

17. Dérivation dans le plan complexe.

Il serait possible d'étendre au plan complexe un certain nombre de résultats du cas réel. Citons seulement comme données numériques existantes :

SALZER, *J.M.P.*, 31 (1952), pp. 155-159. Dérivées d'ordre 1, 2, ..., aux sommets d'un quadrillage au moyen des valeurs en ces sommets, deux à neuf sommets dans diverses dispositions.

III. — POLYNOMES A PLUSIEURS VARIABLES

18. Polynôme à plusieurs variables.

Il y a peu de différences entre les théories relatives aux polynômes à deux, trois ou quatre variables. Nous nous contenterons d'écrire des polynômes à deux variables.

Nous n'insisterons pas sur la manière de calculer la valeur numérique d'un tel polynôme par une généralisation du schéma de HÖRNER, car cela ne présente aucune difficulté particulière.

19. Polynôme plein.

Un polynôme à coefficients indéterminés sera dit *plein* s'il contient avec le terme :

$$a_{i,j} x^i y^j,$$

tous les termes : $a_{i',j'} x^{i'} y^{j'}$ avec $i' \leq i$ $j' \leq j$.

EXEMPLES : Un polynôme complet à une variable de degré n est un polynôme plein;

Un polynôme complet à deux variables, de degré n par rapport à l'ensemble des variables, est un polynôme plein;

Un polynôme complet à deux variables, de degré n en x et p en y , est un polynôme plein;

Un polynôme homogène de degré n n'est pas un polynôme plein.

20. Silhouette d'un polynôme plein (1).

Considérons toujours des polynômes à deux variables. Traçons dans le premier quadrant du plan des x, y , un quadrillage régulier de pas 1 et marquons le point i, j si le terme $a_{i,j} x^i y^j$ existe dans le polynôme.

L'ensemble des points marqués forme la silhouette du polynôme plein.

EXEMPLES :

a) Polynôme de degré 3 par rapport à l'ensemble des variables;

b) Polynôme de degré 2 en x et 3 en y ;

c) Polynôme :

$$\alpha x^3 + \beta x y^2 + a x^2 + b x y + c y^2 + d x + e y + f.$$

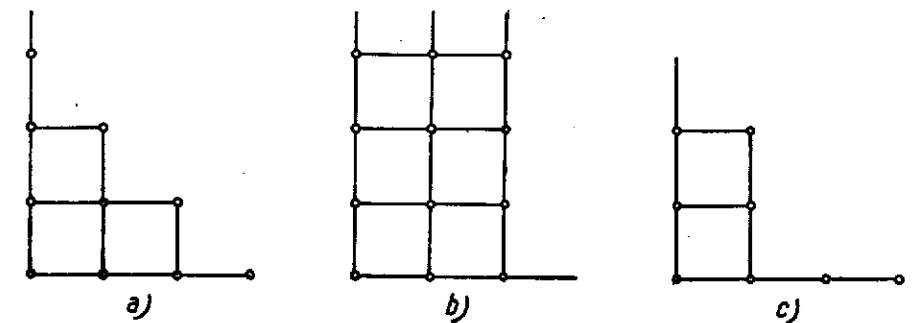


FIG. 39.

21. Théorème de translation.

Une translation $x' = x + h, y' = y + k$, transforme un polynôme plein en un polynôme plein de même silhouette. En effet, dans une telle translation, le terme :

$$a_{i,j} x^i y^j$$

donne uniquement des termes en :

$$x^{i'} y^{j'} \quad \text{avec} \quad i' \leq i \quad j' \leq j.$$

Or, ces termes existent dans le polynôme.

22. Détermination d'un polynôme par des valeurs.

Le problème de déterminer un polynôme qui n'est pas plein par des valeurs peut être indéterminé ou impossible.

(1) Voir J. KUNTZMANN : *Chiffres* 1 (1958), pp. 35-39.

EXEMPLE : Soit à déterminer a et b connaissant les valeurs de $P(x) = ax^2 + b$ pour $x = 1$ et $x = -1$.

Si les deux valeurs proposées sont égales, le problème est indéterminé. Si elles sont différentes, le problème est impossible.

Le problème de déterminer un polynôme plein par des points disposés arbitrairement peut aussi être indéterminé ou impossible. Soit, par exemple, $a + bx + cy + dxy$ à déterminer par ses valeurs pour les couples :

$$(0,0) \quad (0,1) \quad (0,2) \quad (0,3).$$

Le problème se ramène à déterminer le polynôme $a + cy$ par ses valeurs pour $y = 0, 1, 2, 3$. Ce problème est, en général, impossible. S'il est, par hasard, possible, le problème proposé est indéterminé car b et d sont arbitraires.

23. Quadrillage associé à un polynôme plein.

Soit le polynôme plein : $\sum a_{i,j} x^i y^j$.

Nous nommerons *quadrillage associé à ce polynôme plein*, l'ensemble des points (x_i, y_j) .

Les x_i sont des abscisses fixées et les y_j des ordonnées fixées.

EXEMPLE : La silhouette d'un polynôme plein est un quadrillage associé à ce polynôme.

Soit le polynôme de silhouette de la figure 40, on peut prendre comme quadrillage associé celui de la figure 41.

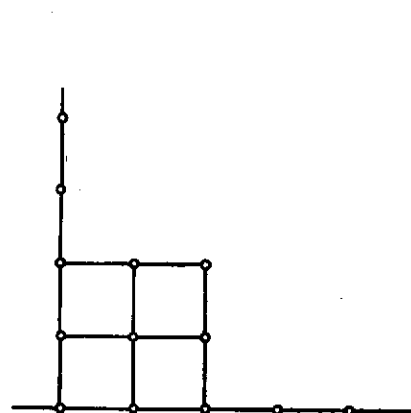


FIG. 40.

Le numérotage des x et y est indiqué à côté du graphique.

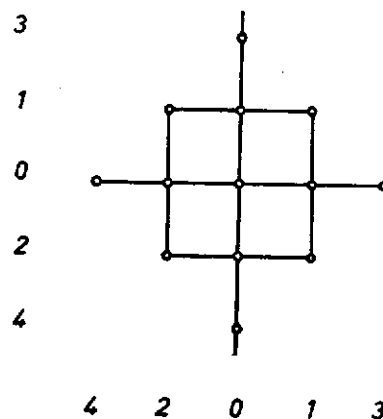


FIG. 41.

24. Détermination d'un polynôme plein par les valeurs aux sommets d'un quadrillage associé.

Soient les abscisses $x_0, x_1, \dots$ et les ordonnées $y_0, y_1, \dots$ et le problème de déterminer le polynôme plein :

$$\sum a_{i,j} x^i y^j$$

par les valeurs qu'il prend aux points (x_i, y_j) .

Effectuons une translation ramenant à avoir $y_0 = 0$.

On voit que les conditions imposées sur les points (x_i, y_0) déterminent les termes en x^i . Si l'on retranche ces termes, on peut mettre y en facteur et l'on est ramené au même problème avec un nombre de points inférieur. La propriété est donc démontrée.

REMARQUE : Pour un polynôme à une variable, ces hypothèses se ramènent seulement à dire que le polynôme à coefficients indéterminés est complet de degré n .

25. Forme de Lagrange.

Nous nommerons ainsi la forme que l'on obtient en faisant apparaître les polynômes prenant en l'un des points la valeur 1, et en chacun des autres la valeur 0. Elle s'écrit naturellement :

$$\sum_{i,j} f_{i,j} L_{i,j}(x).$$

Dans le cas général, les $L_{i,j}(x)$ sont assez compliqués à obtenir. Voici quelques cas où ils sont simples.

26. Polynômes de degré donné par rapport à chaque variable.

L'expression de LAGRANGE se simplifie et se réduit au produit :

$$L_i(x) L_j(y).$$

Dans le cas de figure :

$$L_2(x) L_1(y).$$

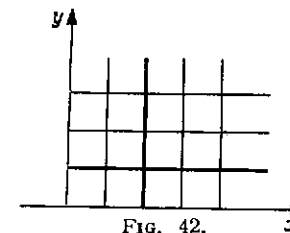


FIG. 42.

27. Polynômes de degré donné par rapport à l'ensemble des variables (1).

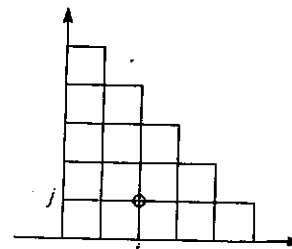


FIG. 43.

Si n est ce degré, on peut écrire le polynôme de LAGRANGE relatif à (i, j) sous la forme :

$$C_x^i C_y^j C_{n-x-y}^{i+j}.$$

En effet, le premier facteur est de degré i en x , le deuxième de degré j en y , le troisième de degré $n - i - j$ par rapport à l'ensemble (x, y) . Le degré de l'expression par rapport à l'ensemble des variables ne dépasse pas n .

Pour $x = i, y = j$, chacun des termes vaut 1. D'autre part, l'un ou l'autre est nul pour :

$$x = 0, 1, \dots, i-1;$$

$$y = 0, 1, \dots, j-1;$$

$$x + y = 0, 1, \dots, i + j - 1.$$

Or, ceci représente tous les points utilisés autres que le couple (i, j) .

28. Données numériques existantes.

On trouvera pour les polynômes à deux variables de degré total 2, 3, 4, la tabulation des formes de LAGRANGE dans :

SALZER, *Journal of Math. and Physics*, 26 (1947), pp. 294-305 :

$$x, y \quad 0 \quad (0,1) \quad 1 \quad \text{Valeurs exactes.}$$

IV. — DIFFÉRENCES A PLUSIEURS VARIABLES

29. Différences divisées à deux variables.

Soit le polynôme $P(x, y)$ et des abscisses $x = a_1, a_2, \dots, a_n$. On peut définir pour une valeur fixe de y :

$$\delta(a_1, a_2, \dots, a_n; y).$$

(1) SALZER, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51, 1945, pp. 279-280.

Considérons maintenant des ordonnées $b_1, b_2, \dots, b_p$; on peut former les différences de $\delta(a_1, \dots, a_n; y)$ considéré comme fonction de y . On obtient ainsi :

$$\delta(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p),$$

le point-virgule est destiné à séparer les deux groupes de variables.

30. Expression des différences divisées au moyen des valeurs du polynôme.

En se reportant au cas d'une variable, on trouve immédiatement :

$$\delta(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p) = \sum_{i,j} \frac{P(a_i, b_j)}{(a_i - a_1) \dots (a_i - a_n) (b_j - b_1) \dots (b_j - b_p)}.$$

Sur cette expression, on aperçoit immédiatement que les deux groupes de valeurs jouent le même rôle. On peut donc commencer par former les différences en y et ensuite les différences en x .

31. Points intervenant dans une différence à deux variables.

Ces points sont disposés aux nœuds d'un quadrillage à côtés parallèles à Ox, Oy , espacés irrégulièrement.

32. Autre notation pour les différences divisées.

Nous rencontrerons souvent des différences dans lesquelles les valeurs de x seront prises dans un certain ordre toujours le même, et les valeurs de y également. On définit alors une différence par l'indication du premier

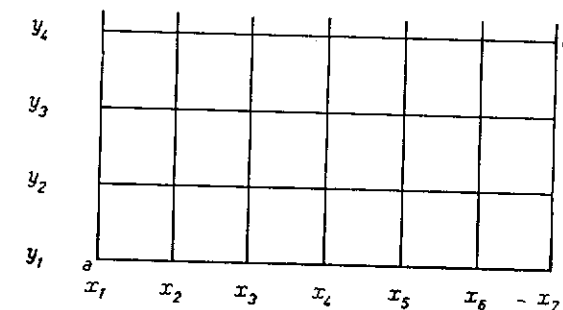


FIG. 44.