



Mekanikk for Fysikk-OL-elever, 2023

Ellen K. Henriksen

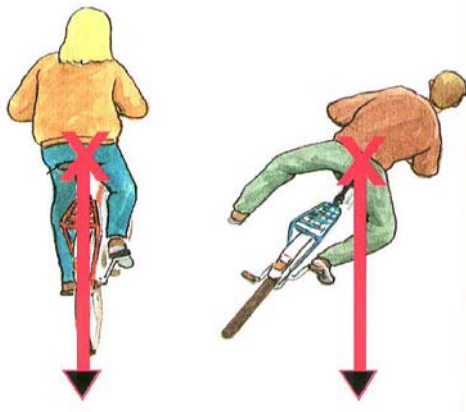


Massesenter (og tyngdepunkt)

- En "gjennomsnittlig" posisjon for hele massen (tyngden) til et system eller et legeme.
- Hvis legemet / systemet har et geometrisk senter, ligger massesenteret i sentrum (for eksempel ei kule, en terning)
- Hvis legemet / systemet har en symmetriakse, ligger massesenteret på denne (for eksempel et hjul, et glass)
- Skal vi balansere et legeme / system på ett punkt, må dette punktet ligge på samme vertikale linje som massesenteret (tyngdepunktet).

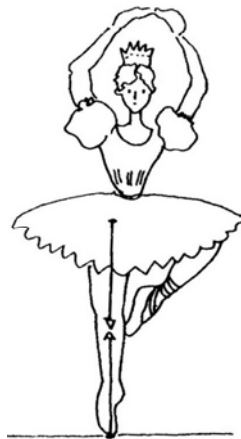
*Alle masse-
punktene i
legemet
beveger seg
parallelt i én
retning uten
at legemet
roterer*

Et legeme kan behandles som en punktpartikkel med posisjon lik massesenterets posisjon dersom det bare har *translatorisk* bevegelse, ikke *rotasjonsbevegelse*.



Hvis tyngdepunktet er rett over understøttelsespunktet, balanserer vi.

Er tyngdepunktet IKKE rett over understøttelsespunktet, faller vi.



Massesentersatsen

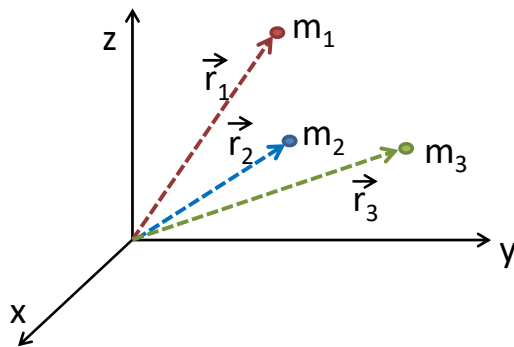
Når et legeme påvirkes av ytre krefter, vil massesenteret bevege seg som om all massen var konsentrert i det punktet og var påvirket av en netto kraft lik summen av alle de ytre kreftene på systemet.

Er summen av ytre krefter på et system lik null, vil massesenteret bevege seg med konstant hastighet, og bevegelsesmengden er bevart.



Se, en seilbåt! Den seiler enda det er blikkstill. Hvordan går det for seg?

Massesenter for et utstrakt legeme/system



$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}$$

$$z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

→ Eksempel: OPPG 3

Oppgave 3: Massesenter for jord-måne



$$m_J = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$r = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$$



$$m_M = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

Symmetribetraktninger tilsier at CM må ligge på akse $C_J - C_M$. Legger x-akse med sentrum i C_J

$$x_{CM} = \frac{m_J x_J + m_M x_M}{m_J + m_M} = \frac{0 + 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}}{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} + 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}}$$

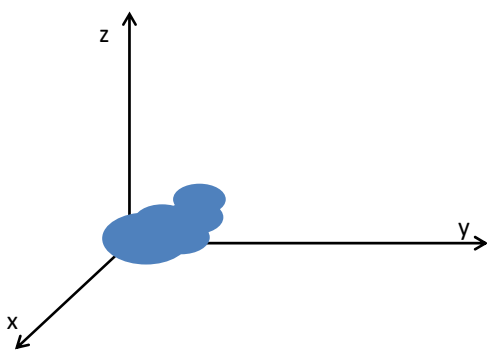
$$x_{CM} = \underline{4,66 \cdot 10^6 \text{ m}} \text{ (altså inne i jorda, ved ca. } 2/3 r_J \text{)}$$

Strategi for oppgaveløsning

Skriv fram tydelig hvordan du tenker! Skriv leselig!

HVA VET DU?	LES	Les oppgaven nøye
	SKRIV	Skriv ned gitte størrelser og identifiser den ukjente variabelen
	TEGN	Tegn figur med gitte størrelser og data
HVA SKAL DU FINNE?	ANALYSER OG SKRIV	Analyser problemet med utgangspunkt i grunnleggende fysiske prinsipper og skriv ned den ukjente variabelen og sammenhenger der den inngår sammen med størrelser du kjenner → regnestykke/likninger
	REGN	Regn ut (bruk symboler helt til den ukjente er isolert på én side)
HVA HAR DU FUNNET?	TOLK	Tolk og vurder svaret. Ved tallregning: Sjekk enheter
	NYT OG REFLEKTER	Nyt mestringen og tenk gjennom hva du har lært av å løse oppgaven

Uformelig, tredimensjonalt legeme:



$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

→ Eksempel: OPPG 7 a

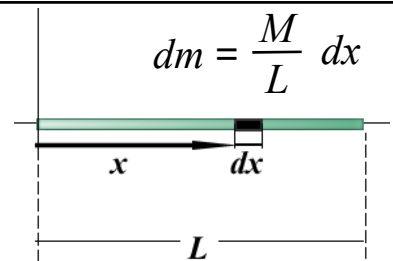
→ Eksempel: OPPG 7 a

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

$$x_{CM} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int x \frac{M}{L} dx$$

$$x_{CM} = \frac{1}{L} \int_0^L x dx$$

$$x_{CM} = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^L = \frac{1}{L} \cdot \frac{L^2}{2} = \underline{\underline{\frac{L}{2}}}$$



**Hva skjer med massesenteret
når legemet beveger seg?**

$$\frac{dx_l}{dt} = v_{lx} \quad \frac{dy_l}{dt} = v_{ly} \quad \frac{dz_l}{dt} = v_{lz}$$

$$v_{CM(x)} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + m_3 v_{3x} + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}$$

$$v_{CM(y)} = \frac{m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + m_3 v_{3y} + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}$$

$$v_{CM(z)} = \frac{m_1 v_{1z} + m_2 v_{2z} + m_3 v_{3z} + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}$$

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{d}{dt} \vec{r}_{\text{CM}}$$

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{d}{dt} \frac{(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots)}{m_1 + m_2 + \dots}$$

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots}{M}$$

$$M \vec{v}_{\text{CM}} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots$$

Total bevegelsesmengde er summen av bevegelsesmengde for de enkelte partiklene

For et legeme der summen av de ytre kreftene er null, vil massesenteret ha konstant hastighet.

Er det ytre krefter, vil massesenterets fart endre seg.

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{d \vec{v}_{\text{CM}}}{dt}$$

$$M \vec{a}_{\text{CM}} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots$$

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_1 + \sum \vec{F}_2 + \dots$$

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{indre}} + \sum \vec{F}_{\text{ytre}}$$

$$M \vec{a}_{\text{CM}} = \sum \vec{F}_{\text{ytre}}$$

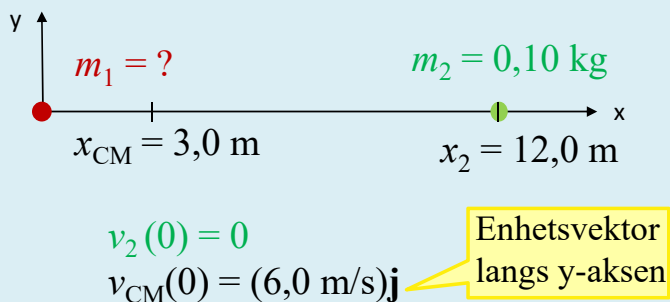
Når et legeme/system påvirkes av ytre krefter, beveger massesenteret seg som om all massen var samlet i det punktet og var påvirket av en kraft lik summen av de ytre kreftene på legemet/systemet.

→ Eksempel: OPPG 4

a) Massen til partikkelen i origo:

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$m_1 = \underline{0,3 \text{ kg}}$$



c) Farten til partikkelen i origo (part. 1):

$$Mv_{\text{CM}} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

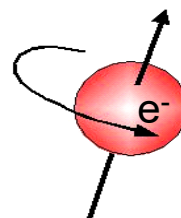
$$v_1 = \frac{Mv_{\text{CM}}}{m_1} = \frac{(0,3 \text{ kg} + 0,10 \text{ kg}) \cdot (6,0 \text{ m/s})\mathbf{j}}{0,3 \text{ kg}} = \underline{(8,0 \text{ m/s})\mathbf{j}}$$



ROTASJON

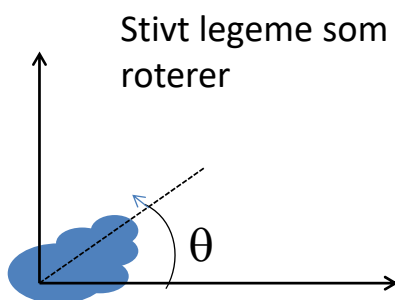
Rotasjon – at noe snurrer rundt – er et utbredt fenomen i naturen.

Store og små ting snurrer: Galakser (stjernehop), sykkelhjul – og ørsmå elektroner.



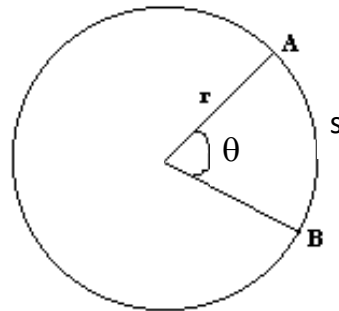
Begreper relatert til ROTASJON

- Radianer, vinkelhastighet, vinkelakselerasjon
- Bevegelsesligninger for rotasjon
- Rullebevegelse
- Kraftmoment τ
- Tregghetsmoment I
- Rotasjonskinetisk energi
- Spinn (angulærmoment, L) og spinnbevaring



Vinkelhastighet (i radianer/sekund)

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$



$$\theta = \frac{s}{r}$$

RADIANER

Fart og vinkelfart (v og ω)

Lineært (m/s)

$$v$$
$$s / t$$

Angulært (rad/s)

$$\omega$$
$$\theta / t$$

$$s = r \theta$$

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$

$$v = r \omega$$

Vinkelakselerasjon

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Vi kan tenke på ω og α som vektorstørrelser og bruke høyrehåndsregelen for å finne retningen.

Akselerasjon og vinkelakselerasjon (a og α)

Lineært (m/s²)

a

$$(v - v_0) / t$$

Angulært (rad/s²)

α

$$(\omega - \omega_0) / t$$

Bevegelsesligninger for rotasjon

$$s = v_0 t + 1/2 a t^2$$

$$\theta = \omega_0 t + 1/2 \alpha t^2$$

$$v = v_0 + a t$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

Sammenhengen
mellom lineær
fart og vinkelfart

$$v = r \omega$$

Sammenhengen mellom lineær
akselerasjon og vinkelakselerasjon

$$a_{tan} = r \alpha$$

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \frac{(r \omega)^2}{r} = r \omega^2$$

→ Eksempel: OPPG 12

Et hjul dreier med konstant vinkelakselerasjon
 $\alpha = 0,450 \text{ rad/s}^2$

a)

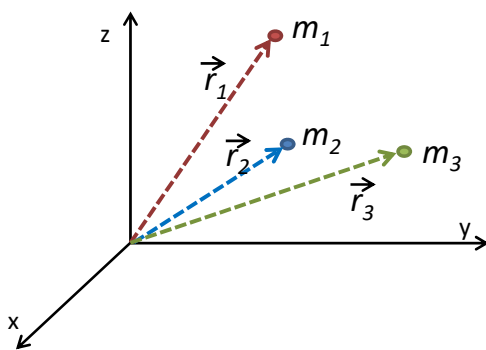
$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$t = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{8,00 \text{ rad}}{0,450 \text{ rad/s}^2} = \underline{17,8 \text{ s}}$$

b) Hvor mange omdreininger?

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,450 \text{ rad/s}^2 \cdot (17,8 \text{ s})^2 = 71,1 \text{ rad} = \frac{71,1}{2\pi} = \underline{11,3 \text{ runder}}$$

Rotasjonskinetisk energi



Vi tenker oss et legeme satt sammen av massepartikler med masse m_1, m_2, m_3 osv., og med avstander r_1, r_2, r_3 osv. fra rotasjonsaksen.

$$v_i = r_i \omega$$

$$E_{\text{kin}(i)} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

$$E_{\text{kin(TOT)}} = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2$$

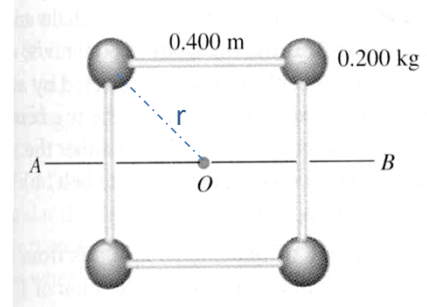
$$E_{\text{kin(TOT)}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Vi definerer dette som treghetsmoment, I .

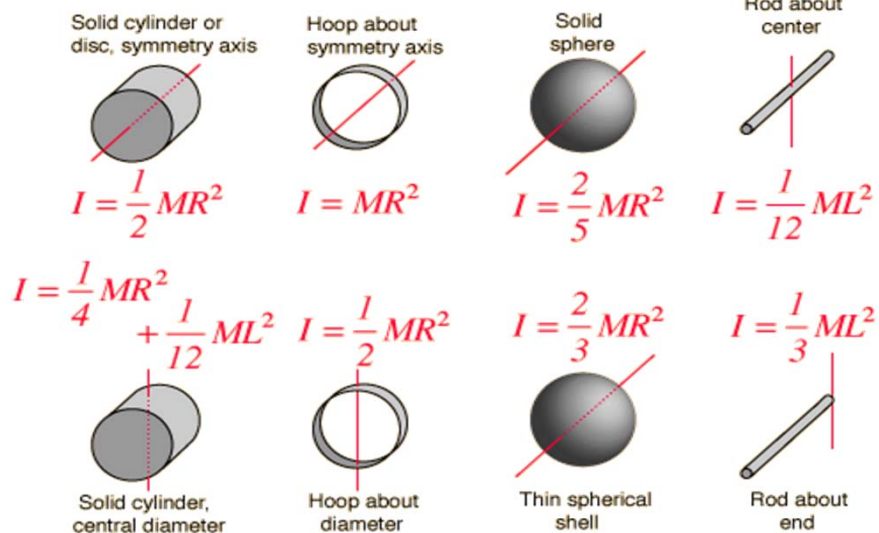
$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm$$

→ Eksempel: OPPG 20a

$$\begin{aligned}
 a) \quad I &= \sum m_i r_i^2 \\
 &= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 \\
 &= 4 m r^2 \\
 &= 4 \cdot 0,200 \text{ kg} \cdot 0,08 \text{ m}^2 \\
 &= \underline{\underline{0,064 \text{ kgm}^2}}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 r^2 &= (0,200 \text{ m})^2 + (0,200 \text{ m})^2 \\
 r^2 &= 0,08 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$



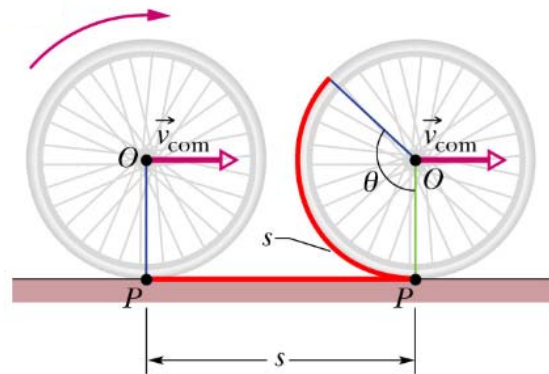
Merk: Samme legeme kan ha ulike **treghetsmomenter** avhengig av hvilken akse det roterer rundt!

Å rulle uten å gli

Når et hjul eller ei kule ruller uten å gli, er kontaktpunktet mot bakken instantant i ro, dvs. det er ingen bevegelse (ingen glidning) mellom hjulet og bakken.

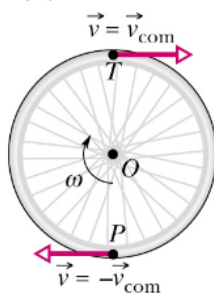
Når massesenteret har flyttet seg en distanse s , har hjulet rotert vinkelen θ om sitt massesenter.

$$v_{CM} = ds/dt = d(\theta R)/dt = \omega R$$



- Rolling viewed as a combination of pure rotation and pure translation

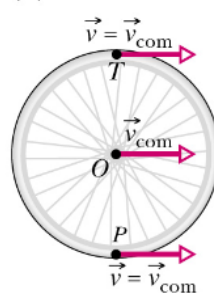
(a) Pure rotation



Ren rotasjon

+

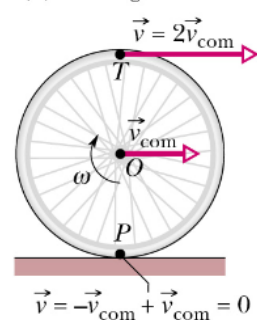
(b) Pure translation



Ren translasjon (f.eks glidning uten friksjon)

=

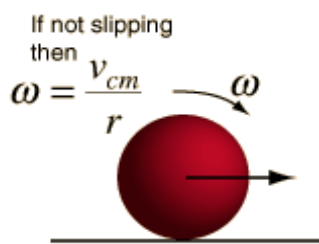
(c) Rolling motion



Rulling: Kontaktpunktet mot bakken er instantant i ro

Total kinetisk energi ved rulling

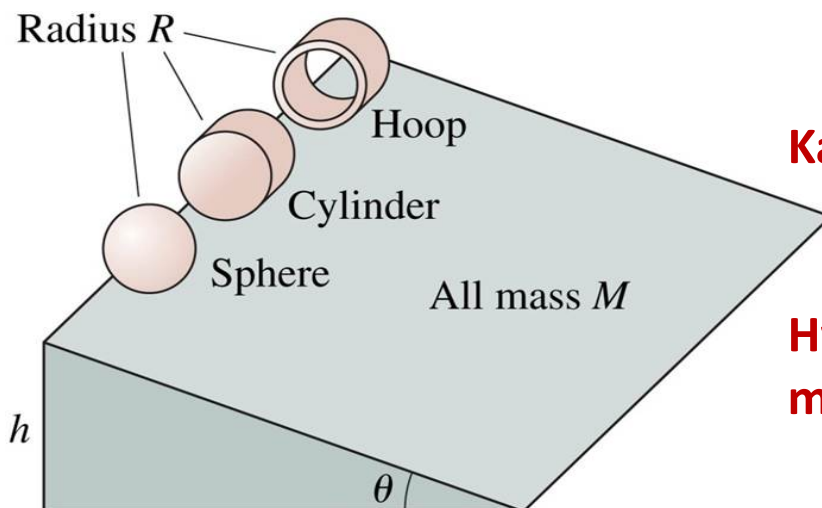
Vi kan se på den kombinerte bevegelsen som en kombinasjon av at massesenteret flytter seg lineært og at legemet roterer om en akse gjennom massesenteret.



Total kinetisk energi for bevegelsen:

$$E_k = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

→ Eksempel: OPPG 33



Kappløp!

Hvilken kommer først ned?

Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hoocyl2.html#c1>

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\cancel{M}gh = \frac{1}{2} \cancel{M}v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cancel{C}MR^2(v_{CM}/R)^2$$

$$gh = \frac{1}{2} v_{CM}^2 + \frac{1}{2} C v_{CM}^2$$

$$2gh = v_{CM}^2 (1+C)$$

$$v_{CM}^2 = \frac{2gh}{(1+C)}$$

Farten ved bunnen avhenger hverken av massen eller radien til det rullende objektet – kun av massefordelingen (treghetsmomentet).

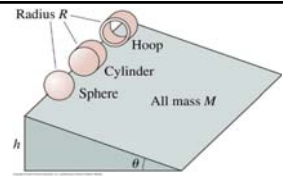
Det objektet der C er minst, vil ha størst v_{CM} ved bunnen av banen – altså kula!

$$I_{kule} = \frac{2}{5}MR^2$$

$$I_{ring} = MR^2$$

$$I_{sylinder} = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I_{generell} = CMR^2$$

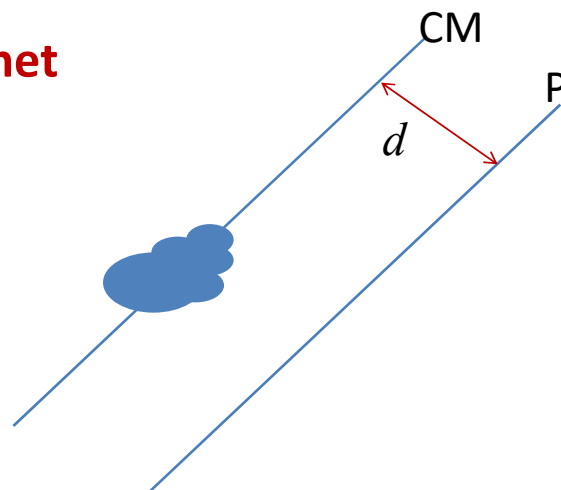


Hvilken kommer først ned?

- Den som konverterer størst andel av sin potensielle energi til translatorisk kinetisk energi og minst andel til rotasjonskinetisk energi!

Parallellaksesteoremet

$$I_P = I_{CM} + M d^2$$

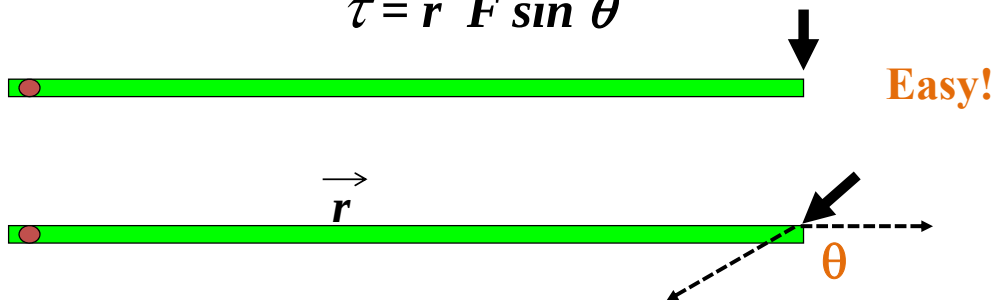


Treghetsmomentet for en akse gjennom massesenteret er mindre enn treghetsmomentet for enhver annen parallell akse.

Kraftmoment

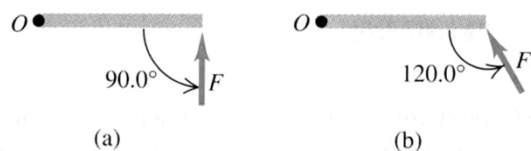
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = r F \sin \theta$$



→ Eksempel: OPPG 29 a og b

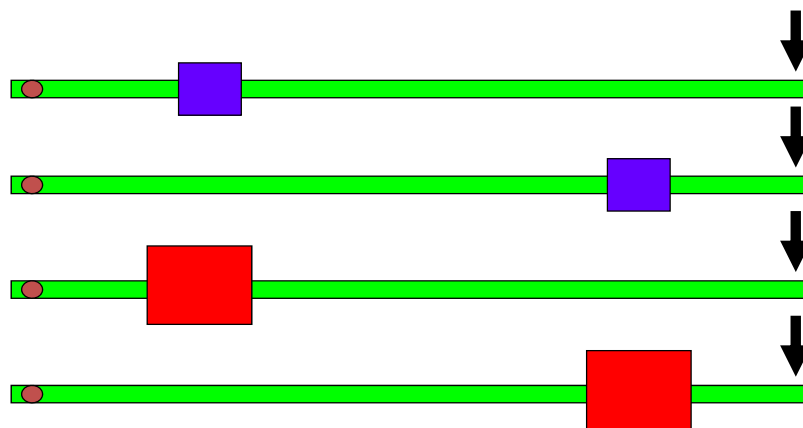
Beregn kraftmomentet fra kraften F om punkt O i hver av følgende 6 situasjoner. I hvert tilfelle har objektet som kraften brukes på, en lengde på 4,00 m, og kraften er på 15,0 N.



a) $\tau = r \times F = L \cdot F \cdot \sin 90^\circ = 4,00 \text{ m} \cdot 15,0 \text{ N} = \underline{\underline{60,0 \text{ Nm}}}$

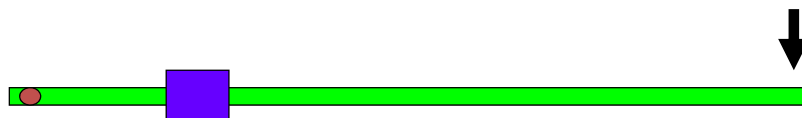
b) $\tau = r \times F = L \cdot F \cdot \sin 120^\circ = 4,00 \text{ m} \cdot 15,0 \text{ N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{52,0 \text{ Nm}}}$

Samme kraft på alle stavene. Hvilken får størst vinkelakselerasjon?



Denne får størst vinkelakselerasjon.

Massen er liten, og massesenteret er nær rotasjonsaksen.



Tregghetsmoment igjen!

$$F = m a$$

Kraft = masse · (lineær) akselerasjon

$$\tau = I \alpha$$

Kraftmoment = tregghetsmoment · vinkelakselerasjon

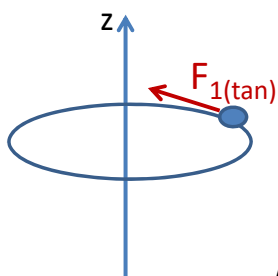


Kraftmoment: Enkel utledning

Vi ser på et lite masseelement m_1 i et legeme som roterer om z-aksen.

Hvilken virkning har kraften F_1 på rotasjonen?

Vi skjønner at bare krefter tangentielt til banen kan bidra.



$$F_{1(tan)} = m_1 a_{1(tan)}$$

$$a_{tan} = r \alpha$$

$$F_{1(tan)} = m_1 r_1 \alpha$$

$$F_{1(tan)} r_1 = m_1 r_1^2 \alpha$$

$$= \tau_1$$

$$\tau_1 = I_1 \alpha$$

$$= I_1$$

Balansere hammer på fingertupp: Hodet opp eller hodet ned?



Kan dere bruke begrepene *kraftmoment*, *tregghetsmoment* og *vinkelakselerasjon* til å resonnerer rundt dette spørsmålet?

Arbeid i rotasjonsbevegelse

$$dW = F_{tan} ds$$

$$dW = F_{tan} R d\theta$$

$$dW = \tau d\theta$$

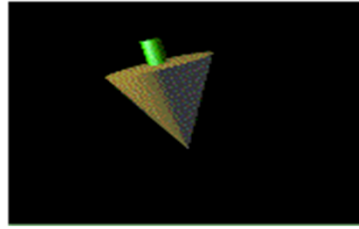
$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$$

Hvis τ er konstant:

$$W = \tau \Delta\theta$$

(lineært: $W = F \Delta s$)

SPINN!



Hvis

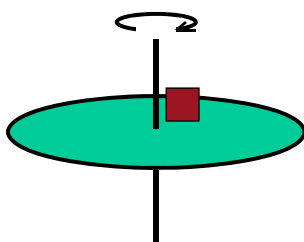
kraftmoment er «rotasjonens svar på kraft»,

er

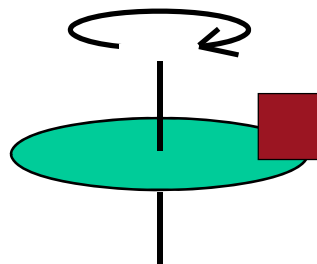
spinn «rotasjonens svar på bevegelsesmengde»

SPINN

Spinnet er bestemt av rotasjonshastigheten og hvordan massen er fordelt rundt rotasjonsaksen.



Liten fart og/eller massen
samlet nær midten – lite spinn



Stor fart og/eller mye masse
langt fra midten – stort spinn

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Spinnvektoren er rettet vinkelrett på det planet rotasjonsbevegelsen foregår i.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} \right) + \left(\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$$

$= 0$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Endringen i spinn er lik kraftmomentet fra nettokraften på partikkelen - tenk på

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F$$

Spinn (angulærmoment), $\vec{L}$

$$\vec{L} = I \omega$$

Bevaring av spinn

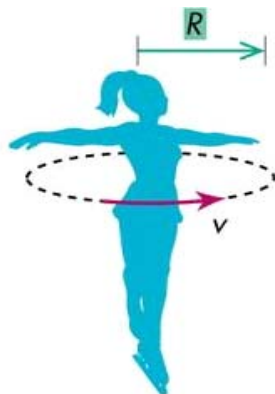
Ingen eksterne kraftmomenter:
SPINNET ER BEVART!

$$\Sigma \tau = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

Bevaring av spinn – en fundamental naturlov

Isdanseren sparker fra mot isen og gir seg selv et visst spinn. Så trekker hun armene inn mot kroppen. Da snurrer hun fortere, slik at spinnet er det samme som før hun trakk inn armene.

FØR: Liten
fart, mye
masse
langt ute

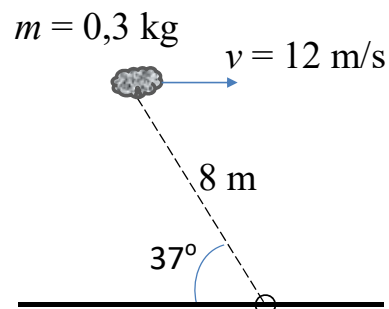


ETTER:
Stor fart,
mye
masse
nær
midten



→ Eksempel: OPPG 35

En stein på 0,300 kg har en horisontal fart på 12,0 m/s. Hva er spinnet til steinen om et punkt O på bakken i det øyeblikket da steinen befinner seg over og til venstre for O slik at avstanden fra steinen til O er 8,0 m og linjen mellom steinen og O danner en vinkel på 37° med bakken?



$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$L = 8 \text{ m} \cdot 0,3 \text{ kg} \cdot 12 \text{ m/s} \cdot \sin(180^\circ - 37^\circ)$$

$$\underline{\underline{L = 17 \text{ kgm}^2/\text{s}}}$$

Retning?

<https://www.naturfag.no/forsok/vis.html?tid=481067>

Det gjelder å aldri slutte å undre seg...



Fysikerne Wolfgang Pauli (t.v.) og Niels Bohr (t.h.) var to av kvantefysikkens fedre. Her studerer de en snurrebass av typen "tippetopp".