



UiO : **Fysisk institutt**

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Niels Henrik Abel og den halvte-deriverte

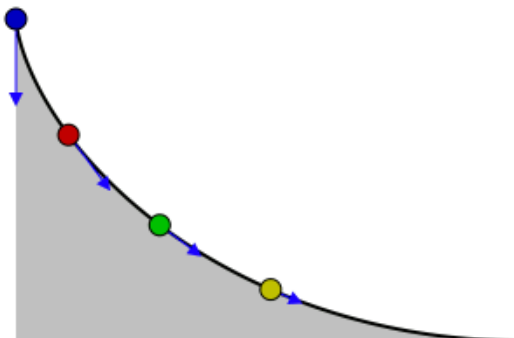
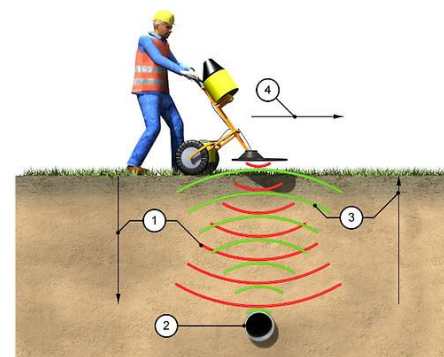
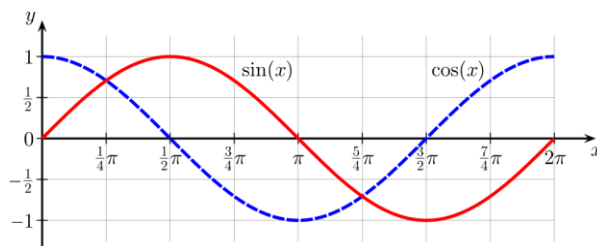
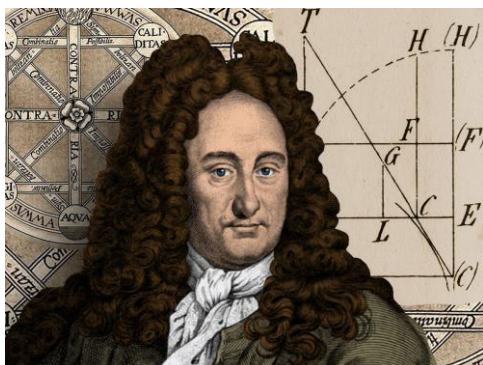
$$\frac{d^{0.5} f(t)}{dt^{0.5}}$$



Sverre Holm, professor



Niels Henrik Abel og den halvte-deriverte



Abels n-te deriverte, 1823

Differentieres Værdien for s n Gange, saa faaer man

$$\frac{d^n s}{dx^n} = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \cdot \psi x,$$

altsaa naar s sættes $= \phi x$

$$\frac{d^n \phi a}{da^n} = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \cdot \int \frac{\phi^1 x \cdot dx}{(a-x)^n} \quad (x=0, x=a)$$

$$\frac{d^n \Phi(a)}{da^n} = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \int_{x=0}^{x=a} \frac{\Phi^1(x)}{(a-x)^n} dx, \quad 0 < n < 1$$

$$\Gamma(k) = (k-1)! = 1 \cdot 2 \cdots (k-2) \cdot (k-1)$$

Gammafunksjon = fakultetsfunksjon for reelle tall



Joseph Liouville
(1809 – 1882)



Georg Friedrich Bernhard
Riemann (1826 – 1866)

Opløsning af et Par Opgaver ved Hjelp af bestemte Integraler.

Af
N. H. A b e l.

I.

Det er som bekjendt ofte Tilfældet, at man ved Hjelp af bestemte Integraler (intégrales définies) kan opløse mange Opgaver, som man paa anden Maade enten aldeles ikke eller dog meget vanskelig kan opløse, og især har man anvendt dem med Held paa Opløsningen af flere vanskelige Opgaver i Mechaniken, f. Ex. om Bevægelsen af en elastisk Flade, i Bølgetheorien &c. En anden Anvendelse af disse Integraler vil jeg vise i Opløsningen af følgende Opgave:



Magazin for natur-videnskaberne, 1823, pp. 55-68

L'Hôpital til Leibniz, 1695

“I en derivasjon:
Hva om n skulle være $1/2$?”

- “... Det ser ut til at vi en dag vil kunne trekke nyttige konklusjoner fra disse paradoksene, for det finnes knapt noen paradokser uten nytte.”
- «... Il y a de l'apparence qu'on tirera un jour des consequences bien utiles de ces paradoxes, car il n'y a gueres de paradoxes sans utilite»
- Leibniz, G W 1695, Mathematische Schriften 1849, reprinted 1962, Hildesheim, Germany, pp. 301-302

XXIV.

Leibniz an de l'Hospital.

Hanover 30 Sept. st. n. 1695.

Vous voyés par là, Monsieur, qu'on peut exprimer par une serie infinie une grandeur comme $d^{1/2} \overline{xy}$, ou $d^{1/2} \overline{xy}$, quoyque cela paroisse éloigné de la Géometrie, qui ne connoist ordinairement

302

que les differences à exposans entiers affirmatifs, ou les negatifs à l'égard des sommes, et pas encor celles, dont les exposans sont rompus. Il est vray, qu'il s'agit encor de donner $d^{1/2} x$ pro illa serie; mais encor cela se peut expliquer en quelque façon. Car soyent les ordonnées x en progression Geometrique en sorte que prenant une constante $d\beta$ soit $dx = x d\beta : a$, ou (prenant a pour l'unité) $dx = x d\beta$, alors ddx sera $x \cdot \overline{d\beta^2}$, et $d^2 x$ sera $x \cdot \overline{d\beta^2}$ etc. et $d^e x = x \cdot \overline{d\beta^e}$. Et par cette adresse l'exposant differentiel est changé en exposant potentiel et remettant $dx : x$ pour $d\beta$, il y aura $d^e x = \overline{dx : x^e} \cdot x$. Ainsi il s'ensuit que $d^{1/2} x$ sera egal à $x \cdot \sqrt[2]{dx : x}$. Il y a de l'apparence qu'on tirera un jour des consequences bien utiles de ces paradoxes, car il n'y a gueres de paradoxes sans utilité. Vous es-

Lacroix, 1819: $\frac{1}{2}$ -derivert av potens

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{f(x)=x^m} = \frac{dx^m}{dx} = mx^{m-1}$$

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}$$

Vilkårlig m, n :

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

$$\frac{d^{1/2} x}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}, \quad m=1, n=1/2.$$

410 CHAP. V. APPLICATION DU CALCUL INTÉGRAL

Si l'on fait $m=1$, $n=\frac{1}{2}$, il viendra

$$d^{\frac{1}{2}}\nu = \sqrt{\nu d\nu} \frac{\int dx l^{\frac{1}{2}}}{\int dx \left(1 \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\nu d\nu}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}},$$

en observant qu'entre les limites 0 et 1,

$$\int dx l^{\frac{1}{2}} = 1, \quad \int dx \left(1 \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

π étant la demi-circonférence du cercle dont le rayon est 1 (1160).

C'est ainsi que l'on parviendrait à l'équation primitive de la courbe correspondante à l'équation différentielle

$$y d^{\frac{1}{2}}\nu = \nu \sqrt{dy},$$

Lacroix, S F, 1819, Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral, Paris (Courcier) 3, second edition, 409-410

Sinus

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \sin kx = k^\alpha \sin \left(kx + \frac{\pi}{2} \alpha \right), \quad k \geq 0$$

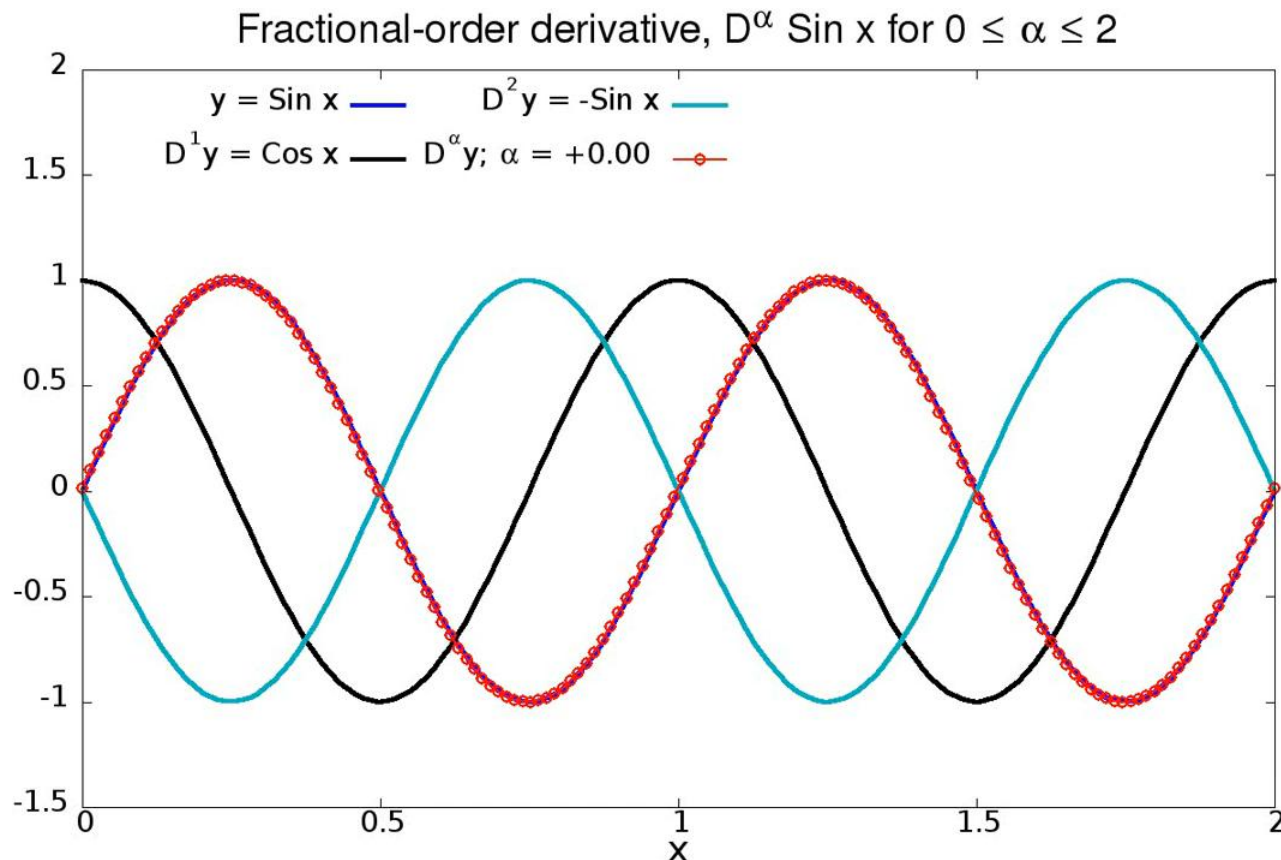


Fig:
Vikash Pandey,
YouTube

<https://www.youtube.com/watch?v=7oc4Qd9-HnE>

Abels arbeider:

1. Løsning av algebraiske ligninger: 5. gradsligning
2. Nye transcendentale funksjoner: elliptiske integraler, elliptiske funksjoner
3. Ligninger i funksjoner
4. **Integraltransformer**
5. Teori for rekker

https://abelprisen.no/sites/default/files/2021-05/houzel_the_work.pdf

Differentieres Værdien for s n Gange, saa faaer man,

$$\frac{d^n s}{dx^n} = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \cdot \psi x,$$

altsaa naar s sættes $= \phi x$

$$\frac{d^n \phi a}{da^n} = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \cdot \int \frac{\phi^1 x \cdot dx}{(a-x)^n} (x=0, x=a)$$





THE ABEL PRIZE

ABOUT THE ABEL PRIZE

LAUREATES

THE ABEL YEARS

MEDIA

NIELS HENRIK ABEL

Literature on Abel and his mathematics

I. Podlubny, R.L. Magin and I. Trymorush: *Niels Henrik Abel and the birth of fractional calculus*. Fractional Calculus and Applied Analysis, 20(5), (2017) 1068-1075.

B. Riemann *Theorie der Abel'schen Funktionen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 54 (1857) 101- 155.

M. Rosen *Abel's theorem on the lemniscate*, The American Mathematical Monthly 88 (1981) 387-395. [Permission required]

M. Rosen *Niels Hendrik Abel and equations of the fifth degree*, The American Mathematical Monthly 102 (1995) 495-505. (Chauvenet Prize of the Mathematical Association of America 1999) [Permission required]

R. C. Rowe and A. Cayley *Memoir on Abel's Theorem*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 172. (1881), pp. 713-758. [Permission required]

C. Skau *Gjensyn med Abels og Ruffinis bevis for umuligheten av å løse den generelle n'te gradsligningen algebraisk når $n \geq 5$* , Normat 38 (1990) 53-84.

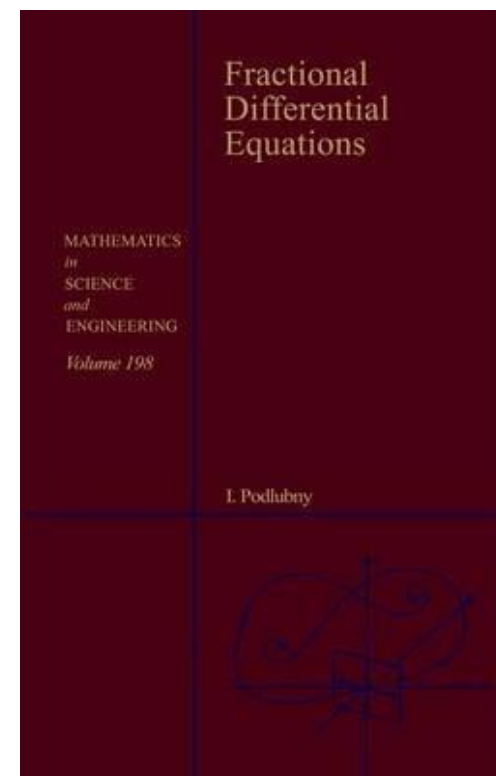
C. Størmer *Abels oppdagelser*, Norsk Matematisk Tidsskrift 11 (1929) 85-96 and 125-138.

L. Sylow *Abels studier og hans opdagelser*, in Festschrift ved hundreaarsjubilæet for Niels Henrik Abels fødsel. Kristiania 1902. (French edition 1902: *Les etudes d'Abel et ses decouvertes.*)

Niels Henrik Abel, 1823

“In his first paper on the generalization of the tautochrone problem, that was published in 1823, Niels Henrik Abel presented **a complete framework for fractional-order calculus** and used the clear and appropriate notation for fractional-order integration and differentiation.”

Podlubny, Magin, Trymorush, (2017). Niels Henrik Abel and the birth of fractional calculus, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 1068-1075: <https://doi.org/10.1515/fca-2017-0057>



> 39 000 siteringer

Podlubny, Magin, Trymoroush, (2017)

Conclusion

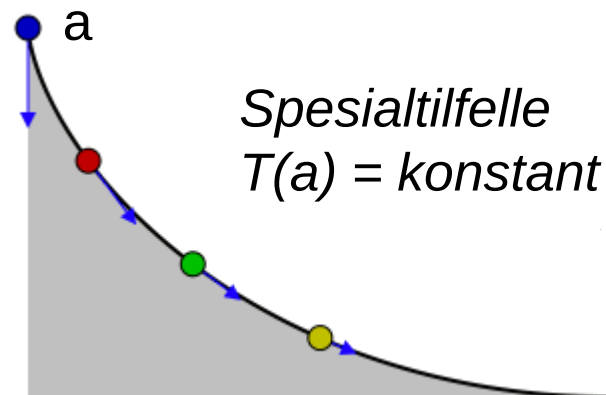
“It is not clear why Niels Henrik Abel abandoned the direction of research so nicely formed in his 1823 paper, and one can only guess the reasons.

Abel had all the elements of the fractional-order calculus there:

- the idea of fractional-order integration and differentiation,
- the mutually inverse relationship between them,
- the understanding that fractional-order differentiation and integration can be considered as the same generalized operation,
- and even the unified notation for differentiation and integration of arbitrary real order.”

Abels mekaniske problem

- Hvordan varierer tid for å komme til bunnen, $T(a)$, med høyde, a , og kurvens form $s(x)$?
- Hvis T er kjent, finn $s(x)$ fra a .
- Hvor kommer dette problemet fra?

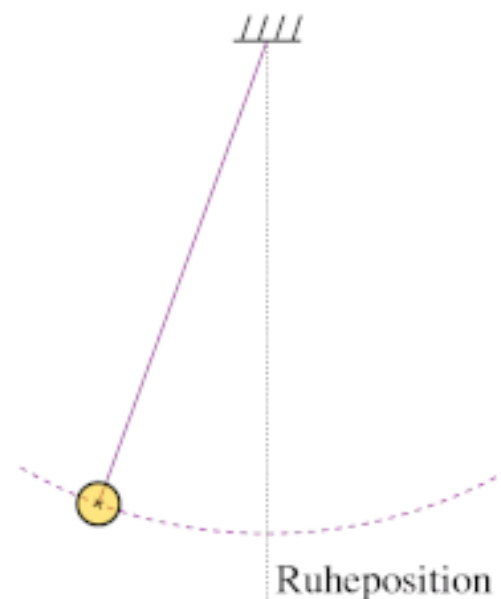


Klokke og pendel

Med mindre enn 1-2 graders utsving, dvs når $\sin \theta \approx \theta$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

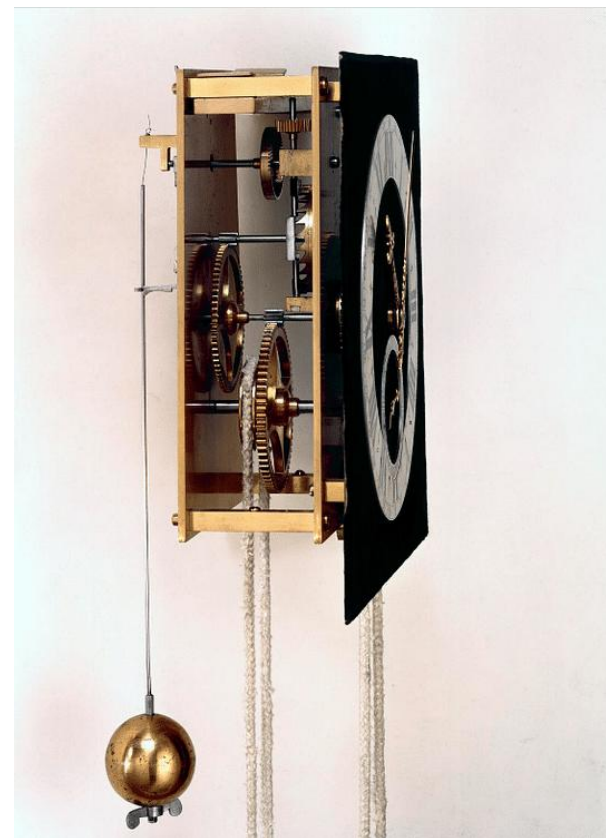
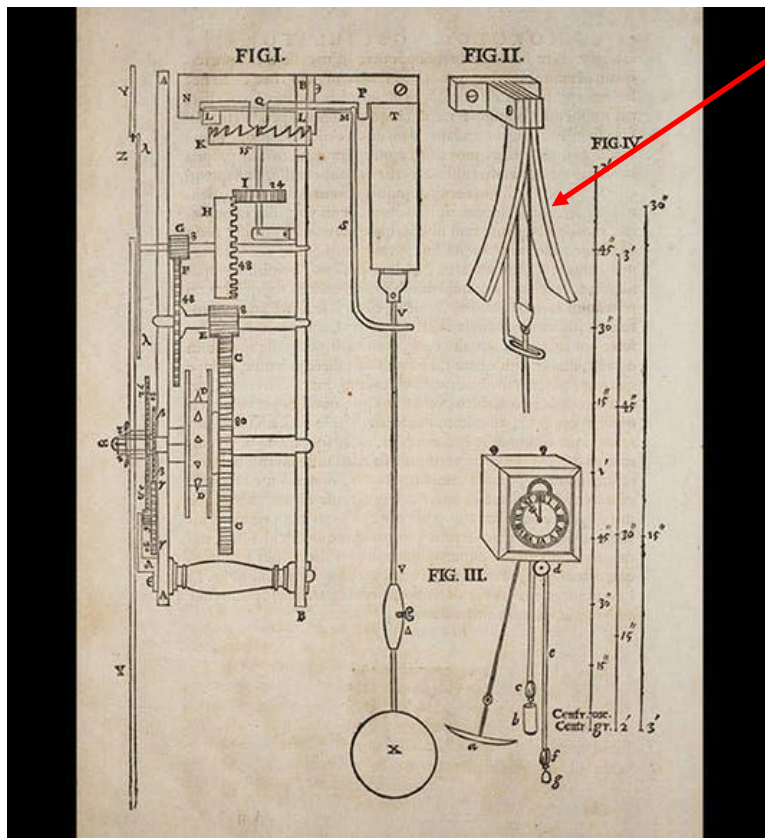
- *uavhengig av masse!*
 - T = svingetid
 - $g = 9.8 \text{ m/s}^2$
 - L = lengde
 - $L=99.4 \text{ cm} \Rightarrow T=2 \text{ s}$
- Leonardo da Vinci
 - Galileo Galilei: «svingetid er uavhengig av utsving» ~1602



https://da.wikipedia.org/wiki/Matematisk_pendul

Huygens pendelklokke, 1656

<15 s feil pr dag



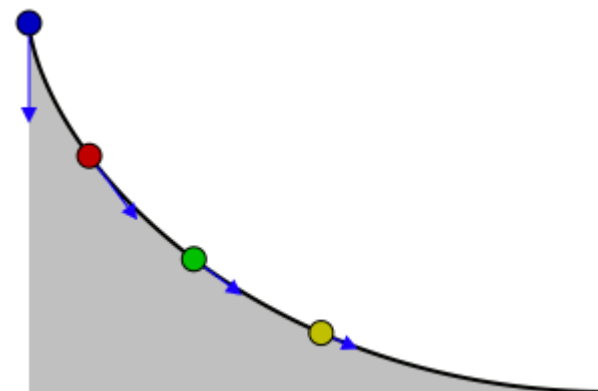
Bilde: Science Museum, London

<https://www.worldhistory.org/article/2315/clocks-in-the-scientific-revolution/>

En bedre kurve for en pendel?

Samme tid til å nå bunnen:

- Isokron = Lik tid
- Tautokron = Samme tid
- Christian Huygens 1659
- Joseph Lagrange, Leonhard Euler



https://en.wikipedia.org/wiki/Tautochrone_curve

Mer generelt: fra A til B

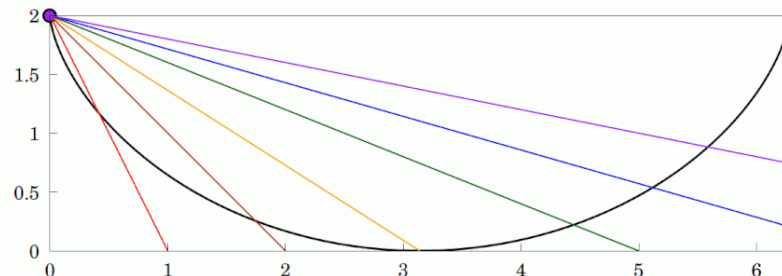
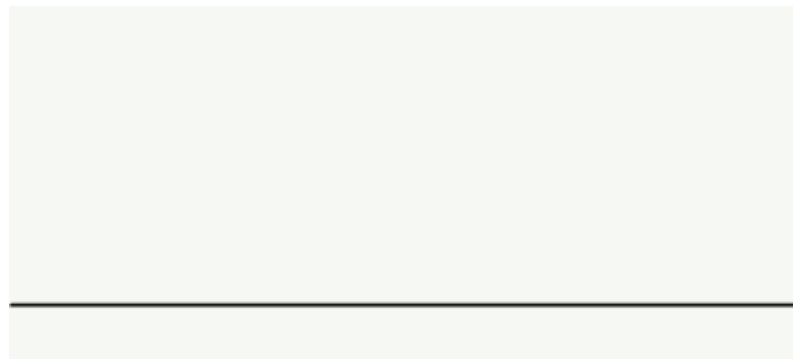
- Brakistokron = Korteste tid



https://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone_curve

Sykloide: punkt ytterst på hjul, radius r

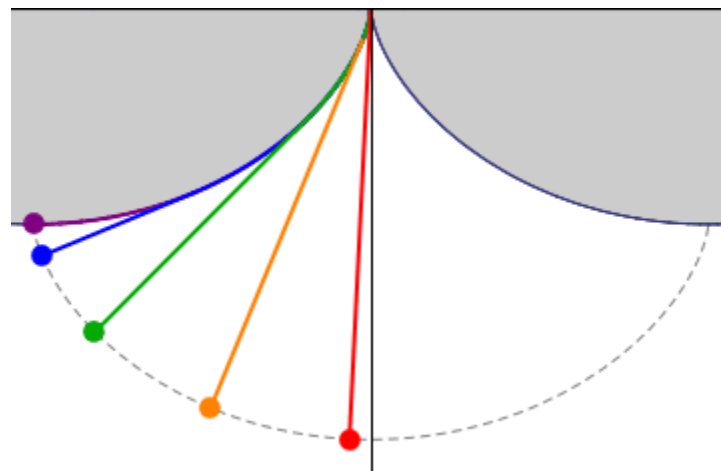
- Nicolas av Cusa, 1400-tallet
- Charles de Bouvelle, 1503
- Gilles de Roberval, 1628,
areal = 3 x sirkelens: $A = 3\pi r^2$
- Blaise Pascal, 1658, tannverk!
 - vilkårlig segment: tyngdepunkt, areal,
 - rotert sykloide: volum, overflate
 - Konkurransen
 - Christopher Wren, lengde: $S = 8r^2$
- Huygens, 1673: $\Leftrightarrow$ tautokron
- J Bernoulli, 1697: $\Leftrightarrow$ brakistokron



<https://en.wikipedia.org/wiki/Cycloid>

Isokron pendel

- Huygens, 1673: klokke med isokron pendel
- Pendel henger i spissen av en invertert sykloide, slik at strengen tangerer den
- Lengde er 2 x diameter til genererings-sirkelen: $L = 4r$
- Upraktisk!



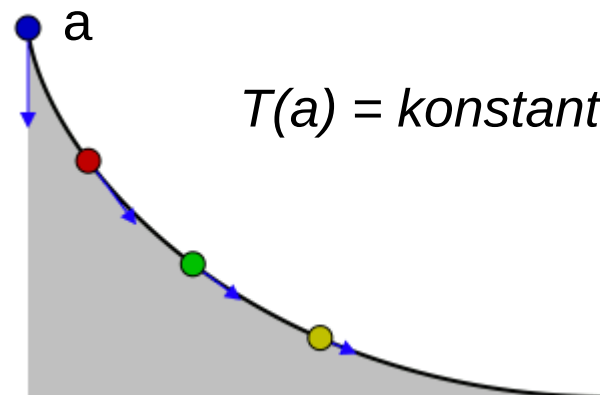
<https://en.wikipedia.org/wiki/Cycloid>

Abels mekaniske problem

Generalisering av tautokron kurve. Hvordan varierer tid for å komme ned til bunnen med høyde, a , og kurvens form $s(x)$:

$$T(a) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a-x}} \frac{ds}{dx} dx$$

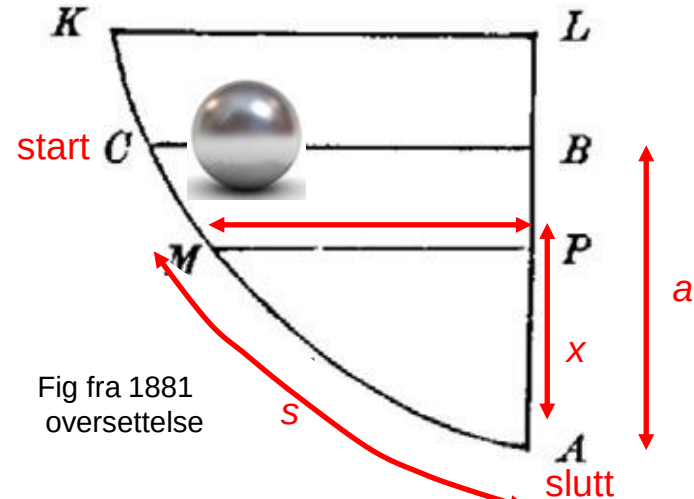
- Først til å vise at det bare er sykloiden som oppfyller det tautokrone kravet.
 - Vinagre, B. M. (2024). Time in Control Theory: On Concepts, Measures and Uses. Springer Nature.



Energibalanse, uten friksjon

$$\frac{1}{2}mv^2(x) = mg(a - x) \Rightarrow v(x) = \sqrt{2g(a - x)}$$

$$v(x) = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{(2g(a - x))^{1/2}}$$

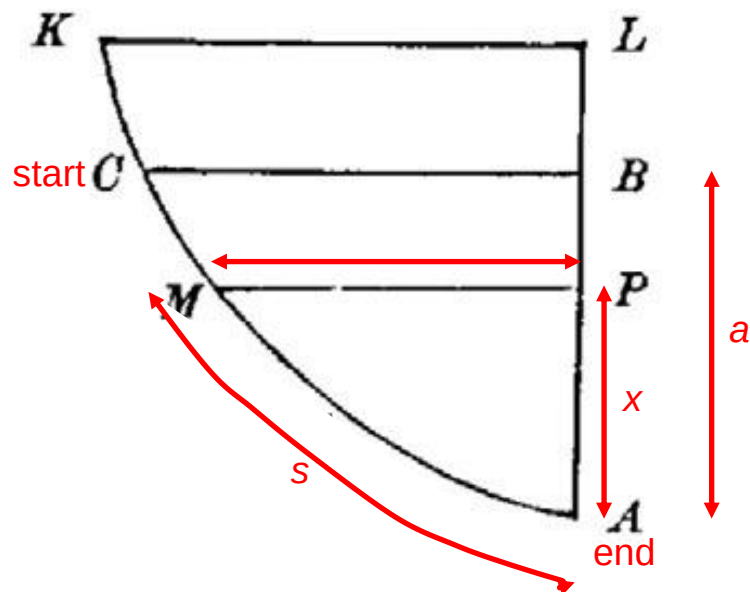


Tid for å nå bunnen, gitt høyde, a , og kurveform $s(x)$:

$$T = \int dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{ds}{(a - x)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{s'}{(a - x)^{1/2}} dx$$

Magazin for natur-videnskaberne, 1823, pp. 55-68

"Lad CB Tayle 1, Fig. 4, være en horizontal Linie, A et givet Punkt; AB lodret paa BC , AM en krum Linie, hvis retvinklede Koordinater ere $AP=x$, $PM=y$. Endvidere være $AB=a$ og $AM=s$. Tænker man sig at et Legeme gjennemløber Buen CA med en



$$T = \psi a = \psi(a) = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}}$$

Abel, 1823, side 56

"Initial-Hastighed $= 0$, saa vil Tiden T , som det bruger til at gjennemløbe hele Buen CA , være afhængig af Kurvens Natur og af a . Man forlanger at bestemme den krumme Linie KCA saaledes, at Tiden T bliver lig en given Funktion af a , f. Ex. ψa ."

Som bekjendt er, naar Hastigheden af Legemet i M kaldes h og Tiden, som det bruger til at gjennemløbe Buen CM , t

$$h = \sqrt{BP} = \sqrt{a-x} \text{ og } dt = -\frac{ds}{h}$$

altsaa,

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{a-x}}$$

og naar man integrerer:

$$t = -\int \frac{ds}{\sqrt{a-x}}$$

For at have T maa man tage Integralet fra $x=a$ til $x=0$ og man har altsaa:

$$T = \int_a^0 \frac{ds}{\sqrt{a-x}} \text{ (fra } x=a, \text{ til } x=0)$$

Da nu T er lig ψa , saa bliver altsaa Ligningen

$$\psi a = \int_a^0 \frac{ds}{\sqrt{a-x}} \text{ (fra } x=a \text{ til } x=0)$$

Abel generaliser, bare for moro skyld!

Da nu T er lig ψa , saa bliver altsaa Ligningen

$$\psi a = \int \frac{ds}{a-x} \text{ (fra } x=0 \text{ til } x=a)$$

Istedetfor at oplöse denne Ligning, vil jeg i Almindelighed vise, hvorledes man kan finde s af Ligningen:

$$\psi a = \int \frac{ds}{(a-x)^n} \text{ (fra } x=0 \text{ til } x=a)$$

hvor n er mindre end 1, for at ikke Integralet skal blive uendeligt mellem de givne Grændser; ψa er en hvilkensomhelst Funktion, der ikke bliver uendelig naar $a=0$.

$$\psi(a) = \int_0^t \frac{s'(x)dx}{(a-x)^n}$$

$$0 \leq n < 1$$

Hvordan ser Abel at dette er en derivert av orden $0 < n < 1$?

$$\psi(a) = \int_0^t \frac{s'(x)dx}{(a-x)^n}, \quad 0 \leq n < 1$$

- Fundamentalteoremet i analyse
- Formel for gjentatt integrasjon



1. Analysens fundamentalteorem

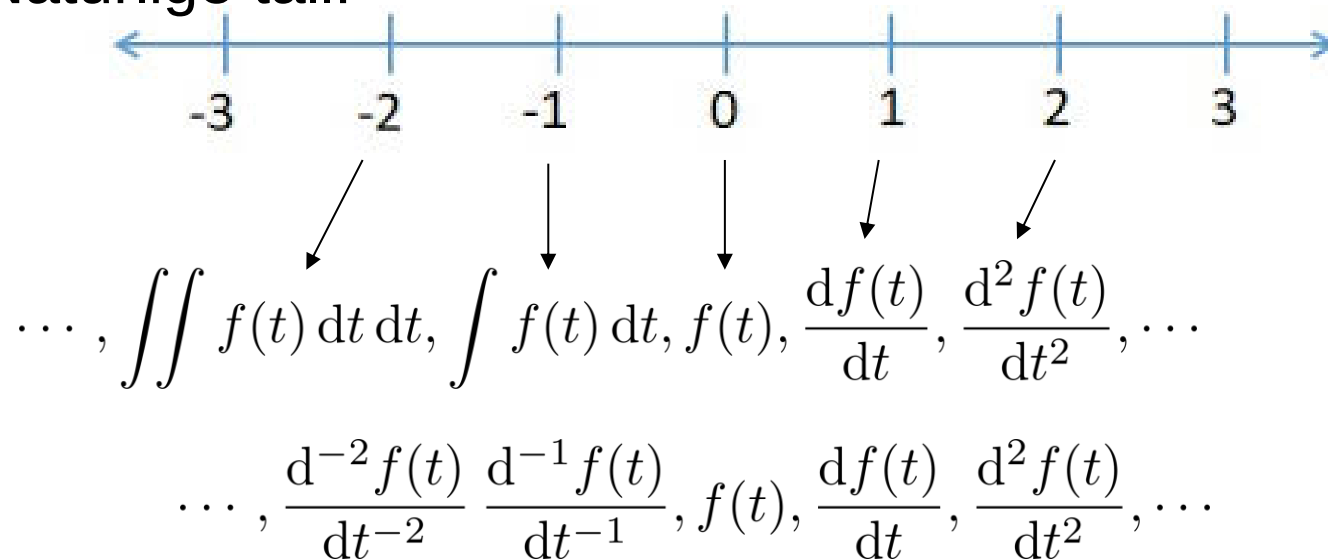
- Derivasjon og integrasjon er hverandres inverser:

$$\int^n (\cdot) d\tau^n = \frac{d^{-n}}{dt^{-n}} (\cdot), \quad I^n (\cdot) = D^{-n} (\cdot)$$

[Abels og Liouvilles notasjon for gjentatt integrasjon]

Derivasjon og integrasjon

- Naturlige tall:



- Kan «legge sammen» orden

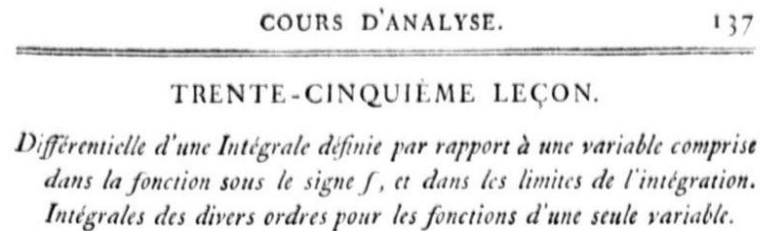
2. Cauchy: formel for gjentatt integrasjon, 1823(?)

$$I^n[f(t)] = \int_a^t f(t) dt^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}} d\tau, \quad n = 1, 2, \dots$$

Konvolusjon
med potenslov



Augustin Cauchy
(1789 – 1857)



- Ikke:
 - Cauchys integralteorem
 - Cauchys integralformel
- https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_formula_for_repeated_integration
- Augustin Louis Cauchy: Trente-Cinquième Leçon. In: Résumé des leçons données à l'Ecole royale polytechnique sur le calcul infinitésimal. Imprimerie Royale, Paris, 1823.

Af det Foregaaende flyder følgende mærkværdige Theorem:

Vi have seet at naar

$$\Psi a = \int \frac{ds}{(a-x)^n} \quad (x=0, x=a)$$

saa er

$$s = \frac{\sin n\pi}{\pi} \cdot x^n \cdot \int \frac{\psi(xt) \cdot dt}{(1-t)^{1-n}} \quad (t=0, t=1)$$

Man kan ogsaa udtrykke s paa en anden Maade, som jeg for dens Besonderligheds Skyld vil anføre, nemlig

$$s = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \int^n \psi x \cdot dx^n = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \cdot \frac{d^{-n} \psi x}{dx^{-n}}$$

hvor n er mindre end 1

s = kurvens form

$T = \Psi\alpha =$ tid

n 'te ordens integral,
Liouville 1832

= derivert av negativ
orden = integral

Cauchy formel med n heltall: $\frac{df^{-n}(t)}{dt^{-n}} = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}} d\tau$

Abel, 1823, side 59, 61

Sættes $n = \frac{1}{2}$ saa har man

$$\psi a = \int \frac{ds}{\sqrt{a-x}} \quad (x=0, x=a)$$

$$\text{og } s = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d^{-\frac{1}{2}}\psi x}{dx^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int^{\frac{1}{2}} \psi x, dx^{\frac{1}{2}}$$

Dette er altsaa Ligningen for den søgte Kurve naar Tiden er $= \psi a$.

Af denne Ligning faaes:

$$\psi x = \sqrt{\pi} \cdot \frac{d^{\frac{1}{2}}s}{dx^{\frac{1}{2}}}$$

altsaa :

Naar Ligningen for en krum Linie er $s = \phi x$, saa er Tiden, som et Legeme bruger for at gennemløbe en Bue, hvis Höide $= a$, lig $\sqrt{\pi} \cdot \frac{d^{\frac{1}{2}}\phi a}{da^{\frac{1}{2}}}$; det nederste Punkt af a er fast.

Abel, 1823, side 62-63

Tilbake til det originale problemet, $n=1/2$

s = kurvens form

$T = \psi a$ = tid

Fraksjonelt integral

Inverter integralet og får fraksjonell derivert

Antar at analysens fundamentalteorem er gyldig for ikke-heltall også, $n = 1/2$

Auflösung einer mechanischen Aufgabe.

(Von Herrn N. H. Abel.)

Abel, Auflösung einer mechanischen Aufgabe, J. Reine u. Angew. Math, pp. 153-157. 1826

$$f a = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{(a-x)}},$$

Page 153

aus welcher Gleichung s , durch x ausgedrückt, gefunden werden muß.

Statt dieser Gleichung wollen wir die allgemeinere

$$f a = \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n}$$

156

Abel, Auflösung einer mechanischen Aufgabe.

Man setze nun $n = \frac{1}{2}$, so ist

$$\varphi a = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{(a-x)}}$$

und

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi a da}{\sqrt{(x-a)}}.$$

Diese Gleichung giebt, wie bekannt, den Bogen s durch die Abscisse x , und folglich ist die Curve nunmehr völlig bestimmt.

Page 156

The full general solution is in the paper from 1826 – no mention of link to non-integer calculus.

Aktivt forskningsfelt

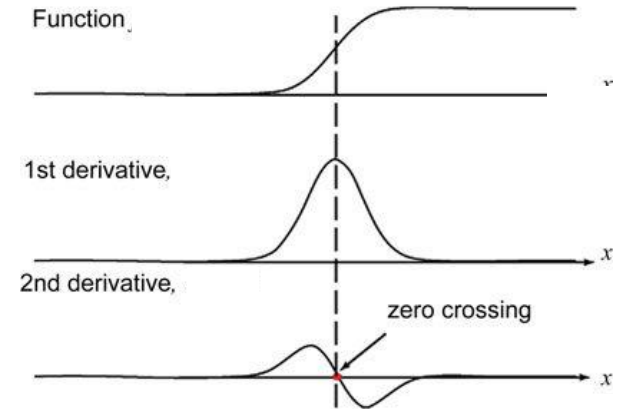
International Conference on Fractional Differentiation and its **Applications**:

- France '04, Portugal '06, Turkey '08, Spain '10, **China '12**, Italy '14, Serbia '16, Jordan '18, Virtual (Poland) '21, **UAE '23**, France '24.
- S. Holm, Natural Occurrence of Fractional Derivatives in Physics, Proc. ICDFA'23, <https://arxiv.org/abs/2305.07074>



Deriverte: Endring vs kompleksitet

- Heltalls-derivert:
 - Leibniz, Newton: $\frac{d}{dt}f(t)$, $\dot{f}(t)$
 - **Endring**: hastighet, aksellerasjon
 - Lokal karakterisering



- Integral:
 - Global, hukommelse, lik vekt på all fortid $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$
- Fraksjonell derivert: $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$
 - Global, vektet hukommelse
 - **Kompleksitet**: Potenslov i tid og frekvens

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Potenslov i tid $\Leftrightarrow$ Potenslov i frekvens $\Leftrightarrow$ Fraksjonell derivert

- Potenslov Fourier-transformeres til potenslov:

$$f(t) = \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}, \quad t > 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega) = (i\omega)^{\beta-1}$$

- Derivasjon av heltallig orden, m :

$$\frac{d^m}{dt^m} f(t) \quad \Leftrightarrow \quad (i\omega)^m F(\omega)$$

- Derivasjon av orden α :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) \quad \Leftrightarrow \quad (i\omega)^\alpha F(\omega)$$

- Teori med t^β eller $\omega^\alpha \Leftrightarrow$ fraksjonelle deriverte

Potenslover i dielektrika

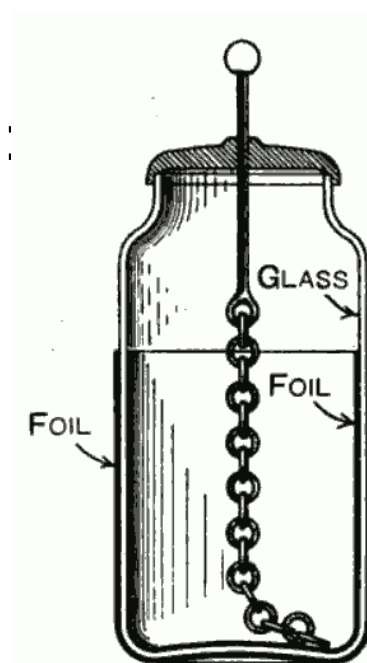
- Strømrespons til et spenningssprang, Curie-von Schweidler loven, 1889, 1907:

$$I(t) \propto t^{\alpha-1}$$

- Kohlrausch, 1854: Utladning av en kondensator:

$$Q(t) \propto \exp [-(t/\tau)^{\alpha}]$$

- Strukket eksponensial: potenslov inni eksponensial
- Asymptotisk potenslov



Leyden jar

A physical fractional device: Capacitor soakage

- $i = Cd^\alpha u/dt^\alpha$, $\alpha \lesssim 1$
- $Z = u/i = 1/C(j\omega)^\alpha$
- Example in video:
 - $C=220 \mu\text{F}/63 \text{ Volt}$
 - 10 Volts for 60 sec
 - Shorted for 6 sec
 - http://www.youtube.com/watch?v=vhHog_yCQ4Q
- Dielectric absorption
 - Westerlund and Ekstam. "Capacitor theory," IEEE Trans. Dielectrics and Electrical Insulation, 1994



Anvendelser

- Permittivitet: bioimpedans, elektrokjemi, georadar, ...
 - Cole-Cole dielektrisk model, 1941: $\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + (i\omega\tau)^\alpha}$
- Turbulens:
 - Tykkelse av viskøst grensesjikt: $\delta_{BL} = \sqrt{\frac{2\eta}{\rho\omega}}$
 - Halvte-ordens derivert
- Akustikk, komplekse mediers mekanikk:
 - Potenslov damping som funksjon av frekvens: Medisinsk ultralyd, seismikk,...
 - Relaksasjonsmodulus som $f(\text{tid})$: ikke eksponensiell, men potenslov

Potenlover: tap som følger ω^y

- Medisin, geofysikk,

...

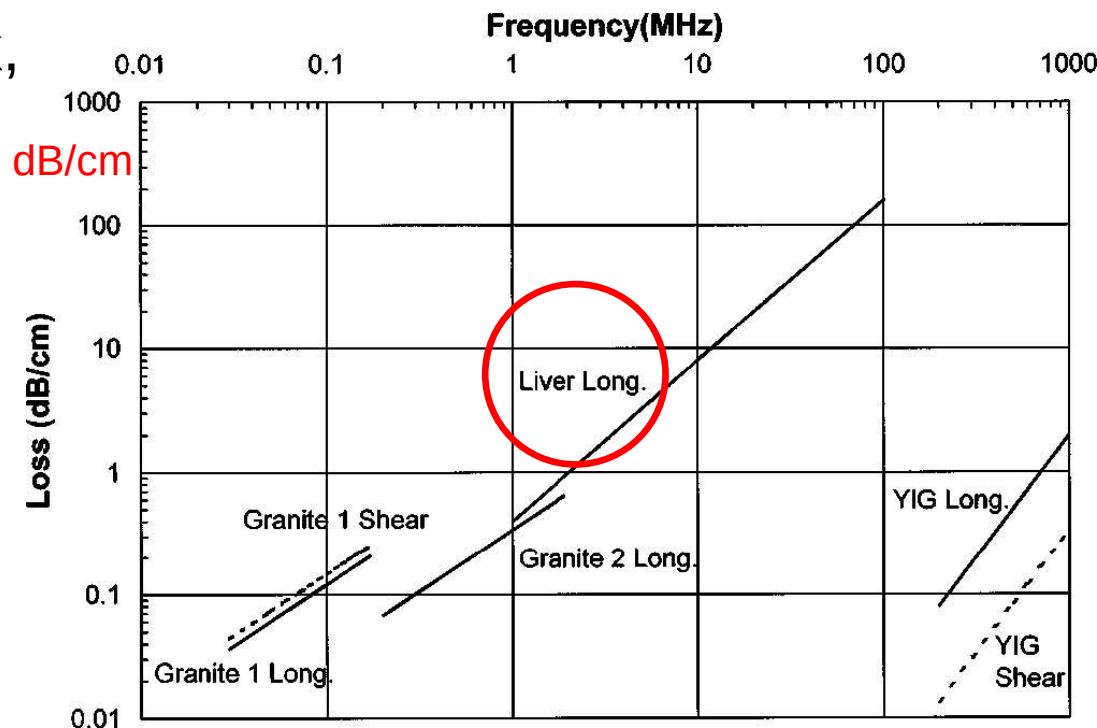
- Trykkbølger:

- Granitt: $y \approx 1$
- Lever: $y \approx 1.3$

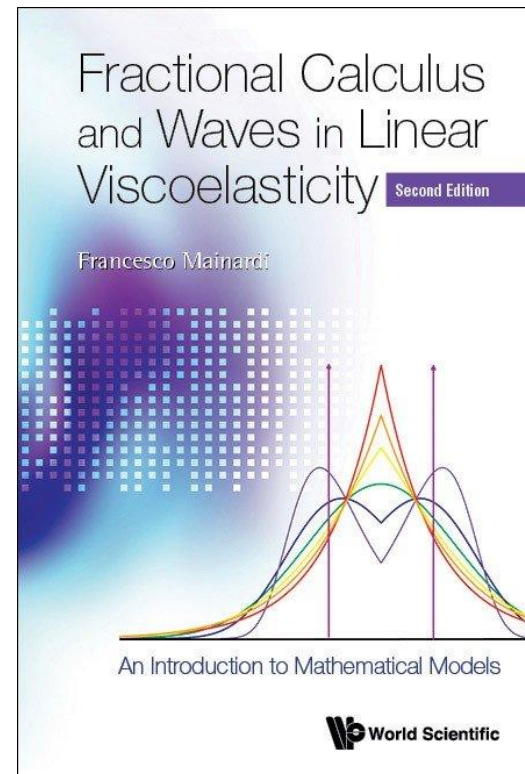
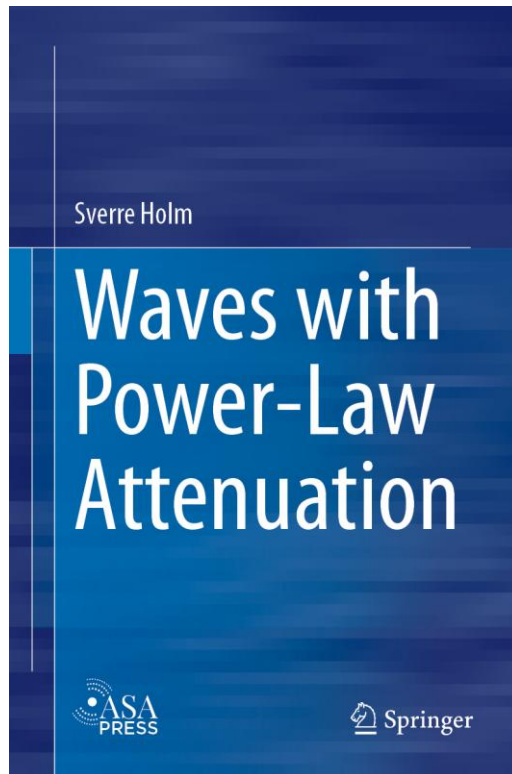
- Skjærbølger:

- YIG: $y = 2$
(Yttrium indium garnet)
- Granitt: $y \approx 1$

- Szabo and Wu, “A model for longitudinal and shear wave propagation in viscoelastic media”, JASA (2000).



Data for shear and longitudinal wave loss which show power-law dependence over four decades of frequency.



Abel 1823

- N. H. Abel "Opløsning af et par opgaver ved hjælp af bestemte integraler." Magazin for natur-videnskaberne, 1823, pp. 55-68
- B.M. Holmboe, «Oeuvres complètes, avec des notes et développements,» 1839
- Sylow & Lie, "Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel. Nouvelle edition", 1881
 - N.H. Abel, "Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies," 1823 (1881): Ch. II, pp. 11–27
- Podlubny, Magin, Trymorush, (2017). Niels Henrik Abel and the birth of fractional calculus. Fract Calc Appl Anal,
 - arXiv version: English translation: N. H. Abel, "Solution of some problems using definite integrals," 1823 (2017).



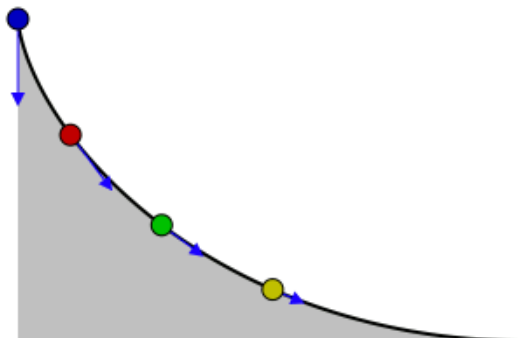
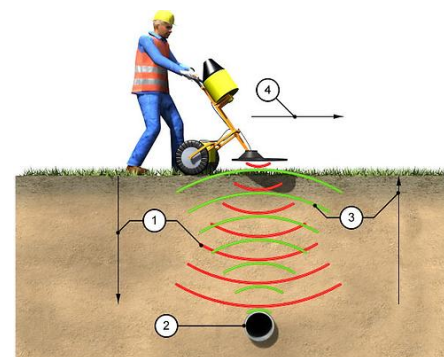
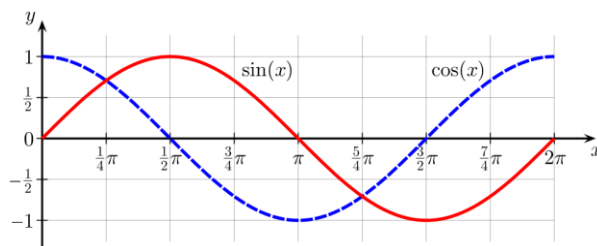
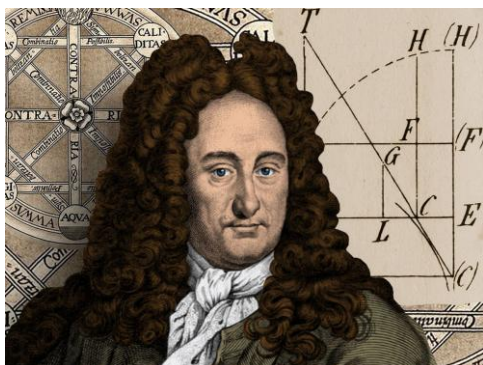
Opløsning af et Par Opgaver ved Hjelp af bestemte Integraler.

Af
N. H. Abel.

I.

Det er som bekendt ofte Tilfældet, at man ved Hjelp af bestemte Integraler (intégrales définies) kan opløse mange Opgaver; som man paa anden Maade enten aldeles ikke eller dog meget vanskelig kan opløse, og især har man anvendt dem med Held paa Opløsningen af flere vanskelige Opgaver i Mechaniken, f. Ex. om Bevægelsen af en elastisk Flade, i Bølgetheorien &c. En anden Anvendelse af disse Integraler vil jeg vise i Opløsningen af følgende Opgave:

Niels Henrik Abel og den halvte-deriverte



Exponential function $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} e^{kx} = k^\alpha e^{kx}, \quad k \geq 0$

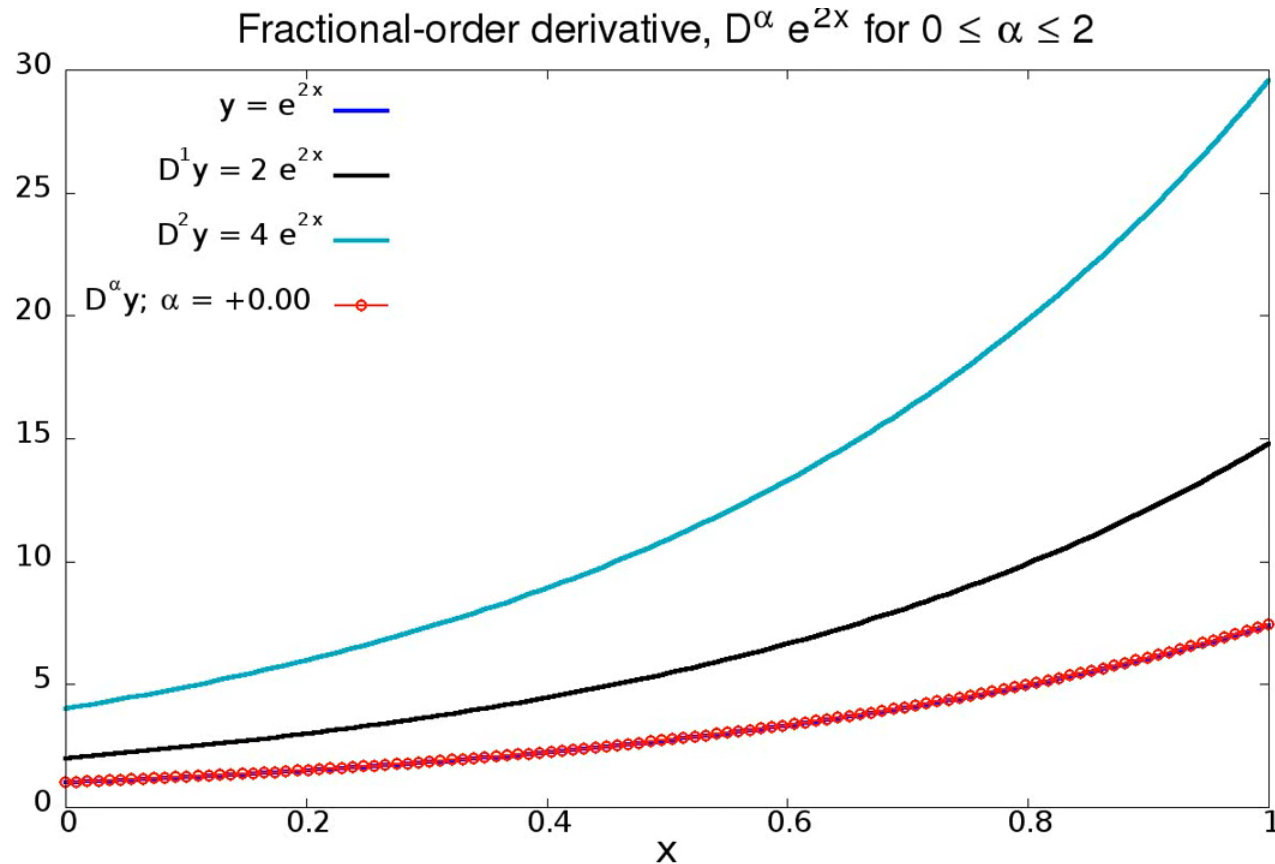


Fig:
Vikash Pandey,
YouTube

Power law

$$\frac{dx^k}{dx} = kx^{k-1} \Rightarrow \frac{d^n x^k}{dx^n} = \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n} \Rightarrow \frac{d^\alpha x^k}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{k-\alpha}$$

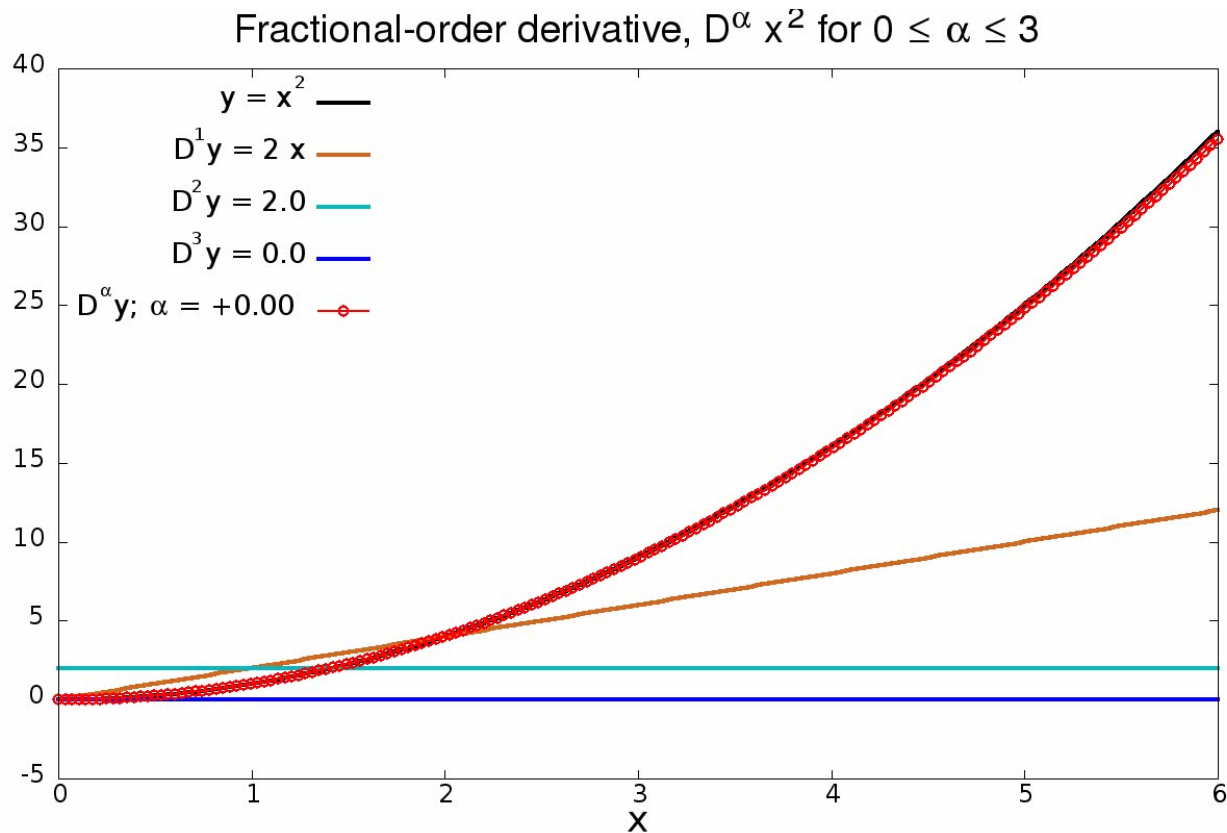


Fig:
Vikash Pandey,
YouTube