 10^{-4}$ (blau), $v = 10^{-5}$ (rot), (wiederum mit $g = 0.65$).

Kapitel 4

Ergebnisse

Wir werden in diesem Kapitel das in Kapitel 3 vorgestellte Modell auf die zuvor in Kapitel 2 entwickelten Formalismen anwenden. Im ersten Abschnitt bestimmen wir dazu die Kopplungskonstante der DM-Teilchen mit den Wechselwirkungsbosonen. Im zweiten Abschnitt werden wir dann Streuprozesse betrachten und die thermische Entkopplungstemperatur berechnen, um dann im dritten Abschnitt die Masse der kleinsten gravitativ gebundenen DM-Halos bestimmen zu können.

4.1 Reliktdichte und Kopplungskonstante

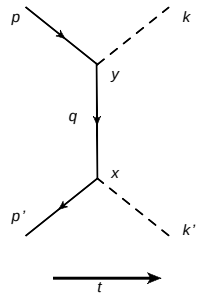
Nachfolgend werden wir die Kopplungskonstante der DM-Teilchen mit ihren Wechselwirkungsteilchen anhand der Reliktdichte bestimmen. Dazu werden wir zunächst die Matrixelemente aller Annihilationskanäle aufstellen um dann den Wirkungsquerschnitt zu berechnen, welcher die bestimmende Größe für die Reliktdichte (2.71) ist.

4.1.1 Matrixelemente

Feynman-Regeln

Wie in Kapitel 3 beschrieben wurde, legen wir für das hier diskutierte Modell die Yukawa-Theorie zugrunde, die eine der einfachsten Standardwechselwirkungen der Quantenfeldtheorie darstellt. Wir können daher die Feynman-Regeln aus [41] für die Wechselwirkung mit skalaren Bosonen benutzen. Um jedoch die Standard-Feynman-Regeln der Yukawa-Theorie auch auf pseudoskalare Wechselwirkungsteilchen zu erweitern, werden wir hier von der Streumatrix (S-Matrix) ausgehen und die Zwischenschritte von den Wick-Kontraktionen in der S-Matrix bis zu den Feynman-Graphen skizzieren und anschließend die erweiterten Feynman-Regeln benutzen (Den Startpunkt bei der S-Matrix zu setzen ist insbesondere auch nützlich, um Klarheit über die relativen Vorzeichen zwischen zwei Matrixelementen zu bekommen). Wir starten also bei der S-Matrix (und halten uns im Folgenden an die Notation von [41])

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 ... \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T\left(H_I(t_1)...H_I(t_n)\right), \tag{4.1}$$



$$= \langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k'} | (-ig^a_\chi) \int d^4x \phi_a \bar{\psi}\gamma^5\psi \ (-ig^a_\chi) \int d^4y \phi_a \bar{\psi}\gamma^5\psi \ | \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p'} \rangle$$

Abbildung 4.1: Feynman-Diagramm der Annihilation zweier DM-Teilchen in Wechselwirkungsbosonen (hier speziell zweier pseudoskalarer Teilchen im t-Kanal). Zusätzlich ist hier die Zeitrichtung gezeigt, die für dieses und alle folgenden Feynman-Diagramme nach rechts geht.

und interessieren uns im Folgenden für Prozesse zweiter Ordnung. Die relevanten Beiträge zur S-Matrix kommen vom Term $H_I^{(2)}$

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{1}{2!} T \Bigg(\int d^4x \left((-ig^s_\chi) : \bar{\psi}\psi\phi_s : + (-ig^a_\chi) : \bar{\psi}\gamma^5\psi \ \phi_a : \right) \\ &\qquad \int d^4y \left((-ig^s_\chi) : \bar{\psi}\psi\phi_s : + (-ig^a_\chi) : \bar{\psi}\gamma^5\psi \ \phi_p : \right) \Bigg) \\ &= \frac{(-ig^s_\chi)^2}{2!} T \left(\int d^4x : \bar{\psi}\psi\phi_s : \quad \int d^4y : \bar{\psi}\psi\phi_s : \right) \\ &\quad + (-g^s_\chi g^a_\chi) T \left(\int d^4x : \bar{\psi}\psi\phi_s : \quad \int d^4y : \bar{\psi}\gamma^5\psi \ \phi_a : \right) \\ &\quad + \frac{(-ig^a_\chi)^2}{2!} T \left(\int d^4x : \bar{\psi}\gamma^5\psi \ \phi_a : \quad \int d^4y : \bar{\psi}\gamma^5\psi \ \phi_a : \right), \end{aligned} \tag{4.2}$$

wobei T das zeitgeordnete Produkt bezeichnet. Betrachten wir jetzt beispielhaft die Annihilation der DM-Teilchen in zwei pseudosklare Wechselwirkungsteilchen. Es treten dabei zwei topologisch unterschiedliche Beiträge zur Annihilation auf (Abb. 4.1 und 4.2), von denen wir hier einen auswählen. Abb. 4.1 zeigt den Feynman-Graphen mit dem entsprechenden Beitrag der S-Matrix.

Werten wir die Wick-Kontraktionen der Reihe nach aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &- (g^a_\chi)^2 \int d^4x \int d^4y e^{ik'x} \bar{v}(p')\gamma^5 e^{-ip'x} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2} e^{-iq(x-y)} \gamma^5 e^{iky} u(p) e^{-ipy} \\ &= -(g^a_\chi)^2 \ \bar{v}(p')\gamma^5 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2} \gamma^5 u(p) \ (2\pi)^4 \delta^4(k' - p' - q) \ (2\pi)^4 \delta^4(k - p + q) \\ &= -(g^a_\chi)^2 \ (2\pi)^4 \bar{v}(p')\gamma^5 \frac{i(\not{p} - \not{k} + m)}{(p-k)^2 - m^2} \gamma^5 u(p) \ \delta^4(k' - p' - k + p). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Man erkennt, dass der Ausdruck die Form $-i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p)$ annimmt, mit

$$\mathcal{M}_t^{\bar{\chi}\chi \to \phi_p \phi_p} = \frac{(g^a_\chi)^2}{(p-k)^2 - m^2} \ \bar{v}(p')\gamma^5(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^5 u(p) \tag{4.4}$$

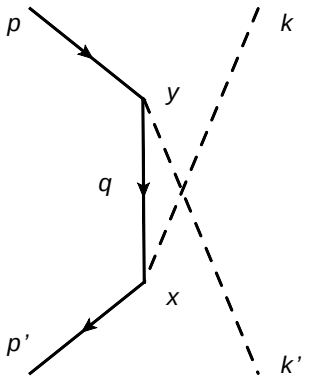


Abbildung 4.2: Zweiter Beitrag zur Annihilation $\bar{\chi}\chi \to \phi\phi$

(der Index t bezieht sich dabei auf die in Anhang B definierten Mandelstam-Variablen. Wir werden im Folgenden die Matrixelemente immer bezüglich ihrer zugehörigen Mandelstam-Variablen indizieren). Hieraus können wir jetzt die Standard-Feynman-Regeln der Yukawa-Theorie auf pseudoskalare Wechselwirkungsteilchen ergänzen, indem wir die γ^5-Matrix in die Vertexfaktoren ziehen und sagen, dass jeder pseudoskalare Vertexfaktor durch $-ig^a_\chi\gamma^5$ gegeben ist.

Stellen wir im Folgenden nun alle relevanten Matrixelemente zur Annihilation der DM-Teilchen auf.
Wir fahren fort mit der Annihilation in pseudoskalare Wechselwirkungsteilchen. Der zweite, topologisch unterschiedliche Beitrag zur Annihilation ist in Abb. 4.2 gezeigt.

Der Feynman-Graph aus Abb. 4.2 unterscheidet sich lediglich durch das Vertauschen der beiden auslaufenden Wechselwirkungsteilchen vom ersten. Ersetzt man daher
$e^{ik'x} \to e^{ikx}$ und $e^{iky} \to e^{ik'y}$ in (4.3), so gelangt man zum Matrixelement

$$\mathcal{M}_u^{\bar{\chi}\chi\to\phi_p\phi_p} = \frac{(g^a_\chi)^2}{(p-k')^2 - m^2}\ \bar{v}(p')\gamma^5(\not{p} - \not{k}' + m)\gamma^5 u(p). \tag{4.5}$$

Die Matrixelemente der Annihilation in zwei skalare Wechselwirkungsbosonen unterscheiden sich von den pseudoskalaren gemäß der Feynman-Regeln nur durch die γ^5-Matrix im Vertexfaktor. Daher erhält man für den skalaren Fall

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_t^{\bar{\chi}\chi\to\phi_s\phi_s} &= \frac{(g^s_\chi)^2}{(p-k)^2 - m^2}\ \bar{v}(p')(\not{p} - \not{k} + m)u(p)\\ \mathcal{M}_u^{\bar{\chi}\chi\to\phi_s\phi_s} &= \frac{(g^s_\chi)^2}{(p-k')^2 - m^2}\ \bar{v}(p')(\not{p} - \not{k}' + m)u(p).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Entsprechend erhält man für den Fall der Annihilation in ein skalares und ein pseudoskalares Teilchen (welcher laut den Überlegungen in Kapitel 3 der

dominante Fall ist) die Matrixelemente

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_t^{\bar{\chi}\chi\to\phi_s\phi_p} &= \frac{g_\chi^s g_\chi^a}{(p-k)^2-m^2}\ \bar{v}(p')\gamma^5(\not{p}-\not{k}+m)u(p)\\ \mathcal{M}_u^{\bar{\chi}\chi\to\phi_s\phi_p} &= \frac{g_\chi^s g_\chi^a}{(p-k')^2-m^2}\ \bar{v}(p')(\not{p}-\not{k}'+m)\gamma^5 u(p),\end{aligned} \tag{4.7}$$

wobei das skalare Teilchen den Impuls k und das pseudoskalare Teilchen den Impuls k' hat. Es stellt sich nun die Frage, ob die Matrixelemente addiert oder subtrahiert werden müssen. Da wir von der Streumatrix ausgegangen sind, ist dies leicht einzusehen. Betrachtet man Abb. (4.1), so sieht man, dass die Matrixelemente addiert werden müssen, da keine (ungerade Anzahl von) Transposition(en) notwendig ist, um die Fermion-Operatoren auf Normalordnung zu bringen, sondern lediglich eine Transposition der Boson Operatoren.
Wir benutzen des Weiteren die Mandelstam-Variablen aus Anhang B und nehmen eine weitere Vereinfachung vor, indem wir die Dirac-Gleichung $(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) = 0$ mit dem Ansatz der ebenen Wellen, $\psi(x) = u(x)e^{-ipx}$, verwenden und daraus $\not{p}u(p) = mu(p)$ erhalten. Damit ergeben sich insgesamt die Matrixelemente zu

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{s,s} &= \mathcal{M}_t^{\bar{\chi}\chi\to\phi_s\phi_s} + \mathcal{M}_u^{\bar{\chi}\chi\to\phi_s\phi_s}\\ &= \frac{(g_\chi^s)^2}{(t-m_\chi^2)(u-m_\chi^2)}\bar{v}(p')\Gamma^{s,s}u(p),\end{aligned} \tag{4.8}$$

mit $\Gamma^{s,s} = \Big((u-m_\chi^2)\,(-\not{k}+2m_\chi) + (t-m_\chi^2)\,\Big(-\not{k}'+2m_\chi\Big)\Big)$ und

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{p,p} &= \mathcal{M}_t^{\bar{\chi}\chi\to\phi_p\phi_p} + \mathcal{M}_u^{\bar{\chi}\chi\to\phi_p\phi_p}\\ &= \frac{(g_\chi^a)^2}{(t-m^2)(u-m^2)}\ \bar{v}(p')\ \Gamma^{p,p}\ u(p)\end{aligned} \tag{4.9}$$

mit $\Gamma^{p,p} = \big((t-m^2)\ \not{k}' + (u-m^2)\ \not{k}\big)$, wobei die Antikommutativität der γ^5-Matrix, $\{\gamma^5,\gamma^\mu\} = 0$, und $(\gamma^5)^2 = 1$ benutzt wurde. Für den gemischten Endzustand erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{s,p} &= \mathcal{M}_t^{\bar{\chi}\chi\to\phi_p\phi_s} + \mathcal{M}_u^{\bar{\chi}\chi\to\phi_s\phi_p}\\ &= \frac{g_\chi^s g_\chi^a}{(t-m^2)(u-m^2)}\ \bar{v}(p')\Gamma^{s,p}u(p)\end{aligned} \tag{4.10}$$

mit $\Gamma^{s,p} = \big((u-m^2)(-\gamma^5\not{k}' + 2\gamma^5 m) + (t-m^2)(\gamma^5\not{k})\big)$.

Als Nächstes werden die Matrixelemente quadriert und da wir keine polarisierten Ströme betrachten, müssen wir über die Spins der einlaufenden Teilchen mitteln und über die Spins der auslaufenden Teilchen summieren. Das quadrierte Matrixelement hat damit allgemein die Form

$$\begin{aligned}|\bar{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{g^4}{4\left((t-m_\chi^2)(u-m_\chi^2)\right)^2}\sum_{\text{alle Spins}}\Big[\bar{v}(p')\Gamma u(p)\Big]\Big[\bar{v}(p')\Gamma u(p)\Big]^*\\ &= \frac{g^4}{4\left((t-m_\chi^2)(u-m_\chi^2)\right)^2}Tr[\Gamma(\not{p}+m_\chi)\bar{\Gamma}(\not{p}'-m_\chi)],\end{aligned} \tag{4.11}$$

wobei "Casimirs Trick" verwendet wurde ([43, 44]),

$$\begin{aligned}\sum_{\text{alle Spins}} [\bar{v}(i)\Gamma_1 u(j)][\bar{v}(i)\Gamma_2 u(j)]^* &= \sum_{\text{alle Spins}} [\bar{v}(i)\Gamma_1 u(j)][\bar{u}(j)\bar{\Gamma}_2 v(i)] \\ &= Tr[\Gamma_1(\not{p}_j + m)\bar{\Gamma}_2(\not{p}_i - m)]\end{aligned} \tag{4.12}$$

(mit $\bar{\Gamma}_2 = \gamma^0\Gamma_2^\dagger\gamma^0$) und der Faktor $\frac{1}{4}$ hinzugefügt wurde, um den Mittelwert der Spins im Anfangszustand zu berechnen (Die Nummerierungen i und j bezeichnen dabei die Impulse der Teilchen und sind in diesem Fall gegeben durch $i \hat{=} p'$ und $j \hat{=} p$).

Wir wählen nun eine unitäre Darstellung der Gamma Matrizen, so dass gilt $\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu$, dann ist $\gamma^0(\not{p}_i)^\dagger\gamma^0 = (p_i)_\mu\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \not{p}_i$ (wobei der Index i hier die Impulse p, p', k, und k' durchnummeriert) und damit folgt $\bar{\Gamma}^{s,s} = \Gamma^{s,s}$ und $\bar{\Gamma}^{p,p} = \Gamma^{p,p}$. Für die gemischten Endzustände gilt allerdings $\gamma^0(\gamma^5)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^5$ und $\gamma^0(\gamma^5\not{p}_i)^\dagger\gamma^0 = (p_i)_\mu\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^5\gamma^0 = \gamma^5\not{p}_i$. Damit folgt

$$\bar{\Gamma}^{s,p} = \left((u-m^2)(-\gamma^5\not{k}' - 2\gamma^5 m) + (t-m^2)(\gamma^5\not{k})\right). \tag{4.13}$$

Mit den bekannten Spurtheoremen ([43, 44, 41]) können somit alle Matrixelemente berechnet werden.

4.1.2 Reliktdichte

Wir werden in diesem Abschnitt die Festlegung der Kopplungskonstante durch die Berechnung der Reliktdichte illustrieren. Dazu werden wir den Überlegungen aus Kapitel 3.2 folgen und $g_\chi^s = g_\chi^a$ setzen. Mathematisch gesprochen, ist die in den Matrixelementen (4.11) dann auftauchende Kopplungskonstante g_χ^4 in (B.48) und damit in (2.62) nur *ein* multiplikativer Faktor. Als unabhängige Variable lässt sie sich somit aus den Berechnungen herausziehen $\langle\sigma v\rangle \equiv g_\chi^4 \langle\tilde{\sigma} v\rangle$, wobei $\tilde{\sigma}$ den Wirkungsquerschnitt ohne Kopplungskonstante bezeichnet. Die von der Kopplungskonstanten unabhängige Reliktdichte ist daher $\tilde{Y}_\infty = g_\chi^4 Y_\infty$. Man gelangt dann zu einem Ausdruck für die Kopplungskonstante, wenn man fordert, dass die Reliktdichte (2.71) gerade den Wert der nichtbaryonischen Dunklen Materie annimmt: $\Omega_{\text{nbm}} \stackrel{!}{=} 2\frac{g_\chi^{-4}\tilde{Y}_\infty s_0 m_\chi}{\rho_{\text{crit}}}$. Dies führt auf

$$g_\chi = \left(\frac{\tilde{\Omega}_\chi h^2}{\Omega_{\text{nbm}} h^2}\right)^{1/4} \tag{4.14}$$

mit $\tilde{\Omega}_\chi = 2\frac{\tilde{Y}_\infty s_0 m_\chi}{\rho_{\text{crit}}}$. Würde man nicht $g_\chi^s = g_\chi^a$ voraussetzen, dann ließen sich die Kopplungsterme $(g_\chi^a)^4$, $(g_\chi^s)^4$ und $(g_\chi^a g_\chi^s)^2$ nicht aus den Matrixelementen ausklammern, so dass prinzipiell eine iterative Berechnung der Kopplungskonstanten notwendig wäre. Wie jedoch auch schon in Abschnitt 3.2 beschrieben wurde dominiert der Prozess $\bar{\chi}\chi \to \phi_s\phi_a$ den Wirkungsquerschnitt, so dass für die Kopplungskonstante (4.3) in guter Näherung gilt $g_\chi^2 \approx g_\chi^s g_\chi^a$.

Die Kopplungskonstante, die sich aus diesen Betrachtungen durch das numerische Lösen der Boltzmann-Gleichung (2.67) ergibt, ist für ein Massenspektrum

von $m_\chi = 100$ GeV bis $m_\chi = 5$ TeV sowohl für den Fall mit Sommerfeld-Effekt (rot), für den Fall ohne Sommerfeld-Effekt (blau) als auch für den Fall mit Sommerfeld-Effekt, bei dem die Reaktionen $\bar{\chi}\chi \to \phi_s\phi_s$ und $\bar{\chi}\chi \to \phi_a\phi_a$ vernachlässigt wurden (grün), in Abbildung (4.3) gezeigt.

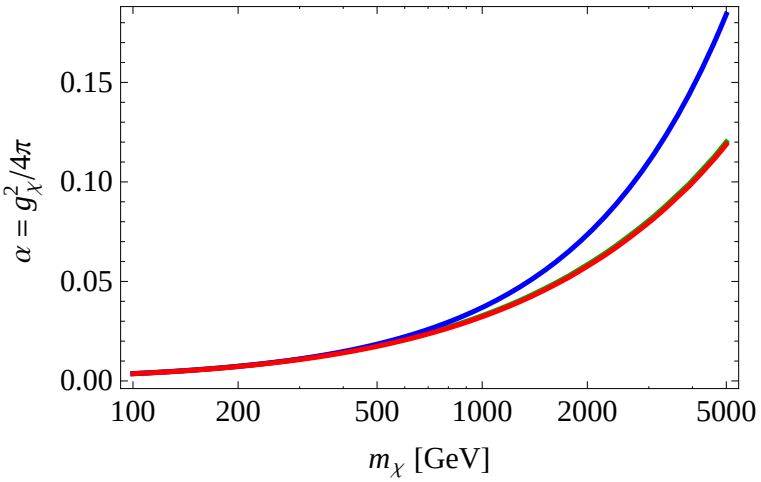


Abbildung 4.3: Numerische Lösungen der Boltzmann-Gleichung (2.67) für ein Massenspektrum von $m_\chi = 100$ GeV bis $m_\chi = 5$ TeV. Bei der roten Kurve wurde der Sommerfeld-Effekt berücksichtigt und bei der blauen nicht.

Wie zu erwarten war, ist ohne den Sommerfeld-Effekt eine größere Kopplungskonstante notwendig, um die richtige Reliktdichte zu erhalten, auch wenn der Sommerfeld-Effekt im frühen Universum aufgrund der hohen Relativgeschwindigkeiten der DM-Teilchen insgesamt nur einen kleinen Beitrag liefert. Es ist des Weiteren gut zu erkennen, dass die Kurven für den Sommerfeld-Effekt, die alle Annihilationsterme beinhalten (rot) und nur den Annihilationsterm der Reaktion $\bar{\chi}\chi \to \phi_a\phi_s$ beinhalten (grün) nahezu deckungsgleich sind, was die beschriebene Näherung $\alpha \approx g_\chi^s g_\chi^a/4\pi$ rechtfertigt.

Wie sich numerisch zeigt, ist das Ergebnis in Abb. 4.3 unabhängig von der Masse der Wechselwirkungsbosonen m_ϕ. Während dies für den Fall ohne Sommerfeld-Effekt nicht weiter überraschend ist, bedarf es beim Sommerfeld-Effekt jedoch einer Erklärung da, wie in Abschnitt 3.2.2 erwähnt wurde, für bestimmte Massen Resonanzen auftreten können.

Wir betrachten dazu den Sommerfeld-Faktor in Abhängigkeit von der Masse m_ϕ für unterschiedliche Geschwindigkeiten, siehe Abb. 4.4 und Abb. 4.5.

Wie man erkennt, ist der SF für große Geschwindigkeiten näherungsweise unabhängig von m_ϕ und m_χ. Für kleine Geschwindigkeiten treten jedoch Resonanzen auf. Betrachtet man jetzt jedoch (2.62), so sieht man, dass der SF im Integral mit der Funktion $\sigma(s - 4m_\chi^2)\sqrt{s}\ \mathrm{K}_1(m/T)$ "gewichtet" wird. Diese Funktion bewirkt gerade eine exponentielle Unterdrückung bei kleinen Geschwindigkeiten (siehe Abb. 4.6), was dann dazu führt, dass der effektive SF, der in (2.62) hereinspielt, unabhängig ist von m_χ und m_ϕ so dass die Masse des Wech-

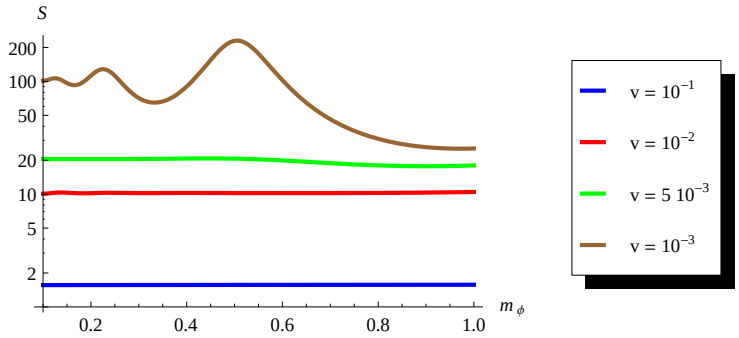


Abbildung 4.4: SF als Funktion der Wechselwirkungsbosonenmasse m_ϕ in einem Spektrum von 100 MeV bis 1 GeV mit $m_\chi = 100$ GeV.

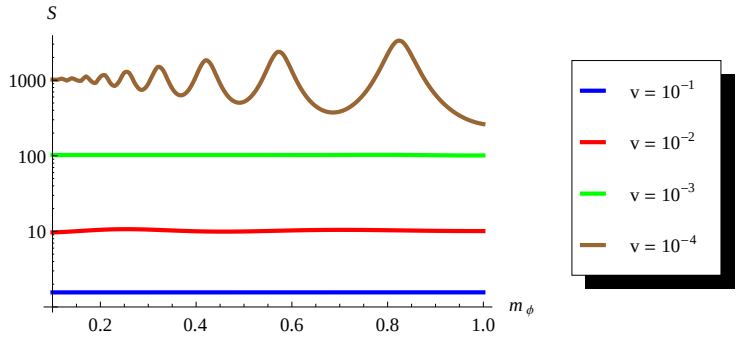


Abbildung 4.5: SF als Funktion der Wechselwirkungsbosonenmasse m_ϕ in einem Spektrum von 100 MeV bis 1 GeV mit $m_\chi = 1000$ GeV.

selwirkungsbosons keinen Einfluss auf die chemische Entkopplung hat. Da der resonante Einfluss der Teilchenmassen m_χ und m_ϕ durch die exponentielle Unterdrückung kleiner Teilchengeschwindigkeiten im frühen Universum verschwindet, erhält man somit das gleiche Ergebnis wie für den von den Massen unabhängigen, analytischen Ausdruck (3.24).

4.2 Thermische Entkopplung

Wir werden in den folgenden beiden Abschnitten die thermische Entkopplung der DM-Teilchen aus dem Wärmebad betrachten. Dazu werden zunächst die beiden relevanten Prozesse der Streuung von DM-Teilchen an Standardmodell-Teilchen des Wärmebads sowie die Streuung von DM-Teilchen an Wechselwirkungsbosonen betrachtet.

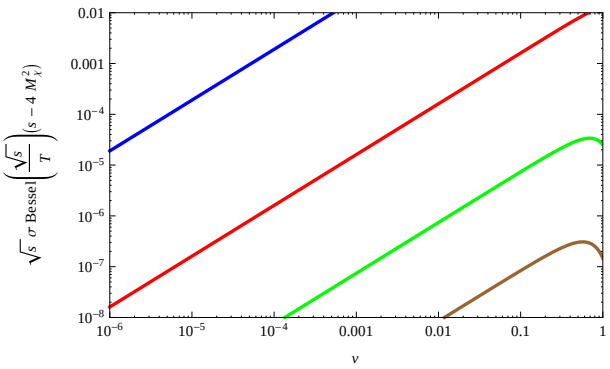


Abbildung 4.6: "Gewichtungsfunktion" des SFs bei der thermischen Mittelung. Dabei steht blau für eine Temperatur von $T = 1000$ GeV, rot für $T = 40$ GeV, grün für $T = 20$ GeV und braun für $T = 14$ GeV. $m_\phi = 500$ MeV, $m_\chi = 1$ TeV.

4.2.1 Streuung von Dunkle-Materie-Teilchen an Standardmodell-Teilchen

Für die Streuung eines DM-Teilchens χ mit einem SM-Teilchen ℓ existiert nur der t-Kanal (siehe Abb. 4.7). Wir betrachten zunächst den Fall eines skalaren Wechselwirkungsteilchens. Das Matrixelement ist in dem Fall gegeben durch

$$\mathcal{M}^s = -\frac{g_\ell^s\ g_\chi^s}{(p-p')^2 - m_\phi^2}\left[\bar{u}(p')\ u(p)\right]\left[\bar{u}(k')\ u(k)\right] \tag{4.15}$$

$$|\bar{\mathcal{M}^s}|^2 = \frac{1}{4}\frac{(g_\ell^s)^2\ (g_\chi^s)^2}{(t-m_\phi^2)^2} Tr\left[(\not{p}+m_\chi)(\not{p}'+m_\chi)\right] Tr\left[(\not{k}+m_\ell)(\not{k}'+m_\ell)\right] \tag{4.16}$$

Es "überleben" nur die Terme die Spur mit gerader Potenz der Gamma-Matrizen und mit $Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$ gelangen wir zu

$$\begin{aligned} |\bar{\mathcal{M}^s}|^2 &= \frac{1}{4}\frac{(g_\ell^s)^2\ (g_\chi^s)^2}{(t-m_\phi^2)^2} Tr\left[\not{p}\,\not{p}' + m_\chi^2\right] Tr\left[(\not{k}\,\not{k}' + m_\ell^2\right] \\ &= \frac{(g_\ell^s)^2\ (g_\chi^s)^2}{(t-m_\phi^2)^2}\ \left(4m_\chi^2 - t\right)\left(4m_\ell^2 - t\right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Es muss des Weiteren die Streuung vom DM-Teilchen mit den SM Antiteilchen berücksichtigt werden, d.h. $\chi + \bar{\ell}$. Streuungen der DM Antiteilchen ($\bar{\chi} + \ell$ und $\bar{\chi} + \bar{\ell}$) brauchen wir hier nicht zu berücksichtigen, da die Entkopplungen gemäß der Boltzmann-Gleichung unabhängig voneinander sind. Die Streuung von DM-Teilchen an SM Antiteilchen liefert jedoch das gleiche Matrixelement wie für die Streuung SM-Teilchen, was unmittelbar aus der CP-Invarianz der Theorie folgt, sich direkt aber auch folgendermaßen einsehen lässt: Betrachtet man die Streuung mit einem Antiteilchen, so tritt im Matrixelement (4.15) ein Term der Art $[\bar{v}(k)\ v(k')]$ auf. Dies führt in (4.16) dann auf Spuren der Form

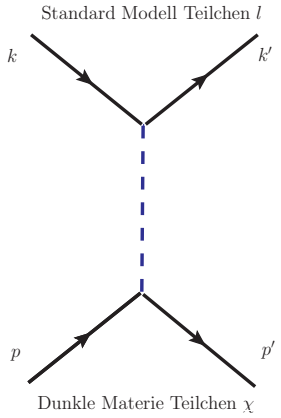


Abbildung 4.7: Streuprozess von DM-Teilchen an SM-Teilchen.

$Tr\left[(\not{k}' - m)(\not{k} - m)\right]$. Da aber nur gerade Potenzen der Gamma-Matrizen die Spurbildung "überleben" (und das Skalarprodukt kommutativ ist), führen letztendlich auch Streuungen, die Antiteilchen beinhalten auf (4.17).

Analog berechnet man das Matrixelement für den Fall eines pseudoskalaren Propagators: Es ist

$$\mathcal{M}^a = -\frac{g_\ell^a \; g_\chi^a}{(p-p')^2 - m_\phi^2} \left[\bar{u}(p')\; \gamma^5 \; u(p)\right] \left[\bar{u}(k')\; \gamma^5 \; u(k)\right] \tag{4.18}$$

und damit

$$\begin{aligned} |\bar{\mathcal{M}^a}|^2 = \frac{1}{4} \frac{(g_\ell^a)^2 \; (g_\chi^a)^2}{(t-m_\phi^2)^2} \; & Tr\left[\gamma^5(\not{p} + m_\chi)(-\gamma^5)(\not{p}' + m_\chi)\right] \\ & \times Tr\left[\gamma^5(\not{k} + m_\ell)(-\gamma^5)(\not{k}' + m_\ell)\right]. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Mit $Tr\left[\gamma^5(\not{P} + m_\chi)(-\gamma^5)(\not{P}' + m_\chi)\right] = 4(P \cdot P' - m_\chi^2)$ gelangt man dann zu

$$|\bar{\mathcal{M}^a}|^2 = \frac{(g_\ell^a)^2 \; (g_\chi^a)^2}{(t-m_\phi^2)^2} \; t^2, \tag{4.20}$$

d.h. das Matrixelement verschwindet für $t = 0$. Im Falle streuender Antiteilchen würde sich hier ebenfalls nichts ändern. Es würden lediglich in den Spuren in (4.19) Minuszeichen vor den Massen auftauchen, die mit der Spurbildung dann aber wieder verschwinden würden.

Das gesamte Matrixelement bei verschwindendem Impulsübertrag ist damit

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2_{t=0} = 32 \; (g_\ell^s)^2 \; (g_\chi^s)^2 \; \frac{m_\chi^2 m_\ell^2}{m_\phi^4}. \tag{4.21}$$

Wie wir bereits in Abschnitt 3.2 angemerkt haben, findet die kinetische Entkopplung in aller Regel nach dem QCD-Phasenübergang statt (weshalb wir u.a. auch die Kopplung an Quarks vernachlässigt haben), d.h. in der von Leptonen dominierten Ära des Universums. Wir können daher davon ausgehen, dass zur Zeit der kinetischen Entkopplung die Elektronen und Myonen das Wärmebad dominieren (was sich für einen großen Bereich des Parameterraumes auch als gute Näherung herausstellen wird). Dann ist der Kollisionsterm

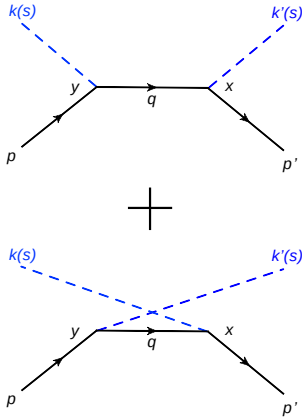
$$c(T) = \sum_{alle SM} \frac{g_{\mathrm{SM}}}{6(2\pi)^3 T m_\chi^4} \int d\omega \ \left(m_{\mathrm{SM}}^2 - \omega^2\right)^2 |\mathcal{M}|^2_{\substack{t=0 \\ \theta=\pi/2}} g^{\pm}(1 \mp g^{\pm})(\omega) \quad (4.22)$$

aus (2.78) gegeben durch

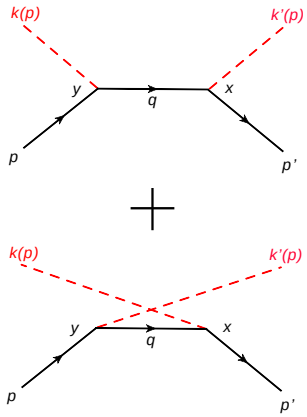
$$\begin{aligned} c(T) = \frac{32\ (g_\ell^s)^2\ (g_\chi^s)^2}{6(2\pi)^3 T m_\chi^2 m_\phi^4} \Bigg[& m_e^2 g_e \int_{m_e}^{\infty} d\omega \ \left(m_e^2 - \omega^2\right)^2 \frac{e^{\omega/T}}{(e^{\omega/T}+1)^2} \\ & + m_\mu^2 g_\mu \int_{m_\mu}^{\infty} d\omega \ \left(m_\mu^2 - \omega^2\right)^2 \frac{e^{\omega/T}}{(e^{\omega/T}+1)^2} \Bigg]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

4.2.2 Streuung von Dunkle-Materie-Teilchen an Wechselwirkungsbosonen

Geht man davon aus, dass die kinetische Entkopplung der DM-Teilchen vor der chemischen Entkopplung der Wechselwirkungsteilchen stattfindet, dann müssen ebenfalls Streuungen an letzteren berücksichtigt werden.
Zur Streuung von DM an deren Wechselwirkungsteilchen tragen insgesamt vier Feynman-Graphen bei. Das Matrixelement lässt sich dabei allgemein schreiben als $\mathcal{M}_s + \mathcal{M}_u = \frac{(g_\ell^{s/a})^2}{(s-m_\chi^2)(u-m_\chi^2)} \bar{u}(p')\Gamma^{s/a}u(p)$, wobei $\Gamma^{s/a}$ durch die nachfolgenden Diagramme gegeben ist (s/a meint dabei den Index s oder a).



$$\Gamma^s = \left[(u - m_\chi^2)(\not{k} + 2m_\chi) + (s - m_\chi^2)(-\not{k}' + 2m_\chi)\right]$$



$$\Gamma^a = \left[(u - m_\chi^2)(-\not{k}) + (s - m_\chi^2)(\not{k}')\right]$$

Man erhält daraus für das quadrierte Matrixelement der Streuung an skalaren Teilchen bei $t = 0$

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2_{\substack{t=0 \\ \theta=\pi/2}} = \frac{64\ (g_\chi^s)^4 m_\chi^4 (m_s^2 - \omega^2)^2}{(m_{\phi s}^4 - 4m_\chi^2\omega^2)^2}, \tag{4.24}$$

und für das quadrierte Matixelement der Streuung an pseudoskalaren Teilchen

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2_{\substack{t=0 \\ \theta=\pi/2}} = \frac{64\ (g_\chi^a)^4 m_\chi^4 \omega^4}{(m_a^4 - 4m_\chi^2\omega^2)^2}. \tag{4.25}$$

Wie man sieht, ist (im Fall gleicher Massen) für kleine Energien ω die Streuung am skalaren Teilchen dominant, während für große Energien beide Streuungen den gleichen Beitrag liefern.
Es müssten des Weiteren inelastische Streuprozesse der Diagramme 4.8(a) und 4.8(b) berücksichtigt werden, die jedoch einen anderen Formalismus notwendig machen und die erwartungsgemäß nur einen kleinen Beitrag liefern würden [45] und darum in dieser Arbeit nicht berücksichtigt wurden.

Man erhält daher für das Kollisionsintegral

$$\begin{aligned} c(T) =& \frac{64}{6(2\pi)^3 T} \int d\omega\ \frac{(g_\chi^s)^4 (m_s^2 - \omega^2)^4}{(m_s^4 - 4m_\chi^2\omega^2)^2} \frac{e^{\omega/T}}{(e^{\omega/T} - 1)^2} \\ &+ \frac{64}{6(2\pi)^3 T} \int d\omega\ \frac{(g_\chi^a)^4 \omega^4 (m_a^2 - \omega^2)^2}{(m_a^4 - 4m_\chi^2\omega^2)^2} \frac{e^{\omega/T}}{(e^{\omega/T} - 1)^2}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Bei der Berechnung der kinetischen Entkopplung der DM-Teilchen, sind also allgemein die Streuung an SM-Teilchen wie auch die Streuung an Wechselwirkungsbosonen zu berücksichtigen. Es ist dabei zu beachten, dass die Entkopplungstemperatur nur abhängig ist von g_ℓ^s, nicht jedoch von g_ℓ^a. Für kleine g_ℓ^s ist daher zu erwarten, dass die Streuung der DM-Teilchen an Wechselwirkungsbosonen dominiert, während für große g_ℓ^s die Streuung an SM-Teilchen dominant sein dürfte.

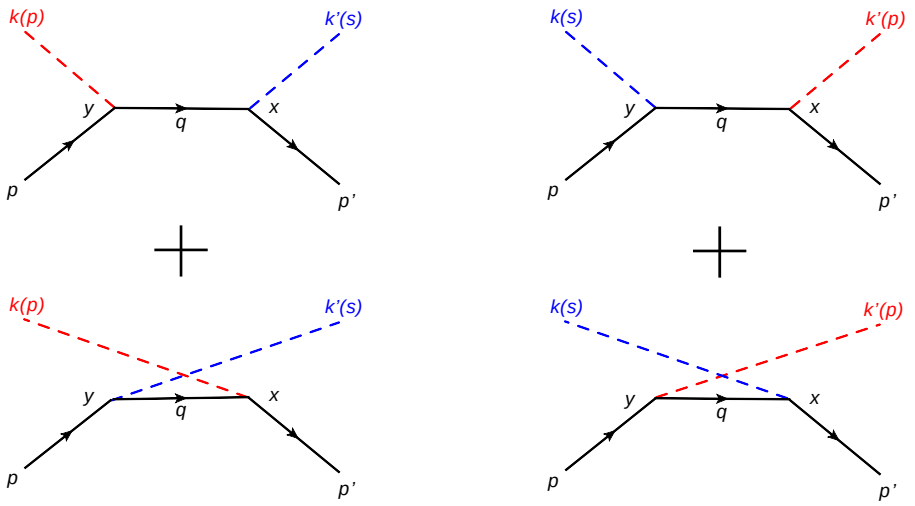


Abbildung 4.8: Inelastische Streuprozesse der DM-Teilchen an den skalaren und pseudoskalaren Teilchen Wechselwirkungsbosonen.

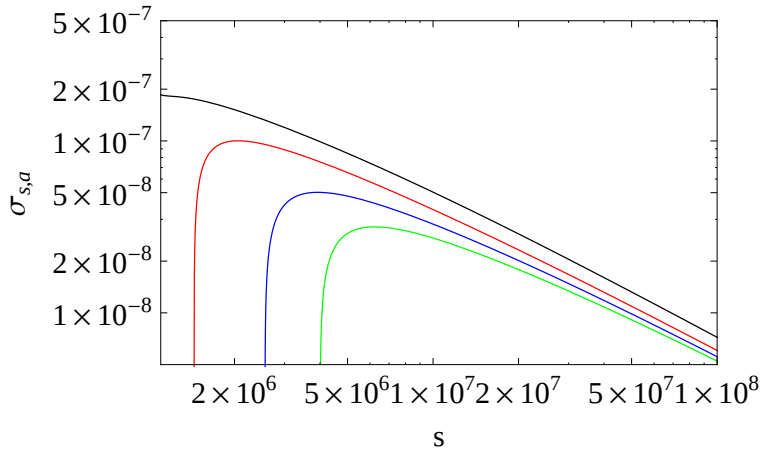


Abbildung 4.9: Wirkungsquerschnitte der Annihilation $\phi_s\phi_a \to \bar{\ell}\ell$ für unterschiedliche Massen der Bosonen, für das Regime von $s = (m_s + m_a)^2$ bis $s = 10(m_s + m_a)^2$. Hierbei wurde $m_s + m_a = \text{konst.} = 1$ GeV gehalten. Die schwarze Linie steht für $m_s = m_a = 500$ MeV, die rote für $m_s = 600$ MeV, $m_a = 400$ MeV, die blaue für $m_s = 800$ MeV, $m_a = 200$ MeV und die grüne für $m_s = 900$ MeV, $m_a = 100$ MeV. Identische Kurven ergeben sich im Fall umgedrehter Massen.

Wie jedoch zu Beginn des Kapitels bereits erwähnt wurde, ist die Voraussetzung für die Streuung der DM-Teilchen an Wechselwirkungsteilchen die, dass diese sich zum Zeitpunkt des kinetischen Entkoppelns noch im Wärmebad befinden. Es

ist daher sinnvoll zunächst die chemische Entkopplungstemperatur der skalaren und pseudoskalaren Wechselwirkungsteilchen zu berechnen. Dafür müssten die gekoppelten Boltzmann-Gleichungen der skalaren und pseudoskalaren Teilchen gelöst werden. Die Matrixelemente sind die inversen Prozesse der Abbildungen 4.1 und 4.2, wobei die Annihilation von zwei skalaren bzw. pseudoskalaren Teilchen jeweils den gleichen Beitrag liefern. Das entscheidende Diagramm, welches die Boltzmann-Gleichungen koppelt und den Prozess dominiert ist das, in dem ein skalares und ein pseudoskalares Teilchen annihilieren. Es kann daher nicht vernachlässigt werden, um die Gleichungen zu entkoppeln. Da wir allerdings nur daran interessiert sind herauszufinden, ob sich die Wechselwirkungsbosonen zum Zeitpunkt der kinetischen Entkopplung noch im Wärmebad befinden, können wir folgende Näherung verwenden: Der Wirkungsquerschnitt der Annihilation $\phi_s\phi_a \to \bar{\ell}\ell$ hat ein Maximum für $m_a = m_s$ (für ein Beispiel siehe Abb. 4.9), d.h. wählt man zwei Werte für m_a und m_s und variiert sie derart, dass die Summe konstant bleibt, $m_a + m_s = const.$, dann erhält man für $m_a = m_s$ den größten Wirkungsquerschnitt und damit die späteste (kleinste) Entkopplungstemperatur. Sollte die kinetische Entkopplungstemperatur im dominanten Streuungsbereich der Wechselwirkungsbosonen bereits unter der chemischen Entkopplungstemperatur der Bosonen für $m_a = m_s$ liegen, dann wird das für $m_a \neq m_s$ erst recht der Fall sein, da dafür die chemische Entkopplungstemperatur noch höher liegt.

Im dem Fall, dass $T^{\chi}_{kd} \ll T^{\phi}_{cd}$ ist, liefert die Streuung von DM-Teilchen an Wechselwirkungsteilchen somit keinen Beitrag und die Entkopplungstemperatur wird allein durch (4.21) bestimmt. Durch die Annahme $m_a = m_s$ wird zudem die Berechnung der chemischen Entkopplungstemperatur der Wechselwirkungsteilchen deutlich leichter, da dann beide Teilchenarten zur gleichen Zeit entkoppeln. Die Berechnung der Matrixelemente ist analog zu denen in Abschnitt 4.1 und wird hier daher nicht nochmals vorgeführt. Bei der Berechnung der chemischen Entkopplungstemperatur ergibt sich jedoch eine numerische Schwierigkeit, da sich die Entkopplung für kleine Kopplungskonstanten ($g_\ell < 10^{-4}$) nicht mehr zuverlässig berechnen lässt. Der Grund dafür liegt in dem QCD-Phasenübergang, wie im gelb markierten Bereich in Abb. 4.10 zu sehen ist. Durch das Entkoppeln der Quarks findet ein abrupter Abfall der effektiven Anzahl der Freiheitsgrade g_{eff} statt, da sich die Quarks zu Hadronen binden (was den in Abb. 4.10 zu sehenden "Hügel“ erzeugt). Bei kleiner werdenden g_ℓ und damit kleiner werdenden Wirkungsquerschnitten wandert die Reliktdichte im Diagramm nach oben (in Abb. 4.10 durch einen Pfeil angedeutet). Bei $g_\ell \lesssim 10^{-4}$ findet die Entkopplung dann zur Zeit des QCD-Phasenübergangs statt, wodurch die Numerik zusammenbricht.

Die in Abb. 4.10 gezeigte Reliktdichte der Wechselwirkungsteilchen verschwindet kurz nachdem die Wechselwirkungsbosonen das chemische Gleichgewicht verlassen haben: Berechnet man die Zerfallsrate der freien Wechselwirkungsbosonen (hier für Pseudoskalare)

$$\Gamma_\phi = \frac{|p|}{8\pi m_\phi^2}|\mathcal{M}|^2 = g_\ell^2 \frac{(m_\phi^2 - 4m_l^2)^{3/2}}{8\pi m_\phi^2} \tag{4.27}$$

und schätzt damit die Lebensdauer ab für $m_\phi \gg m_\ell$ (was für skalare Teilchen denselben Ausdruck liefert),

$$\tau_\phi = \frac{1}{\Gamma_\phi} \sim \left(\frac{1\text{GeV}}{m_\phi}\right) \times \frac{1.6 \times 10^{-23}}{g_\ell^2} \text{ sec}, \tag{4.28}$$

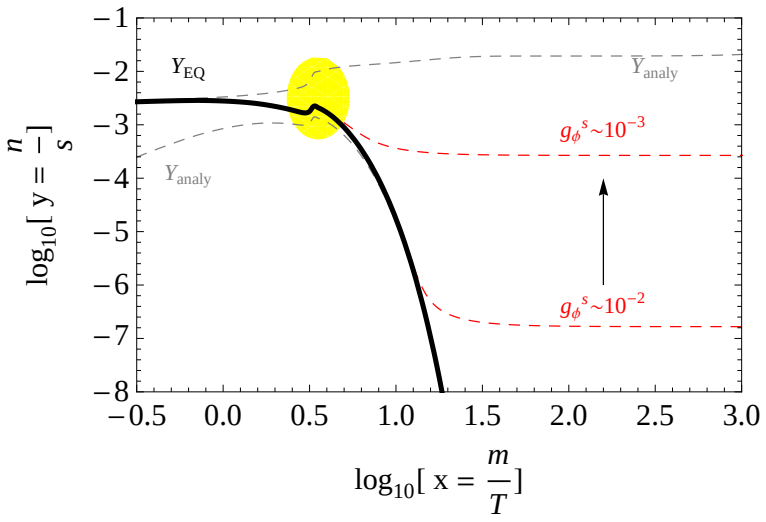


Abbildung 4.10: Es ist die chemische Entkopplung der Wechselwirkungsteilchen ϕ aus dem Gleichgewicht (schwarze Linie) für zwei Wirkungsquerschnitte mit $g_\ell = 10^{-2}$ und $g_\ell = 10^{-3}$ (rote gestrichelte Linien) zu sehen. Im gelb markierten Bereich ist ein "Hügel" erkennbar, der durch den QCD-Phasenübergang erzeugt wird. Es sind zusätzlich noch in grau die analytischen Gleichgewichtslösungen (2.8) und (2.12) gezeigt.

und vergleicht dies mit $H^{-1}(T^s_{cd})$ aus (2.15) um eine Abschätzung zu erhalten wie lange die Wechselwirkungsteilchen nach der chemischen Entkopplung zur Streuung der DM-Teilchen beitragen (wobei der beste Fit von T^s_{cd} gegeben ist durch $T^s_{cd} \approx g_\ell^{-1/5}\sqrt{\frac{m_s}{1\text{ MeV}}}\left(3.6\left(\frac{m_s}{1\text{ MeV}}\right)^{0.045} - 4.3\right) \times 1\text{ MeV}$), dann sieht man mit

$$H^{-1}(T^s_{cd}) \sim \frac{(g^s_\ell)^{2/5}\left(\frac{1\text{GeV}}{m_s}\right)}{\left(1.14\left(\frac{m_s}{1\text{GeV}}\right)^{0.045} - 1\right)^2} \times 5.4 \cdot 10^{-5}\text{sec}, \tag{4.29}$$

dass nach dem Freezeout keine Streuungen von DM-Teilchen mit Wechselwirkungsteilchen mehr stattfinden können (solange $g^s_\ell \gg 10^{-8}$ ist).

4.2.3 Ergebnisse

Löst man die Boltzmann-Gleichung (2.87) unter Berücksichtigung aller Streuprozesse, so zeigt sich, dass die Streuung von DM-Teilchen an Wechselwirkungsteilchen tatsächlich keinen Beitrag liefert, da diese zum Zeitpunkt der kinetischen Entkopplung bereits das Wärmebad verlassen haben. Das Gesamtergebnis für skalare Wechselwirkungsteilchen mit $m_s = 500$ MeV (und pseudoskalaren Wechselwirkungsteilchen, deren Masse in derselben Größenordnung liegt) ist in Abb. 4.11 zu sehen:

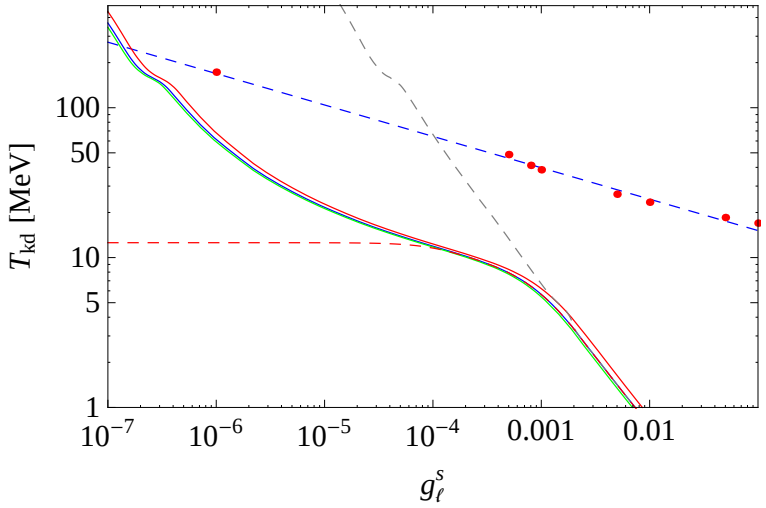


Abbildung 4.11: Kinetische Entkopplungstemperatur der DM-Teilchen, hier für $m_\chi = 5$ TeV (rot), $m_\chi = 1$ TeV (blau), $m_\chi = 100$ GeV (grün) $m_\phi = 500$ MeV.

Die rote, blaue und grüne durchgezogene Linie entsprechen den Entkopplungstemperaturen der DM-Teilchen für $m_\chi = 5$ TeV, $m_\chi = 1$ TeV und $m_\chi = 100$ GeV alleine unter Berücksichtigung der Streuung an SM-Teilchen. Wie man sieht hat die Variation der DM-Masse hier kaum einen Einfluss. Die rote gestrichelte Linie gibt den hypothetischen Verlauf der Entkopplungstemperatur (für $m_\chi = 1$ TeV) an, wenn die Wechselwirkungsbosonen sich zu der Zeit noch im Wärmebad befunden hätten. Es ist dabei klar zu sehen, dass in diesem Fall das erwartete Verhalten eintritt: Bei $g_\ell^s < 10^{-4}$ dominiert die Streuung an Wechselwirkungsteilchen, während für $g_\ell^s > 10^{-4}$ die Streuung an SM-Teilchen dominiert und die Kurve in die blaue durchgezogene Kurve übergeht.
Die chemische Entkopplungstemperatur der Wechselwirkungsteilchen ist mit der blauen gestrichelten Linie angedeutet die, wie zuvor beschrieben, für kleine g_ℓ^s extrapoliert wurde (die roten Punkte bilden entsprechend stabile Lösungen der Boltzmann-Gleichungen [1]). Für sehr kleine Werte von g_ℓ^s schneiden sich die Kurven der kinetischen Entkopplungstemperatur der DM-Teilchen und der chemischen Entkopplungstemperatur der Wechselwirkungsteilchen, was bedeutet, dass sich zu diesem und früheren Zeitpunkten die Wechselwirkungsteilchen noch im chemischen Gleichgewicht befanden und damit die Streuung dominierten. Ab dem Schnittpunkt der Kurven folgt die Entkopplungstemperatur daher für kleiner werdende g_ℓ^s der blau gestrichelten Linie der chemischen Entkopplung der Wechselwirkungsbosonen. Da wir die chemische Entkopplungstemperatur in Bereiche kleiner g_ℓ^s aber nur extrapolieren können, begnügen wir uns daher für $g_\ell^s < 10^{-7}$ mit einer qualitativen Diskussion: Es ist zu beachten, dass für kleiner

[1] Es ist zudem nach mühseligen Anpassungen der Randbedingung der Boltzmann-Gleichung gelungen eine stabile Lösung bei $g_\ell^s = 10^{-6}$ zu erhalten, die den extrapolierten Kurvenverlauf "rechtfertigt". Im Allgemeinen ist es jedoch keine praktikable Möglichkeit die Entkopplungstemperaturen für $g_\ell^s \lesssim 10^{-4}$ zu berechnen.

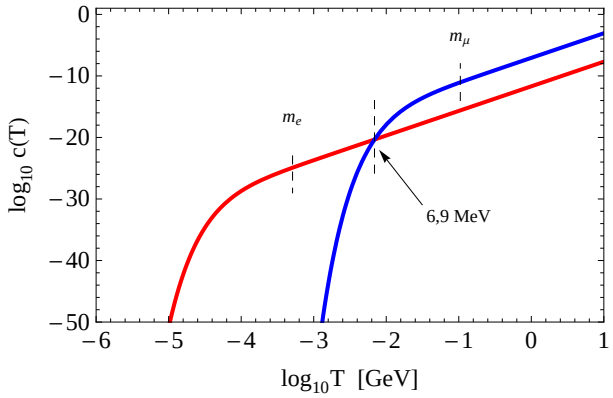
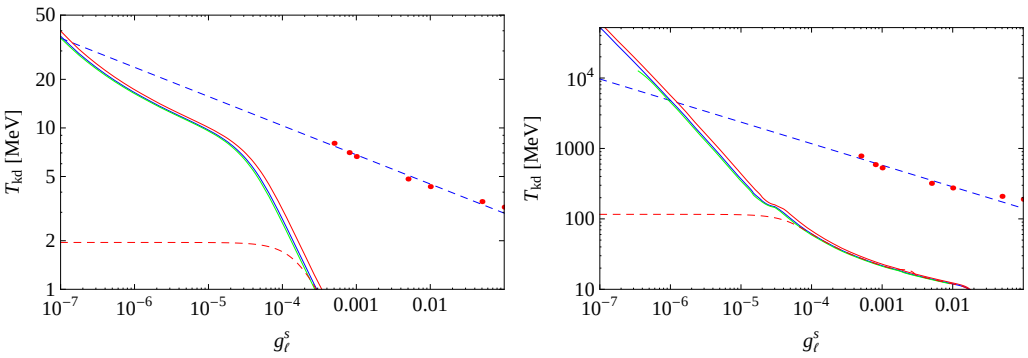


Abbildung 4.12: Vergleich der Beiträge von Elektronen und Myonen zum Kollisionsterm (4.23). Die blaue Linie repräsentiert dabei den Beitrag der Myonen, die rote den der Elektronen. Es ist zu sehen, wie die Myonen für Temperaturen $T > 7$ MeV die Streuprozesse dominieren. Es sind des Weiteren die Punkte in den Kurven mit $T = m_\mu$ bzw. $T = m_e$ markiert.

werdende g_ℓ^s die Entkopplungstemperatur einen Höhepunkt erreicht (der für $m_s = 500$ MeV in der Größenordnung von $g_\ell^s \sim 10^{-9} - 10^{-10}$ liegen sollte) und anschließend bis zur rot gestrichelten Linie abfällt. Dies ist dadurch begründet, dass für kleiner werdende Kopplungen die Lebensdauer der Wechselwirkungsteilchen nach dem chemischen Entkoppeln gemäß (4.28) ansteigt und damit die DM-Teilchen länger an Wechselwirkungsteilchen streuen können.

Es sind zudem noch zwei Auffälligkeiten im Kurvenverlauf der Entkopplungstemperatur zu sehen. Diese beiden "Hügel" treten unabhängig von allen Massen und Kopplungskonstanten auf (siehe Abb. 4.14) und erklären sich folgendermaßen: Der kleinere "Hügel" liegt bei einer Entkopplungstemperatur von $T \sim 150$ MeV und wird erzeugt durch den QCD-Phasenübergang. Der größere "Hügel" hingegen liegt bei $T \sim 7$ MeV und ist dadurch bedingt, dass bei dieser Temperatur die Streuung an Elektronen dominierend wird, weil die Myonen bereits nicht-relativistisch sind und somit exponentiell unterdrückt werden. In Abb. 4.12 sind die einzelnen Beiträge von 4.23 gezeigt. Es ist dabei deutlich zu sehen, dass für kleinere Temperaturen die Streuung an Elektronen dominierend wird. Zusätzlich ist in Abb. 4.11 der hypothetische Verlauf der Entkopplungstemperatur gezeigt, wie er aussehen würde, wenn ausschließlich eine Streuung an Elektronen stattfinden würde (graue gestrichelte Linie).

In Abbildung 4.13(a) und 4.13(b) sind zwei weitere Fälle für Wechselwirkungsteilchen der Massen $m_s = 100$ MeV und $m_s = 5$ GeV gezeigt. Es ist dabei zu sehen, dass die Streuung von DM-Teilchen an Wechselwirkungsteilchen stets in dem betrachteten Intervall der Kopplungskonstanten vernachlässigt werden kann.
In Abb. 4.14 sind schließlich die Ergebnisse der Abbildungen 4.11, 4.13(a) und 4.13(b) zusammengefasst mit weiteren Lösungen der Boltzmann-Gleichung für $m_s = 360$ MeV, $m_s = 800$ MeV und $m_s = 1$ GeV, für jeweils $m_\chi = 100$ GeV (grün), $m_\chi = 1$ TeV (blau) und $m_\chi = 5$ TeV (rot). Für die Zeit, in der die



(a) (b)

Abbildung 4.13: Kinetische Entkopplungstemperatur der DM-Teilchen, für $m_\chi =$ 5 TeV (rot), $m_\chi = 1$ TeV (blau), $m_\chi = 100$ GeV (grün) mit $m_\phi = 100$ MeV in (a) und $m_\phi = 5000$ MeV in (b).

Streuungen der Wechselwirkungsteilchen dominieren wurden zudem die Entkopplungstemperaturen durch die extrapolierten Linien der chemischen Entkopplung ersetzt und die Grenzen aus Kapitel 3.2.1 angewandt (gepunktete Linien).

4.3 Protohalos

Da wir nun die kinetischen Entkopplungstemperaturen der DM-Teilchen bestimmt haben, können wir damit die Massen der kleinsten gravitativ gebundenen DM-Objekte bestimmen wie in Abschnitt 2.5.3 beschrieben wurde.

In Abb. 4.15(a) bis 4.15(f) sind die Cutoff-Massen der kleinsten DM-Halos für alle in Abb. 4.14 gezeigten Massen der Wechselwirkungsteilchen in Abhängigkeit von der Kopplungskonstante g_ℓ^s gezeigt (dabei wurde bereits der "Cut" durch die Wechselwirkungsteilchen berücksichtigt). Die physikalische Cutoff-Masse wird durch das Maximum $M_{\rm cut} = \max[M_{\rm fs}, M_{\rm ao}]$ bestimmt und ist in den Abbildungen als dicke (zweifarbige) durchgezogene Linie zu sehen.

Die Abhängigkeit der Cutoff-Masse M_{cut} von der Masse der DM-Teilchen ist exemplarisch in Abb. 4.16(a) und 4.16(b) zu sehen. Da die Entkopplungstemperatur T_{kd} in guter Näherung unabhängig von der Masse der DM-Teilchen ist, ist das Verhalten von $M_{cut}(m_\chi)$ durch die direkte Massenabhängigkeit von (2.101) und (2.104) gegeben und daher in Bereichen, in denen M_{ao} dominiert konstant und ansonsten für $M_{fs} \sim m_\chi^{-3/2}$.

Wie zuvor schon beschrieben wurde, liefern Bereiche hoher DM-Dichte eine zusätzliche Erhöhung des Annihilations- Wirkungsquerschnittes (siehe Abschnitt 2.5.3) wodurch in unserem Modell ein Spektrum hochenergetischer Leptonen entsteht. Durch Diffusion gehen jedoch alle Informationen über den Ursprung der geladenen Leptonen verloren, so dass daraus kein Rückschluss auf den Ort und

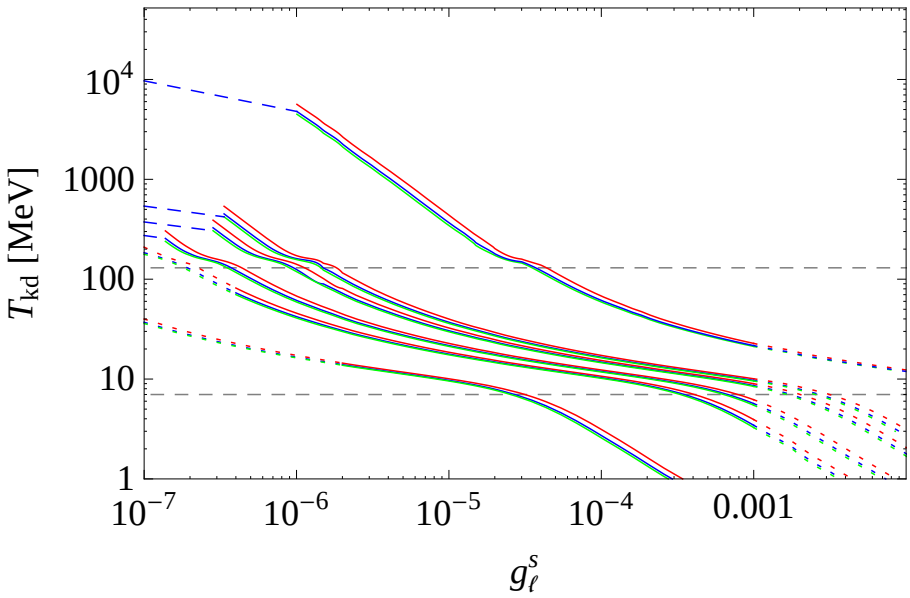


Abbildung 4.14: Zu sehen ist die kinetische Entkopplungstemperatur der DM-Teilchen als Funktion der Kopplungskonstanten g_ℓ^s für Massen des skalaren Wechselwirkungsfeldes $m_s = 100$ MeV, 360 MeV, 500 MeV, 800 MeV, 1000 MeV und 5000 MeV (von unten nach oben gesehen), jeweils wieder für Massen der DM-Teilchen mit $m_\chi = 5$ TeV (rot), $m_\chi = 1$ TeV (blau) und $m_\chi = 100$ GeV (grün). Die gepunkteten Bereiche der Temperaturkurven, geben die Grenzen aus Abschnitt 3.2.1 an. Die blau gestrichelten Linien stellen die Fortführung der Entkopplungstemperatur für den Fall dar, dass sich die Wechselwirkungsteilchen im chemischen Gleichgewicht befinden. Die beiden waagerechten, gestrichelten Linien stellen zum einen den Zeitpunkt dar, ab dem die Elektronen die Streuung dominieren (ab ca. 7 MeV) und zum anderen den Zeitpunkt des QCD-Phasenübergangs.

die Größe von DM-Halos möglich ist. Allerdings werden hochenergetische Leptonen inverse Compton-Streuprozesse mit der kosmischen Hintergrundstrahlung, sowie den Photonen von Sternen und Staub ausführen, so dass charakteristische Gammastrahlung entsteht, die einen nachvollziehbaren Ursprung hat. Man kann daher den hypothetischen Photonenfluss solcher DM-Halos berechnen und mit den bisherigen experimentellen Messergebnissen vergleichen.
Dieser Überlegung folgend haben Pinzke, Pfrommer und Bergström in [17] u.a. für ein leptophiles DM-Modell die Photonenflüsse für die vier Galaxien Haufen Virgo, Fornax, Perseus und Coma berechnet und mit den Limits von Fermi-LAT verglichen. Sie erhalten als Ergebnis, dass insbesondere für den Galaxienhaufen Fornax das von Fermi-LAT gemessene Energiespektrum deutlich unter dem erwarteten Spektrum des DM-Modells liegt. Es wurde dabei von einer typischen Cutoff-Masse der DM-Halos von $10^{-6} M_\odot$ und einem SF von $S = 62.6 \left(\frac{M_{200}}{10^{15} M_\odot}\right)^{-1/3} \approx 135$ (wobei $M_{200} = 10^{14} M_\odot$ ist für Fornax) ausgegan-

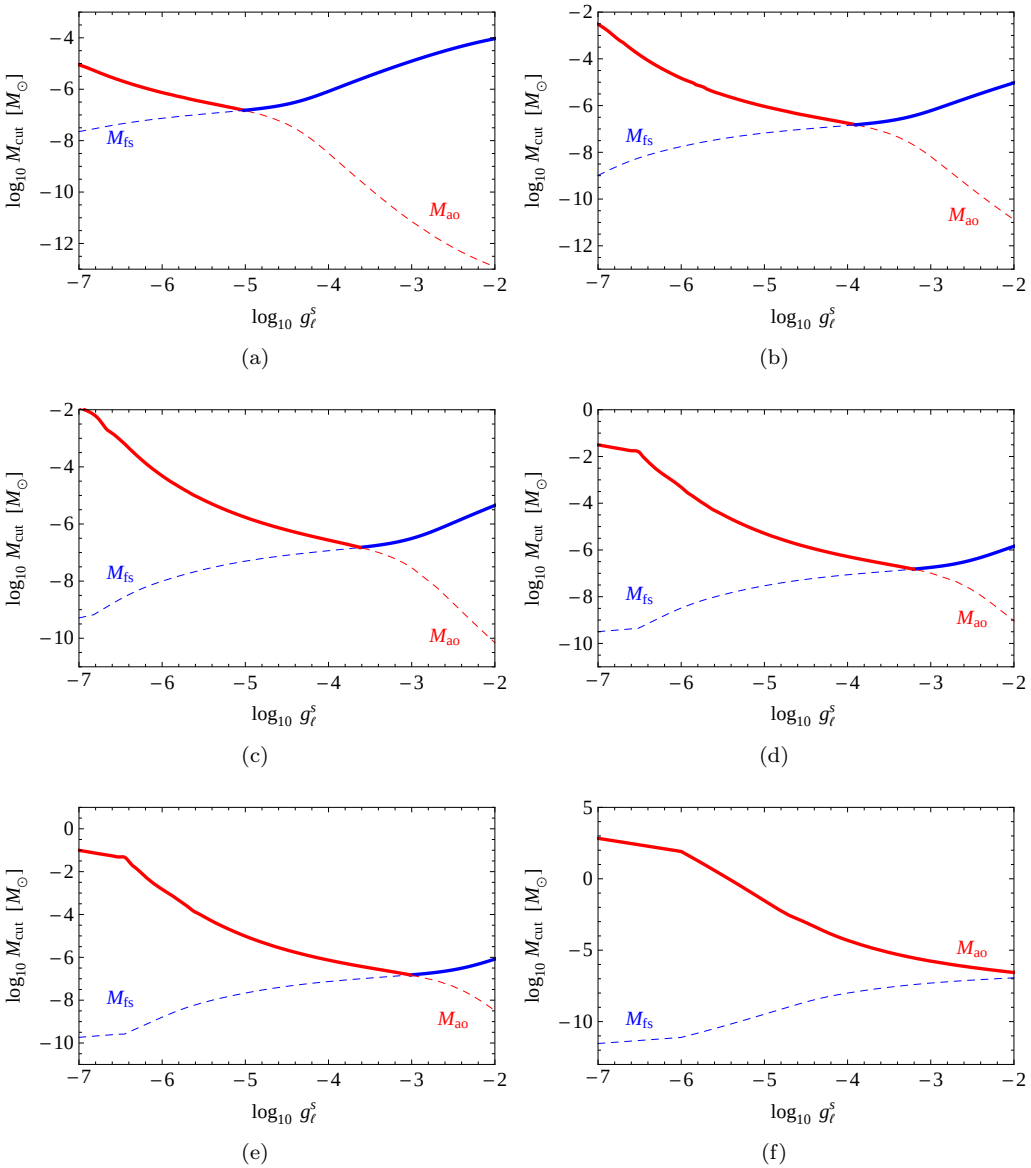
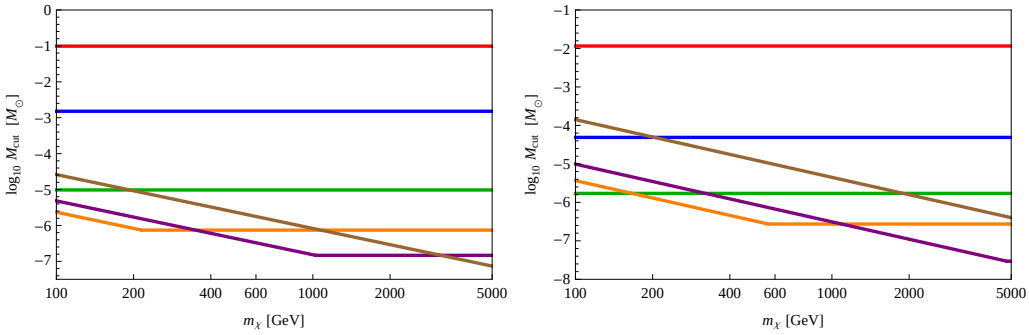


Abbildung 4.15: Cutoff-Massen der kleinsten gravitativ gebundenen DM-Halos in Abhängigkeit der Kopplungskonstante g_ℓ^s . Die rote Kurve gibt die resultierende Cutoff-Masse durch akustische Oszillationen an, während die blaue Kurve die Cutoff-Masse durch das "free streaming" beschreibt (siehe Abschnitt 2.5.3). Die physikalische Cutoff-Masse ist durch das Maximum beider Effekte gegeben, $M_{cut} = \mathrm{Max}(M_{ao}, M_{fs})$, und als dicke Linie gezeigt. Es wurde in (a) $m_s = 100$ MeV, in (b) $m_s = 360$ MeV, in (c) $m_s = 500$ MeV, in (d) $m_s = 800$ MeV, in (e) $m_s = 1000$ MeV und in (f) $m_s = 5000$ MeV verwendet.

gen. Um einen Photonenfluss zu erhalten, der von Fermi nicht ausgeschlossen wurde, argumentieren sie, dass entweder der SF nicht größer werden darf als



(a) (b)

Abbildung 4.16: Gezeigt sind die Cutoff-Massen der DM-Halos als Funktion der DM-Teilchenmasse m_χ für $g_\ell^s = 10^{-7}$ (rot), $g_\ell^s = 10^{-6}$ (blau), $g_\ell^s = 10^{-5}$ (grün), $g_\ell^s = 10^{-4}$ (orange), $g_\ell^s = 10^{-3}$ (lila), $g_\ell^s = 10^{-2}$ (braun). Dabei ist in (a) $m_s = 1000$ Mev gezeigt und in (b) $m_s = 500$ Mev

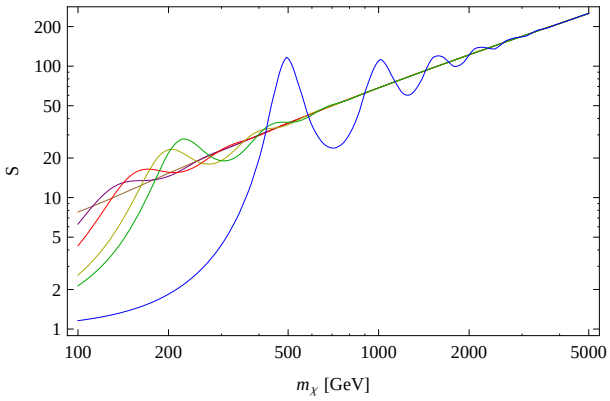


Abbildung 4.17: Gezeigt sind die SFen als Funktion der DM-Teilchenmasse m_χ für die "heutige" Relativgeschwindigkeit $v \approx 0.0015\ c$ der DM-Teilchen im Fornax-Galaxienhaufen aus [17]. Dabei steht die blaue Kurve für $m_s = 5$ GeV, die grüne für $m_s = 1$ GeV, die gelbe für $m_s = 800$ MeV, die rote für $m_s = 500$ MeV, die lilafarbene für $m_s = 360$ MeV und die braune für $m_s = 100$ MeV.

$S = 2$ oder aber dass die Masse der kleinsten DM-Strukturen größer sein muss als $M_{\text{lim}} \gtrsim 100 M_\odot$.

Wir benutzen dieses Ergebnis nun um damit eine Abschätzung des maximal erlaubten SF S_{max} zu bekommen. Aus der Forderung, dass wir außerhalb des von Fermi-LAT ausgeschlossenen Bereiches liegen, erhalten wir aus [17] für den maximalen SF $S_{\text{max}} \sim M_{cut}^{0.226}$. Die Proportionalitätskonstante lässt sich aus den beiden angegebenen "erlaubten" Fällen ($S = 2$, $M_{\text{lim}} \sim 10^{-6} M_\odot$) und ($S = 135$, $M_{\text{lim}} \sim 10^2 M_\odot$) bestimmen zu $c \approx 46$. In [17] wird nur der Fall eines DM-Teilchens mit einer Masse von $m_\chi = 1.6$ TeV betrachtet. Da wir uns allerdings auch für andere Massen der DM-Teilchen interessieren, müssen wir

den maximalen SF umskalieren, man erhält [17]

$$S_{\max} \backsimeq 46 \left(\frac{m_\chi}{1.6\ \text{TeV}}\right)^2 \left(\frac{M_{cut}}{1\ M_\odot}\right)^{0.226}, \tag{4.30}$$

wobei vorausgesetzt wurde, dass $\langle \sigma v \rangle$ zur heutigen Zeit konstant ist.
Setzten wir in diesen maximalen SF nun unsere Ergebnisse $M_{cut}(m_\chi)$ ein und vergleichen ihn mit den SF wie wir sie für den Fornax-Galaxienhaufen zur heutigen Zeit errechnen (siehe Abb. 4.17), so können wir eine direkte Aussage darüber treffen, für welche Parameterwerte das Modell sowohl die PAMELA Daten erklären kann als auch verträglich mit den Fermi-Messungen ist: Die SF im Fornax-Galaxienhaufen korrespondieren über $S_{\max}^{\text{MW}} \approx 2.25 S_{\max}^{\text{Fornax}}$ mit den SF der Milchstraße. Unter der Annahme, dass der Boostfaktor des DM-Halos in der Milchstraße in der Größenordnung von $\mathcal{O}(1)$ liegt, ist die Erhöhung des Wirkungsquerschnittes dominant durch den Sommerfeld-Effekt gegeben. Skaliert man die SF aus Abb. 4.17 dann auf die Milchstraße um und vergleicht sie mit den Boostfaktoren aus [23], so sieht man, dass sie für ein breites Massenspektrum zumindest im 90%-Konfidenzintervall der PAMELA- und Fermi-Daten liegen. Es lässt sich daher grob sagen, dass, wenn die SF aus Abb. 4.17 durch die Fermi Daten zugelassen werden, sie dann auch in guter Näherung die PAMELA-Daten erklären. Im Einzelfall muss dies jedoch überprüft werden, da man insbesondere bei Massen $m_\chi \gg 2$ TeV bestenfalls noch im 2σ-Konfidenzintervall der PAMELA- und Fermi-Daten liegt [23].

Der Vergleich der erreichbaren SF mit den maximal zugelassenen, ist in Abb. 4.18(a) bis 4.18(f) gezeigt.

Es zeigt sich, dass sich für alle betrachteten Fälle, deren Wechselwirkungsteilchenmasse $m_s \leq 1$ GeV und deren Kopplungskonstante $g_\ell^s \geq 10^{-7}$ ist, die PAMELA-Daten im Rahmen unserer Annahmen nicht erklären lassen, wenn man mit den erwarteten Photonenflüssen außerhalb der Ausschlussgrenze von Fermi-LAT bleiben möchte. Es lässt sich im Gegenteil sogar sagen, dass S_{max} für einen großen Bereich des Parameterraumes sogar unterhalb von 1 liegt, was bedeutet, dass sogar eine Erniedrigung des Annihilationsquerschnittes notwendig wäre um unterhalb der Ausschlussgrenze von Fermi zu bleiben. Es lassen sich daher für alle diese Fälle mit $S_{max} < 1$ die zugehörigen Modellparameter unabhängig von PAMELA ausschließen.

Betrachten wir jetzt jedoch alle Parameterwerte, für die $S_{max} \geq 1$ gilt und erinnern hier nochmals daran, dass wir für die Berechnung der chemischen Entkopplungstemperatur lediglich den "vorsichtigsten" Fall mit $m_s = m_a$ betrachtet haben. Für $m_s \neq m_a$ findet die chemische Entkopplung der Wechselwirkungsteilchen bereits früher statt als für $m_s = m_a$, was bewirkt, dass die Streuung an den SM-Teilchen länger dominiert und man für kleinere g_ℓ^s damit höhere kinetische Entkopplungstemperaturen erreicht, die wiederum zu höheren Cutoff-Massen und damit zu einem größeren maximalen SF führen. In den Abbildungen 4.18(c) bis 4.18(f) sind daher auch die maximalen Sommerfeldfaktoren für $g_\ell^s = 10^{-7}$ eingezeichnet (rote gepunktete Linien), die sich ergeben würden, falls die chemische Entkopplungstemperatur der Wechselwirkungsteilchen deutlich höher liegen würde wie es vielleicht mit $m_s \neq m_a$ erreichbar wäre (es wurde somit

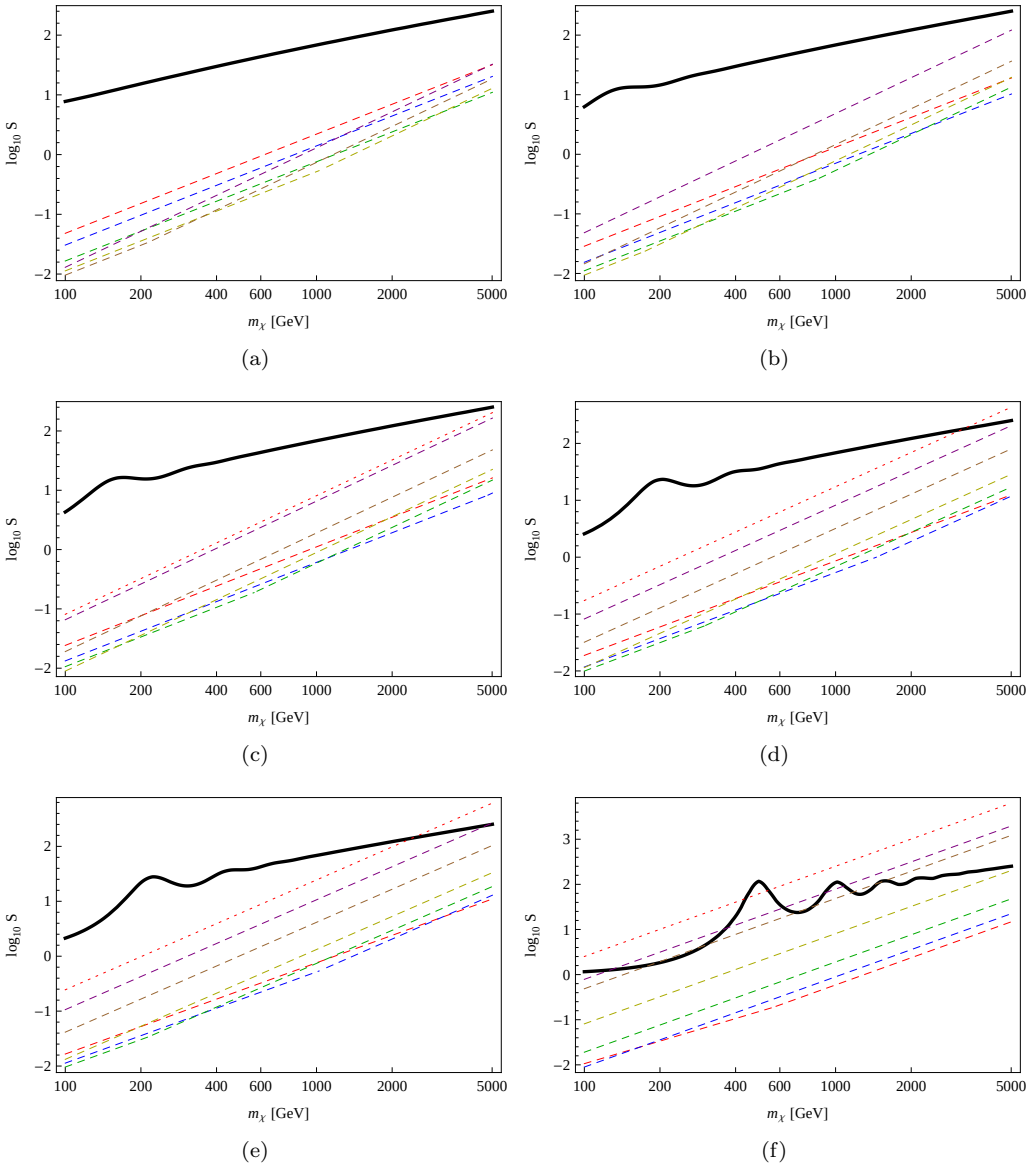


Abbildung 4.18: Gezeigt sind die SF aus Abb. 4.17 (schwarze dicke Linie) als Funktion der DM-Massen m_χ zusammen mit den durch [17] maximal erlaubten SF, $S_{\max}(g_\ell^s, m_s, m_\chi)$. Dabei steht rot jeweils für $g_\ell^s = 10^{-2}$, blau für $g_\ell^s = 10^{-3}$, grün für $g_\ell^s = 10^{-4}$, gelb für $g_\ell^s = 10^{-5}$, braun für $g_\ell^s = 10^{-6}$ und lila für $g_\ell^s = 10^{-7}$. Mit (a) $m_s = 100$ MeV, (b) $m_s = 360$ MeV, (c) $m_s = 500$ MeV, (d) $m_s = 800$ MeV, (e) $m_s = 1$ GeV, (f) $m_s = 5$ GeV. Die in den Abbildungen (c) bis (f) zu sehende rote gepunktete Linie ist der maximale SF für $g_\ell^s = 10^{-7}$, für den Fall, dass die Wechselwirkungsteilchen bereits das chemische Gleichgewicht verlassen haben.

der Kurvenverlauf der in den Abbildungen 4.11, 4.13(a) und 4.13(b) gezeigten Funktion T_{kd} beibehalten und nicht für kleine g_ℓ^s durch die chemische Entkopplungskurve ersetzt, wie in Abb. 4.14 gezeigt). Man sieht in Abb. 4.18(d), dass in dem Fall SF mit DM-Massen von $m_\chi \geq 3200$ GeV von Fermi erlaubt wären. Der Vergleich mit [23] zeigt, dass sich damit ebenfalls noch die PAMELA Daten erklären lassen. Aus Abb. 4.18(e) entnimmt man, dass sogar DM-Teilchen mit Massen $m_\chi \geq 2400$ GeV von Fermi erlaubt wären und gleichzeitig PAMELA erklären könnten, wenn $m_s = 1\text{GeV} \neq m_a$ gilt.
Wie jedoch insbesondere die Abbildungen 4.18(d) und 4.18(e) zeigen, ließen sich eventuell selbst im Rahmen der vorsichtigen Annahme, dass $m_s = m_a$ gilt, mit Kopplungskonstanten $g_\ell^s < 10^{-7}$ Fälle konstruieren, für die die PAMELA-Daten mit den Fermi-LAT-Messungen vereinbar wären. Es wäre jedoch dabei zu beachten, dass man für $m_\phi \sim 900$ MeV DM-Massen in der Größenordnung $m_\chi \lesssim 3$ TeV braucht um im 2σ-Konfidenzintervall der PAMELA Daten zu bleiben, was möglicherweise erst bei $g_\ell^s \sim 10^{-9}$ realisiert wäre. Dabei wären jedoch weitere Effekte zu beachten, z.B. der, dass die Streuung der DM-Teilchen an den Wechselwirkungsbosonen bei kleiner werdenden Kopplungskonstanten ein Maximum erreicht und dann auf den in Kapitel 4.2.3 beschriebenen Wert abfällt. Es ist daher schwer verlässliche Einschätzungen zu treffen, was bei Parameterwerten jenseits der hier betrachteten Grenzen passiert. Die Ergebnisse sind entsprechend so zu verstehen, dass man nur in dem Bereich des Parameterraumes in dem die Streuung an SM-Teilchen sicher dominiert die klare Aussage treffen kann, dass das hier konstruierte Modell nicht gleichzeitig die PAMELA-Daten erklären kann und unter der Ausschlussgrenze von Fermi bleibt. Der Bereich, in dem die Streuung an Wechselwirkungsteilchen dominant wird, liefert eine vorsichtige Abschätzung, die jedoch abhängig von der Masse m_a der pseudoskalaren Teilchen ist und mit dieser variiert werden kann.

Besondere Beachtung verdient noch der Fall mit $m_s = 5$ GeV, den wir aus der Motivation von [32] betrachtet haben, da sich selbst bei der vorsichtigen Abschätzung der chemischen Entkopplungstemperatur für Kopplungskonstanten $g_\ell^s \geq 10^{-6}$ einige Werte der DM-Teilchenmasse finden lassen, mit denen eventuell sowohl die PAMELA-Daten erklärt werden können als auch die Ausschlussgrenze von Fermi befriedigt wird. Folgt man hier weiter der Idee von [32] und betrachtet den Fall $m_s \gg m_a$, so wird die chemische Entkopplung bei höheren Temperaturen stattfinden, was zu einem höheren maximalen Sommerfeld-Effekt führt, so dass die simultane Erklärung der PAMELA-Daten mit der Befriedigung der Fermi-LAT-Messungen für ein breites Massenspektrum m_χ möglich wird. Dies ist ebenfalls mit der roten gepunkteten Linie angedeutet, die, wie zuvor beschrieben, entstehen würde, wenn die Kurve der chemischen Entkopplungstemperatur der Wechselwirkungsteilchen die Kurve der kinetischen Entkopplungstemperatur der DM-Teilchen erst bei $g_\ell^s < 10^{-7}$ schneiden würde.

Betrachten wir als nächstes die in Abschnitt 3.2.1 beschriebenen Grenzen des Modells, sowie den Fall einer signifikanten Quarkwechselwirkung.
Wie aus Abb. 4.18(a) bis 4.18(e) zu entnehmen ist, hat eine Beschränkung der Kopplungskonstanten, wie sie in Abb. 4.14 bereits illustriert wurde, keine Auswirkungen auf das Gesamtergebnis. Es lassen sich im Gegenteil weitere scharfe Grenzen an den Parameterraum durch die Messung der Photonenflüsse

von Fermi festlegen.
Interessanter hingegen ist eine nicht vernachlässigbare Quarkwechselwirkung. In diesem Falle würden die Kurven der Entkopplungstemperaturen in (4.14) über der (grau gestrichelten) Linie des QCD Phasenüberganges deutlich flacher verlaufen (ähnlich den Kurvenverläufen der von Myon und Elektron dominierten Streuungen, siehe Abb. 4.11) und auf kleinere Entkopplungstemperaturen führen, die wiederum auf kleinere maximale SF führen. Es wäre daher eine "Verschärfung" des Problems zu erwarten, die eventuell den maximalen SF auch für $m_s \neq m_a$ und $g_\ell^s < g_\ell^s(T_{kd}^{\max})$ soweit absenken würde, dass sich ein solches DM-Modell für Massen $m_s \leq 1$ GeV komplett ausschließen lässt. Wie jedoch zuvor bereits erwähnt, ist eine solche Prognose äußerst schwierig.
Interessant ist des Weiteren wieder der durch [32] motivierte Fall mit dem Wert $m_s = 5$ GeV, da in der Theorie von Nomura und Thaler eine signifikante Quarkkopplung betrachtet wird. Es wäre in diesem Fall ebenfalls möglich, dass die Absenkung der Entkopplungstemperatur so weit reicht, dass S_{max} wieder unterhalb der erreichbaren Werte liegt. Da Nomura und Thaler [32] allerdings Massen der skalaren Bosonen in der Größenordnung von bis zu $m_s \sim 10$ GeV zulassen, existiert ein weites Spektrum des Parameterraumes, das untersucht und durch zukünftige Messungen der Photonenflüsse beschränkt werden kann.

Zusammenfassung

Wir haben ein DM-Modell konstruiert, welches die hochenergetischen Leptonenflüsse, die von PAMELA gemessen wurden erklären sollte. Dazu haben wir zum schweren DM-Teilchen leichte skalare und pseudoskalare Wechselwirkungsfelder postuliert über die das DM-Teilchen alleine wechselwirkt. Die Wechselwirkungsfelder besitzen eine signifikante Kopplung an die Leptonen des SM, so dass sie in diesem Modell ausschließlich in hochenergetische Leptonen zerfallen (weshalb die Theorie als "leptophil" bezeichnet wird). Unter Ausnutzung des Sommerfeld-Effektes, der den Wirkungsquerschnitt der DM-Annihilation zur heutigen Zeit erhöht, erhält man somit durch die DM-Annihilation in die Wechselwirkungsteilchen das gewünschte Spektrum hochenergetischer Positronen.
Wir haben dann die kinetische Entkopplungstemperatur der DM-Teilchen berechnet die, abhängig von der Kopplung der skalaren Wechselwirkungsteilchen an die SM-Teilchen, in der Größenordnung von $T_{kd} \sim 10 - 100$ MeV für $10^{-6} \lesssim g_\ell^s \lesssim 10^{-3}$ (und 100 MeV $\lesssim m_s \lesssim$ 1GeV) lag. Daraus haben wir die Masse der kleinsten gravitativ gebundenen Objekte aus DM bestimmt, die für den genannten Temperaturbereich in der Größenordnung von $M_{cut} \sim 10^{-6} - 10^{-2} M_\odot$ lag und mit der kinetischen Entkopplungstemperatur das zentrale Ergebnis dieser Arbeit ist.
Unter der Annahme, dass die kleinsten DM-Halos bis in die heutige Zeit als Substrukturen großer DM-Halos überlebt haben, wurde von [17] ein Vergleich der erwarteten Photonenflüsse einiger Galaxienhaufen mit den von Fermi-LAT gemessenen Daten erstellt. Es wurde dabei für leptophile DM-Modelle davon ausgegangen, dass die kleinsten DM-Halos den Photonenfluss des Hauptsystems durch inverse Compton-Streuprozesse der DM-Annihilationsprodukte dominieren.
Wir haben die daraus resultierenden Grenzen für den Parameterraum unseres Modells errechnet und gesehen, dass das hier konstruierte Modell für Massen der skalaren Wechselwirkungsteilchen $m_s \leq 1$ GeV (und jeweiligen Massen der pseudoskalaren Teilchen in derselben Größenordnung $m_s \approx m_a$) mit einer Kopplungskonstanten $g_\ell^s \geq 10^{-7}$ an die SM-Teilchen nicht gleichzeitig die PAMELA-Daten erklären und außerhalb der Ausschlussgrenze von Fermi bleiben kann. Es wurde dabei die Richtigkeit der in [17] gemachten Analysen vorausgesetzt, obgleich diese mit nicht unerheblichen astrophysikalischen Unsicherheiten behaftet sind, wie z.B. der DM-Verteilung (insbesondere die Verteilung der kleinsten Minihalos) und Geschwindigleitsdispersion in den Clustern. Im Rahmen dieser Annahmen, lassen sich dann jedoch Grenzen an den Parameterraum des Modells konstruieren, die bedeutend stärker sind, als die zuvor in den Abschnitt 3.2.1 beschriebenen. Es zeigen sich jedoch auch Bereiche im Parameterraum, die möglicherweise simultan die Erklärung der PAMELA Daten ermöglichen und dabei die Fermi-LAT

Grenzen befriedigen, was jedoch nur eine Parameterraumanalyse jenseits der hier betrachteten Werte klarstellen kann.

Anhang

A Zur Motivation und Herleitung der Boltzmann-Gleichung

A.1 Geometrie der klassischen Mechanik und statistischen Physik

In der klassischen Mechanik [46] wird ein System aus N Teilchen, die Λ Zwangsbedingungen unterliegen, durch $f = 3N - \Lambda$ verallgemeinerte Koordinaten beschrieben. Diese Koordinaten bilden die Parametermannigfaltigkeit M. In der Lagrange-Mechanik betrachtet man die zu den verallgemeinerten Koordinaten q gehörigen verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$, die als Variablen der Bewegungsgleichungen auftreten. Geometrisch gesprochen sind die verallgemeinerten Geschwindigkeiten die Tangentialvektoren an die Parametermannigfaltigkeit. Alle denkbaren Tangentialvektoren an einem Punkt $x \in M$ spannen einen Vektorraum auf, den sogenannten Tangentialraum T_xM. Die Vereinigung aller dieser Tangentialräume zu allen Punkten der Mannigfaltigkeit bildet dann das Tangentialbündel $TM := \bigcup_{x \in M} T_xM$ und hat selbst die Struktur einer Mannigfaltigkeit.
Die Lagrange-Funktion ist beispielsweise eine Abbildung vom Tangentialbündel auf $\mathbb{R}$ (siehe Abbildung A.19). Führt man die verallgemeinerten Impulse $p = \frac{dL}{d\dot{q}}$ ein, so sieht man, dass sie Elemente des Kotangentialraumes T^*M sind, da L eine skalare Funktion auf TM ist. Die Vereinigung aller Kotangentialräume bildet das Kotangentialbündel, welches die Struktur einer symplektischen Mannigfaltigkeit besitzt und von welchem die Hamiltonfunktion auf $\mathbb{R}$ abbildet. Wählt man die durch die Basismannigfaltigkeit induzierten Koordinaten, dann lassen sich die Elemente des Tangential- und Kotangentialbündels lokal als 2-Tupel darstellen, nämlich als Punkt auf der Parametermannigfaltigkeit und als ein denkbarer zugehöriger Impuls bzw. Geschwindigkeit. Somit bildet das Kotangentialbündel den Phasenraum. In der statistischen Mechanik wird der Phasenraum allerdings meist als 6N-dimensionaler Euklidischer Raum angenähert, da die globale Struktur nicht von Belang ist.
Jeder Punkt des Phasenraumes beschreibt einen denkbaren Mikrozustand eines physikalischen Systems, der mit den (unvollständig bekannten) Randbedingungen vereinbar ist. Somit beschreibt jedes physikalische System bei seiner Evolution eine Kurve im Phasenraum. Alle Systeme werden dabei natürlich durch die gleiche Hamilton-Funktion beschrieben, weshalb klar ist, dass sich die Trajektorien der Systeme nicht schneiden können. Man definiert daher eine Dichtefunktion $\rho(q_1, ..., q_f, p_1, ..., p_f, t) : T^*M \to \mathbb{R}$ auf dem Phasenraum und möchte wissen,

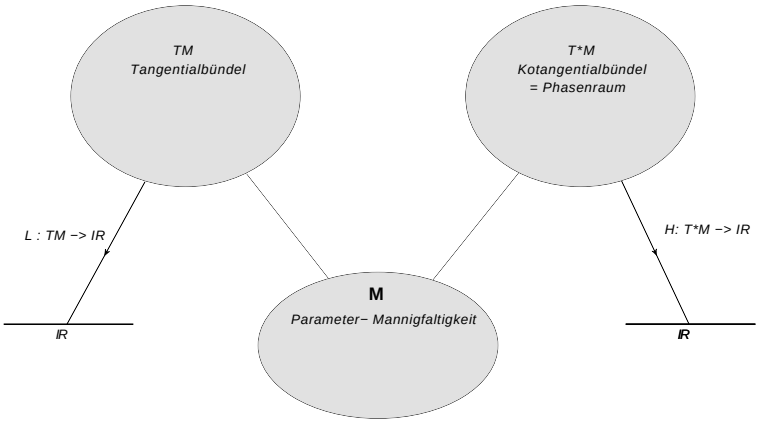


Abbildung A.19: Geometrische Mechanik

wie sich diese entlang der Bahnkurve ändert. Die Änderung der Dichteverteilung lässt sich z.B. elegant aus dem Liouvilleschen Theorem ableiten:

Liouville-Theorem [47]

Sei G_0 ein Gebiet des Phasenraumes mit dem Volumen V_0, dessen Punkte zur Zeit $t = 0$ von Ensemble-Systemen besetzt sind. Jedes physikalische System bewegt sich mit der Zeit entlang seiner Phasenraum-Trajektorie, so dass alle Phasenraumpunkte des Gebiets G_0 zur Zeit $t = T$ das Gebiet G_T mit dem Volumen V_T ausfüllen. Die Form des Gebiets G_T wird im Allgemeinen verschieden sein von G_0, es gilt jedoch für jeden beliebigen Zeitpunkt:

$$V_0 = V_T. \tag{A.31}$$

Wir werden hier keinen Beweis des Liouville-Theorems erbringen, es sei aber gesagt, dass sich das Theorem auf elegante Weise z.B. unter Verwendung der symplektischen Form des Phasenraumes beweisen lässt (siehe z.B. [46]).
Eine direkte Folge des Theorems ist, dass die Dichteverteilung entlang der Trajektorie konstant ist, was anschaulich bedeutet, dass ein Beobachter, der mit der Ensemble-Strömung mitbewegt wird, in seiner Umgebung stets dieselbe Dichte von Ensemble-Phasenpunkten sieht. Aus dieser Folgerung ergibt sich somit die Liouville-Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \rho}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}}{m} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \rho + \boldsymbol{F} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} \rho = 0. \end{aligned} \tag{A.32}$$

Dies ist die Gleichung eines N-Teilchensystems (wobei $\boldsymbol{F}$ eine äußere Kraft bezeichnet).
Im Folgenden interessiert uns jedoch nur der Spezialfall eines Einteilchensystems,

für das wir eine Einteilchenfunktion $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)$ definieren, die die Wahrscheinlichkeit beschreibt, das Teilchen am Ort $\boldsymbol{x}$ mit dem Impuls $\boldsymbol{p}$ zur Zeit t zu finden. Betrachtet man jetzt jedoch ein tatsächliches physikalisches System, das aus einer sehr großen Anzahl solcher identischer Teilchen besteht, dann ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung f mit der tatsächlichen Phasenraumverteilung der Teilchen nahezu identisch, da jeder Zustand mit der durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung vorgegebenen Häufigkeit auch wirklich besetzt wird. Gehen wir von diesem Fall aus, dann ist $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{p}$ die Anzahl der Teilchen im Volumen $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x})$ mit den Impulsen $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} + d\boldsymbol{p})$. Betrachten wir nun die Änderung dieser Phasenraumverteilungsfunktion entlang der Weltlinie eines Teilchens, so gelangen wir mit dem Liouvilleschen Theorem zur kollisionsfreien Boltzmann-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}}{m} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} f + \boldsymbol{F} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} f = 0. \tag{A.33}$$

Lässt man jetzt auch noch Stöße zu, so steht auf der rechten Seite der Gleichung ein Stoßterm, der sich prinzipiell aus folgender Überlegung ergibt [48]: Betrachtet man ein Teilchen im Zustand $\omega_x = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \in T^*M$ und bezeichnet die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang $\omega_x \to \tilde{\omega}_x = (\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{p}}) \in T^*M$ mit $W_{\omega_x \to \tilde{\omega}_x}$, dann ist die zeitliche Änderung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit gegeben als die Differenz der Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand ω_x in alle anderen möglichen Zustände $\tilde{\omega}_x$ und der Übergangswahrscheinlichkeit von allen Zuständen $\tilde{\omega}_x$ zum Zustand ω_x

$$\frac{df(\omega_x, t)}{dt} = - \sum_{\tilde{\omega}_x \neq \omega_x} \left(W_{\omega_x \to \tilde{\omega}_x} f(\omega_x, t) - W_{\tilde{\omega}_x \to \omega_x} f(\tilde{\omega}_x, t) \right). \tag{A.34}$$

A.2 Verallgemeinerungen der klassischen Theorie

Die Parametermannigfaltigkeit ist in unserem Fall gegeben durch die kosmologische Raumzeit mit der Friedmann-Robertson-Walker-Metrik (1.2), in der sich ein Teilchen bewegt. Wir betrachten nun eine Kurve in der Raumzeit, die durch den parametrisierten Weg $x^\mu(\tau)$ beschrieben wird, wobei τ die Eigenzeit ist. Die Tangentialvektoren an diese Kurve sind dann $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ und somit Elemente des Tangentialbündels. Wie wir in Abb. A.19 sehen können, sind die verallgemeinerten Impulse der klassischen Mechanik streng genommen Einsformen. Der Einfachheit halber definieren wir die Viererimpulse jedoch als Vektoren durch $p^\mu = mU^\mu$ oder äquivalent dazu $p^\mu = g^{\mu\nu} \frac{\partial L}{\partial U^\nu}$ (dies ist eine wohldefinierte Operation, da die Metrik hier als Diffeomorphismus fungiert). Führen wir nun einen affinen Parameter λ ein, dann lässt sich der Impuls schreiben als $p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$. Unser Phasenraum ist somit nicht das Kotangentialbündel, sondern wir bezeichnen das Tangentialbündel (modifiziert durch die Masse) als Phasenraum (siehe Abb. A.20). Wir definieren nun analog zur klassischen Mechanik eine Phasenraumfunktion $f : TM \to \mathbb{R}$ die vom Tangentialbündel auf $\mathbb{R}$ abbildet und interessieren uns dafür, wie sich diese Funktion entlang des parametrisierten Weges in M ändert. Um diese Änderung berechnen zu können definieren wir einen Schnitt in TM, d.h. ein Vektorfeld V, das jedem Punkt $x \in M$ das Element $V_x = (x, p) \in TM$ zuordnet, wobei p der Impulsvektor am Punkt $x(\lambda)$ ist (Koordinatenwahl wie oben beschrieben sei dabei vorausgesetzt). Mit diesem Schnitt können wir nun einen Pullback definieren, der uns die Phasenraumfunktion auf M zurückzieht:

$$V^* f = f \circ V : x \in M \longmapsto f(V_x^\mu) = f(x^\mu, p^\mu). \tag{A.35}$$

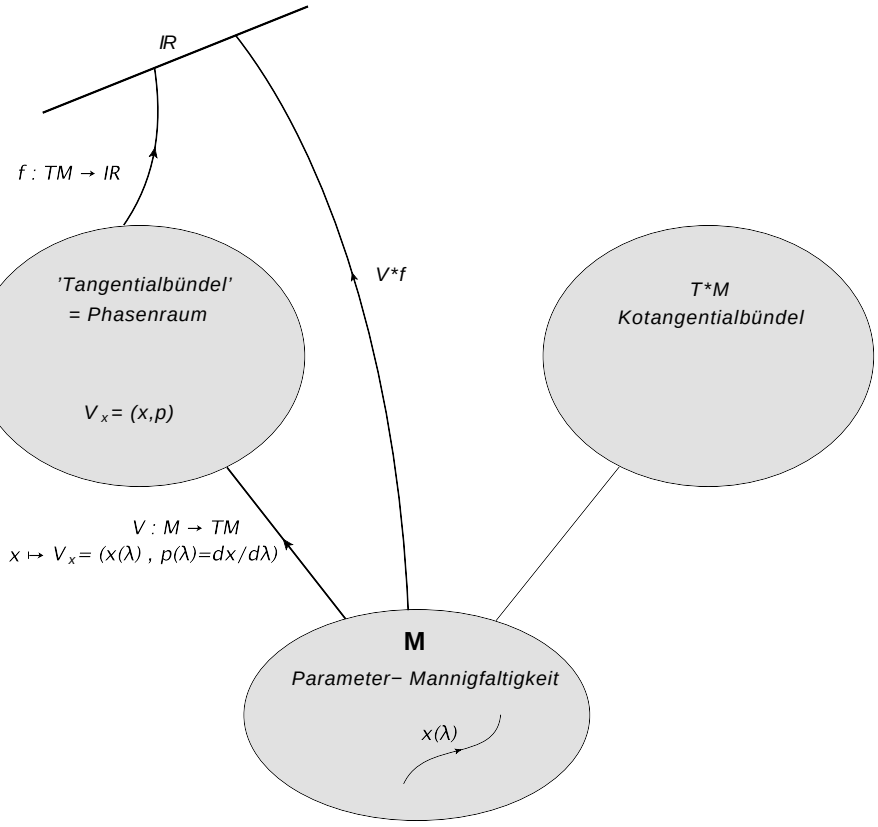


Abbildung A.20: Verallgemeinerte geometrische Mechanik

Auf diese Weise kann man die Änderung von f entlang von $x(\lambda)$ betrachten, es ist die Lie-Ableitung (Richtungsableitung):

$$L_x V^* f = \frac{d}{d\lambda} V^* f\left(x^\mu(\lambda)\right) = \frac{d}{d\lambda} f\left(x^\mu(\lambda), p^\mu(\lambda)\right). \tag{A.36}$$

Als Verallgemeinerung der klassischen Boltzmann-Gleichung definieren wir sie nun als Operatorgleichung für die Phasenraumfunktion:

$$\hat{L}[f] = C[f]. \tag{A.37}$$

Mit dem Liouville-Operator $\hat{L}[f] = L_x V^* f$ und dem Kollisionsoperator C der im Abschnitt 2.3 ausführlich beschrieben wird.

B Wirkungsquerschnitt und Mandelstam-Variablen

Wir werden in diesem Abschnitt den Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $p + p' \to k + k'$ definieren und in Abhängigkeit der Mandelstam-Variablen s darstellen.
Dazu definieren wir zunächst die Mandelstam-Variablen für die Reaktion $p + p' \to k + k'$ (die auch den Bezeichnungen aus Abb. 4.1 und 4.2 entsprechen) durch [4]

$$s = (p + p')^2 = (k + k')^2 \tag{B.38}$$

$$t = (p - k)^2 = (p' - k')^2 \tag{B.39}$$

$$u = (p - k')^2 = (p' - k)^2. \tag{B.40}$$

Der Vorteil der Mandelstam-Variablen ist, dass sie Lorentz-invariant sind und sich das quadrierte Matrixelement immer in Abhängigkeit von nur zwei Mandelstam-Variablen schreiben lässt. Letzteres ist möglich, da die Mandelstam-Variablen nicht unabhängig von einander sind. Sie erfüllen die Relation

$$s + t + u = m_p^2 + m_{p'}^2 + m_k^2 + m_{k'}^2. \tag{B.41}$$

Wir definieren nun den differentiellen Wirkungsquerschnitt durch [2]

$$\begin{aligned} d\sigma \equiv & |\mathcal{M}|^2 \frac{S}{4\sqrt{(p \cdot p')^2 - (m_\chi m_\chi)^2}} \left(\frac{d^3\boldsymbol{k}}{2(2\pi)^3\omega}\right)\left(\frac{d^3\boldsymbol{k'}}{2(2\pi)^3\omega'}\right) \\ & \times (2\pi)^4 \delta^4(p + p' - k - k'), \end{aligned} \tag{B.42}$$

wobei S ein statistischer Faktor ist, der dafür sorgt, dass wir den gleichen Endzustand nicht mehrfach zählen ($S = 1/j!$ für jede Gruppe von j gleichen Teilchen im Endzustand, d.h. hier ist S immer entweder $\frac{1}{2}$ oder 1). Wir betrachten den Prozess nun im Schwerpunktsystem indem $\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{p'}$ gilt. Da die Massen der einlaufenden Teilchen gleich sind, folgt daraus zudem, dass $E = E'$ ist. Damit ist $s = (p + p')^2 = (E + E')^2 = 4E^2$. Weiter folgt, dass

$$\sqrt{(p \cdot p') - (m_\chi m_\chi)^2} = (E + E')|\boldsymbol{p}|, \tag{B.43}$$

[2] Es sei darauf hingewiesen, dass es sich hierbei nicht um eine Einsform handelt, wir folgen lediglich der üblichen Notation, in der auch weiterhin der Ausdruck $d\sigma$ verwendet wird, wenn über Impulskomponenten integriert wurde.

wodurch sich der Wirkungsquerschnitt vereinfacht zu

$$\begin{aligned} d\sigma =& |\mathcal{M}|^2 \frac{S}{4\sqrt{s}|\boldsymbol{p}|} \Big(\frac{d^3\boldsymbol{k}}{2(2\pi)^3\omega}\Big)\Big(\frac{d^3\boldsymbol{k'}}{2(2\pi)^3\omega'}\Big) \\ & \times (2\pi)^4\delta^4(p+p'-k-k'). \end{aligned} \tag{B.44}$$

Um fortzufahren, bedenken wir, von welchen Impulsen $\mathcal{M}$ abhängen kann: $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{p'}$ sind beliebige aber feste Impulse der einlaufenden Teilchen, verknüpft über die Wahl des Bezugssystems ($\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{p'}$). $\boldsymbol{k}$ und $\boldsymbol{k'}$ sind die Integrationsvariablen, die erst nach der $\boldsymbol{k'}$ Integration eingeschränkt sind ($\boldsymbol{k'} = -\boldsymbol{k}$) und nach der $|\boldsymbol{k}|$ Integration durch den Streuwinkel festgelegt. Im Allgemeinen hängt $|\mathcal{M}|^2$ zwar von allen vier Impulsen ab, durch unsere Wahl des Bezugssystems jedoch nur von $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{k}$. Daraus können drei Skalare konstruieren werden: $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} = |\boldsymbol{p}|^2$, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = |\boldsymbol{k}|^2$ und $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k} = |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|\cos(\theta)$. $\boldsymbol{p}$ ist aber festgelegt, weshalb die einzigen Integrationsvariablen von denen $|\mathcal{M}|^2$ abhängen kann $\boldsymbol{k}$ und θ sind. Schreiben wir die Deltafunktion um
$\delta^4(p+p'-k-k') = \delta^4(E+E'-\omega-\omega')\delta^3(-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})$ und drücken die Energien der auslaufenden Teilchen über die Impulse aus, dann können wir die Integration über $\boldsymbol{k'}$ ausführen:

$$\begin{aligned} d\sigma =& \frac{S|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2\sqrt{s}|\boldsymbol{p}|} \\ & \times \frac{\delta(\sqrt{s}-\sqrt{m_\phi^2+\boldsymbol{k}^2}-\sqrt{m_\phi^2+\boldsymbol{k}^2}}{\sqrt{m_\phi^2+\boldsymbol{k}^2}\sqrt{m_\phi^2+\boldsymbol{k}^2}} d^3\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{B.45}$$

Führt man wiederum Kugelkoordinaten ein, so kann die verbleibende $|\boldsymbol{k}|$ Integration ausgeführt werden mit dem Ergebnis [4]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{S|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 s}\frac{|\boldsymbol{p_f}|}{|\boldsymbol{p_i}|}, \tag{B.46}$$

wobei $|\boldsymbol{p_i}| = |\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{p'}|$ und $|\boldsymbol{p_f}| = |\boldsymbol{k}| = |\boldsymbol{k'}|$.

Drücken wir als nächsten Schritt θ durch die Mandelstamvariable t aus, indem wir die Definition (B.39) auswerten und (B.38) benutzen,

$$t = m_\chi^2 + m_\phi^2 - \frac{s}{2} + 2\sqrt{(\frac{s}{4}-m_\chi^2)(\frac{s}{4}-m_\chi^2)}\,\cos(\theta), \tag{B.47}$$

und führen die ϕ-Integration aus, so erhält man insgesamt für den Wirkungsquerschnitt

$$\sigma(s) = \int_{t_{\max}}^{t_{\min}} \frac{S}{64\pi s}\frac{1}{|\boldsymbol{p_i}|^2}|\mathcal{M}|^2 dt, \tag{B.48}$$

wobei $t_{\min}$ und $t_{\max}$ durch (B.47) mit $\mathrm{Max}[\cos(\theta)] = 1$ und $\mathrm{Min}[\cos(\theta)] = -1$ gegeben sind. Für die Berechnung des Wirkungsquerschnittes ist noch zu beachten, dass der statistische Faktor $S = \frac{1}{2}$ nur für die Annihilation in zwei

skalare oder zwei pseudoskalare Wechselwirkungsteilchen auftritt, da diese Endzustandsteilchen jeweils nicht unterscheidbar sind. Für die Annihilation in einen gemischten Zustand gilt $S = 1$. Um den thermisch gemittelten Wirkungsquerschnitt damit berechnen zu können, ist es notwendig die Møller-Geschwindigkeit in Abhängigkeit von den Mandelstam Variablen auszudrücken. Man erhält

$$\begin{aligned} v_{\text{Møl}} &= \frac{\sqrt{(p \cdot p')^2 - (m_\chi m_\chi)^2}}{EE'} \\ &= \frac{\sqrt{[s - (m_\chi + m_\chi)^2][s - (m_\chi - m_\chi)^2]}}{2EE'} \\ &= 2\sqrt{1 - \frac{4m_\chi^2}{s}}. \end{aligned} \tag{B.49}$$

C Entwicklung des Kollisionsoperators

Wir werden im Folgenden die Entwicklung des Kollisionsoperators aus Abschnitt 2.5.1 bezüglich des Impulsübertrags durchführen. Wir halten uns dabei an [16, 49]. Da wir allerdings keine explizite Form der Phasenraumverteilungsfunktionen annehmen können, verwenden wir einen "Trick": Wir führen eine formale Entwicklung der Delta-Distribution durch. Da dies keine triviale Operation ist, werden wir zunächst an die grundlegenden Definitionen erinnern um zu zeigen, dass das Vorgehen wohldefiniert ist. Wir halten uns dabei an [50].
Wir beginnen mit der Definition der Delta-Distribution:

Definition 1 *Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und ϕ eine Testfunktion, dann definieren wir die Delta Distribution durch*[3]

$$\delta_a[\phi] := \phi(a). \tag{C.50}$$

Da wir uns im Folgenden für die Ableitungen der Deltadistribution interessieren, definieren wir nun allgemein die Differentiation von Distributionen:

Definition 2 *Sei T eine beliebige Distribution, ϕ eine Testfunktion, L ein linearer Differentialoperator und L^* der adjungierte Differentialoperator zu L. Dann definieren wir*

$$(LT)[\phi] := T[L^*\phi]. \tag{C.51}$$

Es werden im Folgenden nur lineare Differentialoperatoren (der Ordnung k) mit konstanten Koeffizienten der Form $L = \sum_{|p| \leqq k} c_p D^p$ mit $c_p \in \mathbb{R}$ betrachtet. Die dazugehörigen adjungierten Operatoren haben die Form $L^* = \sum_{|p| \leq k} (-1)^{|p|} c_p D^p$.
Als nächstes erinnern wir an die Definition der Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$:

[3] Anmerkung: Die Delta-Distribution ist keine reguläre Distribution, d.h. sie lässt sich nicht als $\delta_a[\phi] = \int f(x)\phi(x)d^n x = \phi(a)$ mit $f \in \mathscr{L}^1_{\text{loc}}$ schreiben, wobei $\mathscr{L}^1_{\text{loc}}$ der Vektorraum der Funktionen ist, die über kompakten Teilmengen integrierbar sind. Die "übliche" Schreibweise $\int \delta(x)\phi(x)d^n x = \phi(a)$ ist somit streng genommen nicht wohldefiniert und eher symbolisch zu verstehen. Dennoch findet sie in dieser Arbeit durchgängig Verwendung.

Definition 3 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für jedes $x \in U$*

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \mathcal{O}(\| \xi \|^k) \tag{C.52}$$

für $\xi \to 0$. Hierbei ist α ein Multiindex $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}$.

Betrachtet man nun den Spezialfall einer mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktion, so kann man die Reihe bis zur zweiten Ordnung schreiben als

$$f(x+\xi) = f(x) + \langle \nabla f(x), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi, A\xi \rangle + \mathcal{O}(\| \xi \|^k), \tag{C.53}$$

mit dem kanonischen Skalarprodukt $\langle , \rangle$ und der Hesse-Matrix $A := (\mathrm{Hess} f)(x)$.

Wir können nun eine formale Entwicklung der Delta-Distribution durchführen mit $\xi = \tilde{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k}$ um $x = \tilde{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p}$, um den Kollisionsoperator bezüglich des kleinen Impulsübertrags zu entwickeln $C = C^1 + C^2 + ...$ Anschließend können wir mit Definition 2 die linearen Ableitungsoperatoren auf das Produkt von Matrixelement und Verteilungsfunktionen anwenden, um ein auswertbares Ergebnis zu erhalten.

Die Entwicklung ergibt:

$$\begin{aligned} \delta^{(3)}(\tilde{\boldsymbol{p}} + \tilde{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}) = \delta^{(3)}(\tilde{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p}) + \left\langle \nabla \delta^{(3)}(\tilde{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p}), \tilde{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k} \right\rangle \\ + \frac{1}{2} \left\langle \tilde{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k}, A(\tilde{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k}) \right\rangle + \mathcal{O}(\| \tilde{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k} \|^k). \end{aligned} \tag{C.54}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass es sich hierbei um lineare Ableitungsoperatoren gemäß Definition 2 handelt. Für den Term 1. Ordnung, den wir im Folgenden detailliert betrachten wollen, erhalten wir

$$\left\langle \nabla_{\tilde{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p}} \delta^{(3)}(\tilde{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p}), \tilde{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k} \right\rangle = \sum_{i=1}^{3} (\tilde{k} - k)_i \frac{\partial}{\partial (\tilde{p} - p)_i} \delta^{(3)}(\tilde{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p}). \tag{C.55}$$

Bevor wir nun Definition 2 benutzen, wollen wir einsehen, dass man $\nabla_{\tilde{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p}}$ in diesem Fall schreiben kann als $\nabla_{\tilde{\boldsymbol{p}}}$: Wir betrachten allgemein $\delta(x - y)$ und führen eine Variablensubstitution durch: $v = x + y$ und $w = x - y$. Dann ist $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w}$ angewandt auf $\delta(x - y)$ ergibt das $\frac{\partial}{\partial x} \delta(v) = \frac{\partial}{\partial v} \delta(v) + \frac{\partial}{\partial w} \delta(v) = \frac{\partial}{\partial v} \delta(v)$. Damit erhalten wir für C^1

$$\begin{aligned} C^1 = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \int \frac{d^3 \tilde{k}}{(2\pi)^3 2\tilde{\omega}} \int \frac{d^3 \tilde{p}}{(2\pi)^3 2\tilde{E}} (2\pi)^4 \delta(\tilde{E} + \tilde{\omega} - E - \omega) \\ \times |\mathcal{M}|^2 J \left[(\tilde{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k}) \cdot \nabla_{\tilde{\boldsymbol{p}}} \delta^3(\tilde{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p}) \right]. \end{aligned} \tag{C.56}$$

Benutzen wir nun Definition 2 mit

$$L = \sum_{i=1}^{3} (\tilde{k} - k)_i \frac{\partial}{\partial (\tilde{p})_i} \delta^{(3)}(\tilde{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p}) = -L^*, \tag{C.57}$$

dann führt dies zu folgendem Ausdruck für C^1, den wir weiter auswerten können:

$$C^1 = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \int \frac{d^3\tilde{k}}{(2\pi)^3 2\tilde{\omega}} \int \frac{d^3\tilde{p}}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^3(\tilde{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p}) \times \left[(\tilde{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k}) \nabla_{\tilde{\boldsymbol{p}}} \left(\delta(\tilde{E} + \tilde{\omega} - E - \omega) \frac{|\mathcal{M}|^2 J}{2\tilde{E}} \right) \right] \tag{C.58}$$

$$= -(2\pi) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \int \frac{d^3\tilde{k}}{(2\pi)^3 2\tilde{\omega}} \left[(\tilde{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k}) \nabla_{\tilde{\boldsymbol{p}}} \left(\delta(\tilde{E} + \tilde{\omega} - E - \omega) \frac{|\mathcal{M}|^2 J}{2\tilde{E}} \right) \right]_{\tilde{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}} \tag{C.59}$$

$$\begin{aligned} = -(2\pi) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \int \frac{d^3\tilde{k}}{(2\pi)^3 2\tilde{\omega}} \Bigg(& \frac{|\mathcal{M}|^2_{t=0} J|_{\tilde{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}}}{2E} \left(\boldsymbol{q} \nabla_{\tilde{\boldsymbol{p}}} \delta(\tilde{E} + \tilde{\omega} - E - \omega) \right)_{\tilde{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}} \\ & + \frac{|\mathcal{M}|^2_{t=0}}{2E} \delta(\tilde{\omega} - \omega) \left(\boldsymbol{q} \nabla_{\tilde{\boldsymbol{p}}} J \right)_{\tilde{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}} \\ & + \frac{J|_{\tilde{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}}}{2E} \delta(\tilde{\omega} - \omega) \left(\boldsymbol{q} \nabla_{\tilde{\boldsymbol{p}}} |\mathcal{M}|^2 \right)_{\tilde{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}} \\ & + |\mathcal{M}|^2_{t=0} J|_{\tilde{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}} \delta(\tilde{\omega} - \omega) \left(\boldsymbol{q} \nabla_{\tilde{\boldsymbol{p}}} \frac{1}{2\tilde{E}} \right)_{\tilde{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}} \Bigg). \end{aligned} \tag{C.60}$$

Bevor wir mit der Rechnung fortfahren, werden wir zeigen, dass die beiden letzten Terme verschwinden. Führt man Kugelkoordinaten ein, so wird das Volumenelement zu $d^3k = d\Omega k^2 dk$ und mit $\omega^2 = k^2 + m^2$ bzw. $kdk = \omega d\omega$ zu $d^3k \to d\Omega \sqrt{\omega^2 - m_\omega^2} \omega d\omega$. Es lässt sich damit die Integration über $\tilde{\omega}$ ausführen, wobei die Delta-Distribution $\delta(\tilde{\omega} - \omega)$ bewirkt, dass $\tilde{\omega} = \omega$ wird. Das Gesamtintegral verschwindet also, da $J|_{\substack{\tilde{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p} \\ \tilde{\omega}=\omega}} = 0$ ist.

Fahren wir nun weiter fort und betrachten

$$C^1 = -(2\pi) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \int \frac{d^3\tilde{k}}{(2\pi)^3 2\tilde{\omega}} \left[\frac{|\mathcal{M}|^2 J}{2\tilde{E}} \left(\boldsymbol{q} \nabla_{\tilde{\boldsymbol{p}}} \delta(\tilde{E} + \tilde{\omega} - E - \omega) \right) + \frac{|\mathcal{M}|^2}{2\tilde{E}} \delta(\tilde{\omega} - \omega) \left(\boldsymbol{q} \nabla_{\tilde{\boldsymbol{p}}} J \right) \right]_{\tilde{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}}. \tag{C.61}$$

Es ist nun notwendig den Ausdruck $\boldsymbol{q} \nabla_{\tilde{\boldsymbol{p}}} \delta(\tilde{E} + \tilde{\omega} - E - \omega)$ in eine nützlichere Form zu bringen, um eine partielle Integration in $\tilde{\omega}$ ausführen zu können. Benutzt man die Kettenregel und $\tilde{E}^2 = \tilde{\boldsymbol{p}}^2 + m^2 \to \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{p}_i} = \frac{\tilde{p}_i}{\tilde{E}}$, so erhält man $\boldsymbol{q} \nabla_{\tilde{\boldsymbol{p}}} \delta(\tilde{E} + \tilde{\omega} - E - \omega) = \frac{\boldsymbol{q} \cdot \tilde{\boldsymbol{p}}}{\tilde{E}} \partial_{\tilde{\omega}} \delta(\tilde{E} + \tilde{\omega} - E - \omega)$ und daraus folgt:

$$C^1 = -(2\pi) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \int \frac{d^3\tilde{k}}{(2\pi)^3 2\tilde{\omega}} \left[\frac{|\mathcal{M}|^2 J}{2\tilde{E}} \left(\frac{\boldsymbol{q} \cdot \tilde{\boldsymbol{p}}}{\tilde{E}} \partial_{\tilde{\omega}} \delta(\tilde{E} + \tilde{\omega} - E - \omega) \right) + \frac{|\mathcal{M}|^2}{2\tilde{E}} \delta(\tilde{E} + \tilde{\omega} - E - \omega) \left(\boldsymbol{q} \nabla_{\tilde{\boldsymbol{p}}} J \right) \right]_{\tilde{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}}. \tag{C.62}$$

Betrachtet man den ersten Term, transformiert ihn in Kugelkoordinaten und führt eine partielle Integration aus, so erhält man

$$\begin{aligned}&\int \frac{d^3\tilde{k}}{(2\pi)^3 2\tilde{\omega}} \left[\frac{|\mathcal{M}|^2 J}{2\tilde{E}} \left(\frac{\boldsymbol{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{p}}}{\tilde{E}} \partial_{\tilde{\omega}} \delta(\tilde{E}+\tilde{\omega}-E-\omega) \right) \right]_{\tilde{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}} \\ &\quad = -\int \frac{d\tilde{\Omega}}{2(2\pi)^3} d\tilde{\omega} \left[\sqrt{\tilde{\omega}^2 - m_{\tilde{\omega}}^2} \frac{|\mathcal{M}|^2}{2\tilde{E}} \left(\frac{\boldsymbol{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{p}}}{\tilde{E}} \partial_{\tilde{\omega}} J \right) \delta(\tilde{E}+\tilde{\omega}-E-\omega) \right]_{\tilde{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}},\end{aligned} \tag{C.63}$$

wobei die Terme, in denen nicht die Ableitung von J auftaucht, wieder verschwinden. Damit erreichen wir:

$$\begin{aligned}C^1 &= -\pi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \int \frac{d^3\tilde{k}}{(2\pi)^3 2\tilde{\omega}} \delta(\tilde{\omega}-\omega) \frac{|\mathcal{M}|^2_{t=0}}{E} \boldsymbol{q} \cdot \left[\nabla_{\tilde{\boldsymbol{p}}} J - \frac{\boldsymbol{p}}{E} \partial_{\tilde{\omega}} J \right]_{\tilde{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}} \\ &= -\pi \int \frac{d\Omega}{2(2\pi)^3} \int \frac{d\tilde{\Omega}}{2(2\pi)^3} \int\int d\omega \; d\tilde{\omega} \; \delta(\tilde{\omega}-\omega) \; \frac{\sqrt{\omega^2 - m_\omega^2}\sqrt{\tilde{\omega}^2 - m_{\tilde{\omega}}^2}}{E} |\mathcal{M}|^2_{t=0} \; \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{l},\end{aligned} \tag{C.64}$$

wobei $\boldsymbol{l} \equiv \left[\nabla_{\tilde{\boldsymbol{p}}} J - \frac{\boldsymbol{p}}{E}\partial_{\tilde{\omega}} J\right]_{\tilde{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}}$ eingeführt wurde.

Betrachten wir nun die hier auftretenden Oberflächenintegrale: Wir legen das Koordinatensystem von $\boldsymbol{k}$ derart, dass der Koordinatenvektor der 3-Richtung in die gleiche Richtung zeigt wie $\boldsymbol{p}$. Dann ist der Polarwinkel θ identisch mit dem Winkel zwischen $\sphericalangle(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k})$. Entsprechend legen wir das Koordinatensystem von $\tilde{\boldsymbol{k}}$, dann ist der Polarwinkel $\tilde{\theta} = \sphericalangle(\tilde{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{p})$.
Damit erhalten wir:

$$\int d\Omega \int d\tilde{\Omega} |\mathcal{M}|^2_{t=0} (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{l}) = \int \sin(\theta) d\theta d\phi \int \sin(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} d\tilde{\phi} |\mathcal{M}|^2_{t=0} (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{l}). \tag{C.65}$$

Drücken wir $|\mathcal{M}|^2$ nun als Funktion der Mandelstam-Variablen s und t aus (wobei t ja bereits Null ist), dann kann man $|\mathcal{M}|^2(s)$ nach $|\boldsymbol{p}|$ entwickeln und erhält:

$$|\mathcal{M}|^2_{t=0}(s) = |\mathcal{M}|^2_{\substack{t=0 \\ \theta=\pi/2}} - \omega \frac{|\boldsymbol{p}|}{E} \cos(\theta) \left(\partial_\omega |\mathcal{M}|^2_{\substack{t=0 \\ \theta=\pi/2}} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{E^2} \right). \tag{C.66}$$

Setzt man dies in (C.65) ein und führt die Integrationen über ϕ durch, die einfach einen Faktor 2π liefern, so erhält man

$$4\pi^2 \int \sin(\theta) d\theta \int \sin(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} \left(|\mathcal{M}|^2_{\substack{t=0 \\ \theta=\pi/2}} - \omega \frac{|\boldsymbol{p}|}{E} \cos(\theta) \left(\partial_\omega |\mathcal{M}|^2_{\substack{t=0 \\ \theta=\pi/2}} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{E^2} \right) \right) (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{l}) \tag{C.67}$$

Verwendet man des Weiteren

$$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{l} = (\tilde{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{l} = |\tilde{\boldsymbol{k}}||\boldsymbol{l}| cos(\tilde{\theta}) - |\boldsymbol{k}||\boldsymbol{l}| \cos(\theta) \tag{C.68}$$

und führt damit die θ und $\tilde{\theta}$ Integrationen aus, so erhält man:

$$\int d\Omega \int d\tilde{\Omega} |\mathcal{M}|^2_{t=0} (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{l}) = 4\pi^2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \omega |\boldsymbol{k}| \frac{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{l}|}{E} \left(\partial_\omega |\mathcal{M}|^2_{\substack{t=0 \\ \theta=\pi/2}} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{E^2} \right). \tag{C.69}$$

Benutzt man jetzt noch, dass $|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{l}| = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{l}$ gilt, dann erhält man:

$$\int d\Omega \int d\tilde{\Omega} |\mathcal{M}|^2_{t=0}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{l}) = \frac{16}{3}\pi^2\omega|\boldsymbol{k}|\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{l}}{E}\left(\partial_\omega |\mathcal{M}|^2_{\substack{t=0\\ \theta=\pi/2}}\right). \tag{C.70}$$

Eingesetzt in C^1 liefert das

$$\begin{aligned} C^1 &= -\frac{1}{6(2\pi)^3}\int\int d\omega d\tilde{\omega}\delta(\tilde{\omega}-\omega)\sqrt{\tilde{\omega}^2 - m_\omega^2}(\omega^2 - m_\omega^2)\omega\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{l}}{E^2}\left(\partial_\omega |\mathcal{M}|^2_{\substack{t=0\\ \theta=\pi/2}}\right) \\ &= -\frac{1}{6(2\pi)^3}\int d\omega\omega|\boldsymbol{k}|^3\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{l}|_{\tilde{\omega}=\omega}}{E^2}\left(\partial_\omega |\mathcal{M}|^2_{\substack{t=0\\ \theta=\pi/2}}\right). \end{aligned} \tag{C.71}$$

Werten wir als nächstes den Ausdruck $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{l}|_{\tilde{\omega}=\omega}$ aus, so erhalten wir zum einen

$$[\nabla_{\tilde{\boldsymbol{p}}} J]_{\substack{\tilde{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}\\ \tilde{\omega}=\omega}} = -g_{\mathrm{SM}} T\partial_\omega g^{\pm}(\omega)\nabla_{\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{p}) \tag{C.72}$$

und zum anderen

$$[\partial_{\tilde{\omega}} J]_{\substack{\tilde{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}\\ \tilde{\omega}=\omega}} = g_{\mathrm{SM}}\left[-\frac{1}{T}\frac{e^{\omega/T}}{(e^{\omega/T}\pm 1)^2}\right] f(\boldsymbol{p}) = g_{\mathrm{SM}}\partial_\omega g^{\pm}(\omega) f(\boldsymbol{p}) \tag{C.73}$$

und damit insgesamt

$$\left[\boldsymbol{p}\cdot\nabla_{\tilde{\boldsymbol{p}}} J - \frac{\boldsymbol{p}^2}{E}\partial_{\tilde{\omega}} J\right]_{\substack{\tilde{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}\\ \tilde{\omega}=\omega}} = -g_{\mathrm{SM}}\partial_\omega g^{\pm}(\omega)\left(T\boldsymbol{p}\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{E}\right) f(\boldsymbol{p}). \tag{C.74}$$

Somit ergibt sich letztendlich

$$C^1 = \frac{g_{\mathrm{SM}}}{6(2\pi)^3}\int d\omega\frac{\omega|\boldsymbol{k}|^3}{E^2}\left(\partial_\omega |\mathcal{M}|^2_{\substack{t=0\\ \theta=\pi/2}}\right)\partial_\omega g^{\pm}(\omega)\left(T\boldsymbol{p}\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{E}\right) f(\boldsymbol{p}). \tag{C.75}$$

Benutzen wir nun noch, dass für sehr schwere nichtrelativistische Teilchen $E = m_\chi$ gilt und betrachten den ultrarelativistischen Limes $\omega = |\boldsymbol{k}|$, dann erhalten wir gerade das Endergebnis für C^1 aus [49]

$$C^1 = \frac{g_{\mathrm{SM}}}{6(2\pi)^3}\int d\omega\frac{\omega|\boldsymbol{k}|^3}{M_\chi^3}\left(\partial_\omega |\mathcal{M}|^2_{\substack{t=0\\ \theta=\pi/2}}\right)\partial_\omega g^{\pm}(\omega)\left(TM_\chi\boldsymbol{p}\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{p}^2\right) f(\boldsymbol{p}). \tag{C.76}$$

Eine entsprechende Rechnung für C^2 werden wir hier nicht vorführen. Wir präsentieren lediglich das Ergebnis aus [49] und berechnen den Gesamtbeitrag $C = C^1 + C^2$. Für C^2 erhält man

$$\begin{aligned} C^2 =& \frac{g_{\mathrm{SM}}}{6(2\pi)^3} m_\chi^{-3}\int d\omega\omega^4 |\mathcal{M}|^2_{\substack{t=0\\ \theta=\pi/2}} \\ &\times [-Tm_\chi^2\partial_\omega g^{\pm}\Delta_{\boldsymbol{p}} + m_\chi(4T\omega^{-1}\partial_\omega g^{\pm} - \partial_\omega g^{\pm} + T\partial_\omega^2 g^{\pm})\boldsymbol{p}\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}} \\ &- 3m_\chi\partial_\omega g^{\pm} + \boldsymbol{p}^2(4\omega^{-1}\partial_\omega g^{\pm} + \partial_\omega^2 g^{\pm})] f(\boldsymbol{p}). \end{aligned} \tag{C.77}$$

Um beide Terme zu addieren, ist es nützlich zunächst eine partielle Integration von C^1 auszuführen, man erhält:

$$C^1 = -\frac{g_{\mathrm{SM}}}{6(2\pi)^3} M_\chi^{-3} \int d\omega |\mathcal{M}|^2_{\substack{t=0 \\ \theta=\pi/2}} \left(4\omega^3 \partial_\omega g^\pm(\omega) + \omega^4 \partial_\omega^2 g^\pm(\omega)\right) \left(T M_\chi \boldsymbol{p} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{p}^2\right) f(\boldsymbol{p}). \tag{C.78}$$

Somit erreicht man insgesamt

$$\begin{aligned} C =& C^1 + C^2 \\ =& \frac{g_{\mathrm{SM}}}{6(2\pi)^3} M_\chi^{-3} \int d\omega |\mathcal{M}|^2_{\substack{t=0 \\ \theta=\pi/2}} \Big[- 4\omega^3 \partial_\omega g^\pm T M_\chi \boldsymbol{p} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} \\ & - \omega^4 \partial_\omega^2 g^\pm T M_\chi \boldsymbol{p} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} - 4\omega^3 \partial_\omega g^\pm \boldsymbol{p}^2 - \omega^4 \partial_\omega^2 g^\pm \boldsymbol{p}^2 \\ & - T\omega^4 m_\chi^2 \partial_\omega g^\pm \Delta_{\boldsymbol{p}} \\ & + (4\omega^3 \partial_\omega g^\pm T m_\chi - m_\chi \omega^4 \partial_\omega g^\pm + \omega^4 \partial_\omega^2 g^\pm T m_\chi) \boldsymbol{p} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} \\ & - 3 m_\chi \omega^4 \partial_\omega g^\pm + 4\omega^3 \partial_\omega g^\pm \boldsymbol{p}^2 + \omega^4 \partial_\omega^2 g^\pm \boldsymbol{p}^2 \Big] f(\boldsymbol{p}) \end{aligned} \tag{C.79}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{g_{\mathrm{SM}}}{6(2\pi)^3} M_\chi^{-2} \int d\omega \; \omega^4 |\mathcal{M}|^2_{\substack{t=0 \\ \theta=\pi/2}} \partial_\omega g^\pm \\ &\qquad \times [T m_\chi \Delta_{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{p} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} + 3] f(\boldsymbol{p}), \end{aligned} \tag{C.80}$$

was mit dem Ergebnis aus [49] identisch ist. Achtet man hingegen noch speziell darauf, dass die Masse m_ω nicht vernachlässigbar ist, dann erhält man als Ergebnis gerade (2.77) mit (2.78).

Literaturverzeichnis

[1] L. Bergström and A. Goobar, *Cosmology and particle Astrophysics*. Springer, 2004.

[2] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry*. Addison Wesley, 2004.

[3] T. Fließbach, *Allgemeine Relativitätstheorie*. Spektrum, 1995.

[4] K. Nakamura and P. D. Group, "Review of particle physics," *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **37** no. 7A, (2010) 075021. http://stacks.iop.org/0954-3899/37/i=7A/a=075021.

[5] F. Zwicky, "On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae," *Astrophys.J.* **86** (1937) 217–246.

[6] V. C. Rubin, J. Burtley, A. Kiasatpoor, B. Klock, G. Pease, E. Rutscheidt, and C. Smith, "Kinematic studies of early-type stars. I. Photometric survey, space motions, and comparison with radio observations.," *Astrophys.J.* **67** (1962) 491–531.

[7] A. Klypin, H. Zhao, and R. S. Somerville, "Lambda CDM-based models for the Milky Way and M31 I: Dynamical models," *Astrophys.J.* **573** (2002) 597–613, arXiv:astro-ph/0110390 [astro-ph].

[8] G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk, "Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints," *Phys.Rept.* **405** (2005) 279–390, arXiv:hep-ph/0404175 [hep-ph].

[9] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*. Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

[10] P. Gondolo and G. Gelmini, "Cosmic abundances of stable particles: Improved analysis," *Nuclear Physics B* **360** no. 1, (1991) 145 – 179. http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVC-4CB7655-6/2/54f0c3950dca99c8f56c5f48b9e357fb.

[11] J. Bernstein, L. S. Brown, and G. Feinberg, "Cosmological heavy-neutrino problem," *Phys. Rev. D* **32** no. 12, (Dec, 1985) 3261–3267.

[12] A. Loeb and M. Zaldarriaga, "The small-scale power spectrum of cold dark matter," *Phys. Rev.* **D71** (2005) 103520, arXiv:astro-ph/0504112.

[13] S. Hofmann, D. J. Schwarz, and H. Stoecker, "Damping scales of neutralino cold dark matter," *Phys.Rev.* **D64** (2001) 083507, arXiv:astro-ph/0104173 [astro-ph].

[14] S. Dodelson, *Modern Cosmology*. ACADEMIC PRESS, 2003.

[15] A. M. Green, S. Hofmann, and D. J. Schwarz, "The power spectrum of SUSY-CDM on sub-galactic scales," *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **353** (2004) L23, arXiv:astro-ph/0309621.

[16] T. Bringmann, "Particle models and the small-scale structure of dark matter," *New Journal of Physics* **11** no. 10, (2009) 105027. http://stacks.iop.org/1367-2630/11/i=10/a=105027.

[17] A. Pinzke, C. Pfrommer, and L. Bergstrom, "Prospects of detecting gamma-ray emission from galaxy clusters: cosmic rays and dark matter annihilations," arXiv:1105.3240 [astro-ph.HE].

[18] J. E. Taylor and J. Silk, "The clumpiness of cold dark matter: Implications for the annihilation signal," *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **339** (2003) 505, arXiv:astro-ph/0207299.

[19] S. M. Koushiappas, "The detection of sub-solar mass dark matter halos," *New J. Phys.* **11** (2009) 105012, arXiv:0905.1998 [astro-ph.CO].

[20] N. Arkani-Hamed, D. P. Finkbeiner, T. R. Slatyer, and N. Weiner, "A theory of dark matter," *Phys. Rev. D* **79** no. 1, (Jan, 2009) 015014.

[21] **PAMELA** Collaboration, O. Adriani *et al.*, "An anomalous positron abundance in cosmic rays with energies 1.5-100 GeV," *Nature* **458** (2009) 607–609, arXiv:0810.4995 [astro-ph].

[22] J. Chang *et al.*, "An excess of cosmic ray electrons at energies of 300-800 GeV," *Nature* **456** (2008) 362–365.

[23] D. P. Finkbeiner, L. Goodenough, T. R. Slatyer, M. Vogelsberger, and N. Weiner, "Consistent Scenarios for Cosmic-Ray Excesses from Sommerfeld-Enhanced Dark Matter Annihilation," *JCAP* **1105** (2011) 002, arXiv:1011.3082 [hep-ph].

[24] D. Hooper, D. P. Finkbeiner, and G. Dobler, "Evidence Of Dark Matter Annihilations In The WMAP Haze," *Phys. Rev.* **D76** (2007) 083012, arXiv:0705.3655 [astro-ph].

[25] D. J. Thompson, D. L. Bertsch, and R. H. O'Neal, Jr., "The highest-energy photons seen by the Energetic Gamma Ray Experiment Telescope (EGRET) on the Compton Gamma Ray Observatory," arXiv:astro-ph/0412376.

[26] D. Hooper, P. Blasi, and P. D. Serpico, "Pulsars as the Sources of High Energy Cosmic Ray Positrons," *JCAP* **0901** (2009) 025, arXiv:0810.1527 [astro-ph].

[27] H. Yuksel, M. D. Kistler, and T. Stanev, "TeV Gamma Rays from Geminga and the Origin of the GeV Positron Excess," *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 051101, arXiv:0810.2784 [astro-ph].

[28] I. Cholis, L. Goodenough, D. Hooper, M. Simet, and N. Weiner, "High Energy Positrons From Annihilating Dark Matter," *Phys. Rev.* **D80** (2009) 123511, arXiv:0809.1683 [hep-ph].

[29] M. Cirelli, M. Kadastik, M. Raidal, and A. Strumia, "Model-independent implications of the e+, e-, anti-proton cosmic ray spectra on properties of Dark Matter," *Nucl. Phys.* **B813** (2009) 1–21, arXiv:0809.2409 [hep-ph].

[30] J. Jaeckel and A. Ringwald, "The Low-Energy Frontier of Particle Physics," *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.* **60** (2010) 405–437, arXiv:1002.0329 [hep-ph]. * Temporary entry *.

[31] S. Andreas, O. Lebedev, S. Ramos-Sanchez, and A. Ringwald, "Constraints on a very light CP-odd Higgs of the NMSSM and other axion-like particles," *JHEP* **08** (2010) 003, arXiv:1005.3978 [hep-ph].

[32] Y. Nomura and J. Thaler, "Dark Matter through the Axion Portal," *Phys. Rev.* **D79** (2009) 075008, arXiv:0810.5397 [hep-ph].

[33] A. De Angelis, G. Galanti, and M. Roncadelli, "Relevance of axion-like particles for very-high-energy astrophysics," arXiv:1106.1132 [astro-ph.HE].

[34] R. Essig, N. Sehgal, L. E. Strigari, M. Geha, and J. D. Simon, "Indirect Dark Matter Detection Limits from the Ultra-Faint Milky Way Satellite Segue 1," *Phys. Rev.* **D82** (2010) 123503, arXiv:1007.4199 [astro-ph.CO].

[35] J. L. Feng, M. Kaplinghat, and H.-B. Yu, "Halo Shape and Relic Density Exclusions of Sommerfeld- Enhanced Dark Matter Explanations of Cosmic Ray Excesses," *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010) 151301, arXiv:0911.0422 [hep-ph].

[36] M. R. Buckley and P. J. Fox, "Dark Matter Self-Interactions and Light Force Carriers," *Phys. Rev.* **D81** (2010) 083522, arXiv:0911.3898 [hep-ph].

[37] J. D. Bjorken, R. Essig, P. Schuster, and N. Toro, "New Fixed-Target Experiments to Search for Dark Gauge Forces," *Phys. Rev.* **D80** (200) 075018, arXiv:0906.0580 [hep-ph].

[38] J. P. Leveille, "The Second Order Weak Correction to (G-2) of the Muon in Arbitrary Gauge Models," *Nucl. Phys.* **B137** (1978) 63.

[39] J. Hisano, S. Matsumoto, M. M. Nojiri, and O. Saito, "Non-perturbative effect on dark matter annihilation and gamma ray signature from galactic center," *Phys.Rev.* **D71** (2005) 063528, arXiv:hep-ph/0412403 [hep-ph].

[40] F. Schwabl, *Quantenmechanik*. Springer, 2002.

[41] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview, 1995.

[42] S. Hannestad and T. Tram, "Sommerfeld Enhancement of DM Annihilation: Resonance Structure, Freeze-Out and CMB Spectral Bound," *JCAP* **1101** (2011) 016, arXiv:1008.1511 [astro-ph.CO]. * Temporary entry *.

[43] D. J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*. John Wiley & Sons, Inc., 1987.

[44] F. Halzen and A. D. Martin, *Quarks & Leptons*. John Wiley & Sons, 1984.

[45] G. Arcadi and P. Ullio, "Accurate estimate of the relic density and the kinetic decoupling in non-thermal dark matter models," arXiv:1104.3591 [hep-ph].

[46] F. Scheck, *Mechanik*. Springer, 2007.

[47] W. Nolting, *Theoretische Physik 6: Statistische Physik*. Springer, 2011.

[48] H. Haug, *Statistische Physik*. Springer, 2006.

[49] T. Bringmann and S. Hofmann, "Thermal decoupling of WIMPs from first principles," *JCAP* **0407** (2007) 016, arXiv:hep-ph/0612238 [hep-ph].

[50] O. Forster, *Analysis 3*. vieweg, 1999.

Danksagung

Ich möchte als erstes Herrn Dr. Torsten Bringmann danken, der die Anfertigung dieser Arbeit erst ermöglicht hat und mir jederzeit mit Rat und Tat zur Seite stand. Ferner möchte ich Laura van den Aarssen danken für die Zusammenarbeit, die Diskussionen und die Unterstützung, sowie meinen Bürokollegen und Freund Andrey Saveliev für interessante und anregende Diskussionen über physikalische und nichtphysikalische Themen und die immerwährende Hilfsbereitschaft bei allen (technischen) Problemen.
Mein spezieller Dank gilt außerdem meiner Freundin Julia Weber und Andrey Saveliev für die Durchsicht und Rechtschreibkorrektur dieser Arbeit. Des Weiteren möchte ich noch meiner Mutter dafür danken, dass sie mir das Studium der Physik überhaupt erst ermöglicht hat, sowie ihr und meiner Freundin dafür, dass sie mich immer unterstützt haben und für mich da waren.

Erklärung gemäß Diplomprüfungsordnung

Hiermit versichere ich, Yasar Goedecke, die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen als Hilfsmittel verwendet zu haben. Weiterhin erkläre ich mich mit dem Verleih und der Veröffentlichung dieser Arbeit einverstanden.

Hamburg, den _____ _____

Yasar Goedecke