UNIVERSITETET I OSLO

Det Matematisk-Naturvitenskapelige Fakultet

EKSAMEN I:	*ST 104 – Stokastiske prosesser*
TID FOR EKSAMEN:	*Tirsdag 18. juni 1991 kl.* 9^{00}–15^{00}
HJELPEMIDLER:	*Formelsamling for ST 101,*
	Karl Rottmann's 'Mathematische Formelsammlung',
	lommekalkulator

OPPGAVESETTET INNEHOLDER TRE OPPGAVER, OG ER PÅ TRE SIDER

Oppgave 1

En Markovkjede $\{X_0, X_1, \ldots\}$ på tilstandene $\{1, 2, 3\}$ har overgangsmatrise

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \\ p_1 & p_2 & q \end{pmatrix},$$

der p_1, p_2, q er tre positive tall med sum 1.

(a) Beskriv hvilke klasser av tilstander denne kjeden har, og gjør rede for om de enkelte tilstandene er positiv-rekurrente, null-rekurrente, eller transiente.

(b) Regn ut alle annen-ordens overgangs-sannsynligheter, altså $\Pr\{X_{n+2} = j | X_n = i\}$.

(c) La $N_j = \sum_{n=0}^{\infty} I\{X_n = j\}$ være det totale antall besøk i tilstand j. Finn forventningene $E\{N_1 | X_0 = 1\}$, $E\{N_2 | X_0 = 2\}$, og $E\{N_3 | X_0 = 3\}$.

(d) Finn den genererende funksjonen $F_{11}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} z^n$, og bruk dette til å finne et eksplisitt uttrykk for $P_{11}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{11}^{(n)} z^n$.

(e) Finn grense-sannsynlighetene

$$\lambda_{ij} = \lim_{n \to \infty} \Pr\{X_n = j | X_0 = i\}$$

for alle $i, j = 1, 2, 3$.

(f) La til slutt V_1 være tidspunktet $n \geq 1$ der X_n-kjeden første gang besøker tilstand 1. Finn $E\{V_1 | X_0 = 1\}$, $E\{V_1 | X_0 = 2\}$, og $E\{V_1 | X_0 = 3\}$.

Oppgave 2

Teorien for forgreningsprosesser har blitt brukt til å anslå sannsynligheten for at et etternavn skal overleve gjennom generasjonene. Vi tenker oss et samfunn der kvinner tar ektemannens navn, slik at kun sønner bringer navnet videre. Data fra en undersøkelse av A.J. Lotka ['The extinction of families', *Journal of Washington's Academy of Sciences* **21**, 1931, side 377–380 og 453–459] viste at fordelingen $\Pr\{Y = j\} = p_j$ for antall sønner fra en tilfeldig mann (innen et passende avgrenset socio-kulturelt stratum) passet tilfredsstillende med den genererende funksjonen

$$G(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \Pr\{Y = j\} z^j = \frac{0.48 - 0.04\,z}{1 - 0.56\,z}.$$

La X_n være antall mannlige etterkommere av ett gitt start-individ i generasjon nr. n. Spesielt er altså $X_0 = 1$.

(a) Finn $p_0, p_1, p_2, \ldots$.

(b) Vis at forventningen til Y blir 1.1818 (eksakt: $\frac{13}{11}$). Beregn også variansen til Y [svaret blir 2.7934 (eksakt: $\frac{26}{11}\frac{13}{11}$)].

(c) Hvilke forutsetninger må være oppfylt for at $\{X_0, X_1, X_2, \ldots\}$ skal danne en tidshomogen Markovsk forgreningsprosess? Synes du disse forutsetningene er rimelige?

Anta i resten av denne oppgaven at kjeden virkelig tilfredsstiller de nødvendige betingelsene fra forrige punkt.

(d) Finn den genererende funksjonen til X_2. Kommenter svaret. Finn dessuten sannsynligheten for at en mann ikke skal få noen sønnesønner.

(e) Finn forventning og varians for X_n.

(f) Finn sannsynligheten π for at forgreningsprosessen med $X_0 = 1$ start-individ skal dø ut.

(g) Anta at det i år 1931 fantes 10 unge ugifte menn av Ffrench-slekten. Hva er da sannsynligheten for at Ffrench-navnet skal dø ut?

Oppgave 3

En bestemt maskindel befinner seg i en av to tilstander: tilstand 1, den fungerer som den skal; tilstand 0, den fungerer ikke og er til reparasjon. La $X(t)$ være tilstanden maskindelen er i ved tidspunkt t. Det antas at $X(t)$ er en tidshomogen Markovprosess i kontinuerlig tid, med intensitet λ fra 0 til 1 og intensitet μ fra 1 til 0:

$$P_{01}(h) = \lambda h + o(h), \quad P_{10}(h) = \mu h + o(h).$$

Tidsenheten er døgn. Prosessen starter i $X(0) = 1$.

(a) Gjør rede for hva som ligger i modellantagelsene. Forklar spesielt hvordan parametrene λ og μ kan tolkes.

(b) Sett opp prosessens infinitesimale generator. [Dette er matrisen bestående av elementene $P'_{ij}(0)$.]

(c) La U være tiden maskindelen fungerer, målt fra $t = 0$, til den for første gang slutter å fungere og må repareres. Utled fordelingen til U. Sett også opp forventning og varians til U.

(d) La V være tidspunktet der maskindelen første gang kommer tilbake til tilstand 1 (etter å ha vært i tilstand 0). Finn forventning og varians til V.

(e) Still opp et sett av differensial-ligninger til bestemmelse av $P_{00}(t)$, $P_{01}(t)$, $P_{10}(t)$, $P_{11}(t)$.

(f) Finn grense-sannsynlighetene

$$p_0 = \lim_{t\to\infty} \Pr\{X(t) = 0\} \quad \text{og} \quad p_1 = \lim_{t\to\infty} \Pr\{X(t) = 1\}.$$

(g) Finn eksplisitte uttrykk for funksjonene $P_{00}(t)$, $P_{01}(t)$, $P_{10}(t)$, $P_{11}(t)$.

(h) La J_T være den relative brøkdelen av tiden mellom 0 og et gitt tidspunkt T der maskindelen har fungert som den skal. Finn forventningen til J_T.

(i) Finn også et uttrykk for variansen til J_T. Hva skjer med J_T når $T \to \infty$?

(j) Anta at X-prosessen, for en bestemt maskindel, har vært observert over lang tid. Forklar hvordan man kan anslå parametrene λ og μ.

SLUTT