Fysikkolympiaden – Norsk finale 2018
Løsningsforslag

Oppgave 1

Det virker tre krefter: Tyngden $G = mg$, normalkrafta fra veggen, som må være sentripetalkrafta $N = mv^2/R$ og friksjonskrafta F oppover parallelt med veggen. Summen av vertikalkreftene må være null, og dermed er $F = G = mg$. For å finne vinkelen θ mellom normalen til veggen og motorsykkelen må vi se på kraftmoment om tyngdepunktet. Vi kaller avstanden fra bakken til tyngdepunktet når sykkelen står vertikalt for L. Da er kraftmomentet til normalkrafta $\tau_N = NL\sin\theta$ og til friksjonen $\tau_F = FL\cos\theta$. Tyngden virker i tyngdepunktet, og har derfor ikke noe kraftmoment. For at sykkelen ikke skal velte noen vei må de to kraftmomentene være like:

$$\begin{aligned} NL\sin\theta &= FL\cos\theta \\ m\frac{v^2}{R}\sin\theta &= mg\cos\theta \\ \tan\theta &= \frac{gR}{v^2}. \end{aligned}$$

Oppgave 2

La partikkelen med massen M og positiv ladning Q ligge til venstre for den med negativ ladning $-q$. Siden de to ladningene har motsatt fortegn vil de trekkes mot hverandre. Det vil si en kraft mot høyre på den positive ladningen. For at de skal fortsette å ha konstant avstand L må kreftene fra det uniforme elektriske feltet motvirke tiltrekningen. Det vil si at feltet må være rettet fra høyre mot venstre, slik at det gir en kraft mot venstre på den positive ladningen og mot høyre på den negative. Hvis $q \neq Q$ kan vi ikke få kraftsummen til å bli null for begge partiklene samtidig, så vi kan ikke få begge til å ligge i ro. Men vi kan få til at de får samme akselerasjon, a, og dermed vil avstanden være konstant. Vi får Newtons 2. lov for hver partikkel:

$$\begin{aligned} k_e\frac{Qq}{L^2} - QE &= Ma \\ qE - k_e\frac{Qq}{L^2} &= ma. \end{aligned}$$

Vi eliminerer a fra disse to likningene og løser for

$$L = \sqrt{\frac{k_e Qq(M+m)}{E(Mq+mQ)}}.$$

Oppgave 3

Vi lar massen til tauet være M og masse per lengde $\lambda = M/L$. Da er tyngdekrafta på den delen som henger utfor kanten på bordet $G = \lambda x g$ og friksjonskrafta på den delen av tauet som ligger på bordet er $F \leq \mu\lambda(L-x)g$. For at snora skal ligge i ro må $F = G$, og den maksimale lengden x_m får vi når friksjonen er maksimal:

$$\lambda x g = \mu\lambda(L-x)g$$

som vi kan løse og få

$$x_m = \frac{\mu}{1+\mu}L. \tag{1}$$

Når $x_0 = x_m + z_0 > x_m$ er $G > F$ og tauet glir. Vi får da

$$Ma = G - F = \lambda x g - \mu\lambda(L-x)g$$

Hvis vi setter inn $x = x_m + z$ og bruker likning (1) og $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}$ får vi

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{(1+\mu)g}{L}z = \frac{1}{\tau^2}z$$

når vi definerer $\tau = \sqrt{\frac{(1+\mu)g}{L}}$. Den generelle løsningen av denne likningen er

$$z = Ae^{t/\tau} + Be^{-t/\tau}.$$

For å bestemme integrasjonskonstantene A og B bruker vi initialbetingelsene

$$\frac{dz}{dt}(0) = \frac{A}{\tau} - \frac{B}{\tau} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = B$$

og

$$z(0) = A + B = z_0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = B = \frac{z_0}{2}$$

Dermed er den løsningen vi trenger

$$z = \frac{z_0}{2}\left(e^{t/\tau} + e^{-t/\tau}\right).$$

Hele tauet er utenfor kanten når $L = x = x_m + z_L$, eller $z = z_L = L - x_m$. Det tar tida

$$t = \tau \ln\left[\frac{z_L}{z_0} + \sqrt{\left(\frac{z_L}{z_0}\right)^2 + 1}\right].$$

Alternativt kan løsningen uttrykkes ved hyperbolske funksjoner:

$$z = z_0 \cosh \frac{t}{\tau}$$

og

$$t = \tau \operatorname{arcosh} \frac{z_L}{z_0}$$

Oppgave 4

Indre energi er $U = \frac{5}{2}nRT$. Tilstandslikningen sier at $pV = nRT$. Det betyr at vi kan skrive $U = \frac{5}{2}pV$. Siden p og V er konstante vil også U være det. Det er altså like mye indre energi etter oppvarmingen som før. Når vi varmer opp lufta vil hvert molekyl i gjennomsnitt få mer energi. Men siden gassen samtidig utvider seg, betyr det at noen molekyler presses ut. Antallet molekyler blir derfor mindre, og den totale energien er konstant.

Oppgave 5

Siden $V_{AB} = V_{BC} = V_{CD}$ er de tre motstandene like, og vi kaller resistansen i dem R, mens resistansen i voltmeteret er R_V. Når vi måler V_{AB} har vi R og R_V i parallell, som gir resistansen

$$R_{AB} = \frac{RR_V}{R + R_V} = R\frac{\alpha}{\alpha + 1}$$

der $\alpha = R_V/R$. Denne er i serie med $2R$, så totalresistansen i kretsen er

$$R_{AB}^{tot} = R\frac{\alpha}{\alpha + 1} + 2R = R\frac{3\alpha + 2}{\alpha + 1}$$

Strømmen gjennom kretsen er da $I_1 = V_0/R_{AB}^{tot}$ og spenningen

$$V_{AB} = R_{AB}I_1 = V_0\frac{R_{AB}}{R_{AB}^{tot}} = V_0\frac{\alpha}{3\alpha + 2}$$

Når vi måler V_{AC} har vi $2R$ og R_V i parallell, som gir resistansen

$$R_{AC} = \frac{2RR_V}{2R + R_V} = R\frac{2\alpha}{\alpha + 2}$$

Denne er i serie med R, så totalresistansen i kretsen er

$$R_{AC}^{tot} = R\frac{2\alpha}{\alpha + 2} + R = R\frac{3\alpha + 2}{\alpha + 2}$$

Strømmen gjennom kretsen er da $I_2 = V_0/R_{AC}^{tot}$ og spenningen

$$V_{AC} = R_{AC} I_2 = V_0 \frac{R_{AC}}{R_{AC}^{tot}} = V_0 \frac{2\alpha}{3\alpha + 2} = 2V_{AB} = 40 \text{ V}.$$

Siden batteriet ikke har indre resistans er $V_{AD} = v_0 = 62$ V.

Oppgave 6

Vi kaller radien til stokken r, farten idet gresshoppa hopper v_0, farten på det høyeste punktet i banen v_t og høyden på det høyeste punktet h. Det er klart at den banen som gir minst v_0 må tangere sylinderen, og dette kan skje enten bare i ett punkt på toppen, eller i to punkter symmetrisk på hver side. Hvis den bare tangerer på toppen må krumningen der ikke være større enn krumningen til sylinderen, og for den minimale v_0 må den være lik. Det vil si at tyngden akkurat gir stor nok sentripetalakselerasjon til å følge en sirkel med radien r:

$$g = \frac{v_t^2}{r}.$$

Energibevaring gir at

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_t^2 + 2mgr.$$

Dermed er minste startfart

$$v_0^2 = 5gr. \tag{2}$$

For en bane som har et toppunkt høyere enn $2r$, og som tangerer symmetrisk på vei opp og ned kan vi tenke oss at vi starter på toppen med horisontal hastighet v_t. Posisjon som funksjon av tid er da

$$\begin{aligned} x &= v_t t \\ y &= h - \frac{1}{2} g t^2 = h - \frac{g}{2v_t^2} x^2 = h - kx^2 \end{aligned}$$

For at banen skal holde seg på utsida av stokken må

$$x^2 + (y - r)^2 \geq r^2$$

Hvis vi setter inn og regner ut betyr det at

$$k^2 x^4 + (2kh - 2kr - 1)x^2 + h^2 - 2hr \geq 0$$

Dette er en andregradslikning for x^2, og den har reelle løsninger hvis det som kommer under rottegnet i løsningen er positivt:

$$(2kh - 2kr - 1)^2 - 4k^2 h(h - 2r) \geq 0.$$

Banen tangerer hvis dette uttrykket er lik 0, dvs

$$2k(h - r) - 1 = 2k\sqrt{h(h - 2r)}$$

Vi setter inn for k og får

$$v_t^2 = g\left[h - r - \sqrt{h(h - 2r)}\right].$$

Startfarten er da fra energibevaring

$$v_0^2 = v_t^2 + 2gh = g\left[3h - r - \sqrt{h(h - 2r)}\right]. \tag{3}$$

Vi må finne den høyden som gir minimum:

$$\frac{dv_0^2}{dh} = g\left[3 - \frac{h - r}{\sqrt{h(h - 2r)}}\right] = 0,$$

som har løsningen

$$h = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + 1\right).$$

Vi setter dette inn i (3) og får den minste startfarten

$$v_0^2 = 2(1 + \sqrt{2})gr$$

Vi sammenlikner med (2), og ser at den gav høyere startfart. Det er altså best å ha et toppunkt som ligger høyere enn toppen av stokken, og tangere den på vei opp og ned.