

PRØVEEKSAMEN STK 1100, MAI 2026

ved Nils Lid Hjort og Emil Aas Stoltenberg

Legges ut på verdensveven mandag 11. mai; gjennomgås mandag 18. mai

Oppgavesettet har seks oppgaver over fire sider. I nøktern generøsitet har vi laget et oppgavesett en tanke større enn for en typisk firetimerseksamen, så T_1 , tiden du bruker på å arbeide deg gjennom samt skriftlig besvare oppgavene kan finne på å være større enn T_2 , de fire eksamenstimer mandag 1. juni. Bruk anledningen til å øve på å skrive, konsise, gode, forklarende setninger – det vil glede sensor om du mestrer den siden av eksamen, ikke «bare» å komme frem til de berømte riktige svar.

Oppgave 1: din statistiske verktøykasse

LA OSS SJEKKE om ting er på stell.

(a) Se på

$$f(x) = \frac{1 + ax}{1 + \frac{1}{2}a} \quad \text{for } x \in [0, 1],$$

med verdien 0 utenfor enhetsintervallet. For hvilke verdier av parameteren a er dette en sannsynlighetstetthet? Og hva blir forventningen til en X som stammer fra f ? Om jeg gir deg 100 observasjoner $X_1, \dots, X_{100}$ fra denne, hvordan kan du estimere a fra disse?

(b) Visse uavhengige målinger $X_1, \dots, X_{24}$ stammer fra $N(\mu, \sigma^2)$ -fordelingen. Man beregner

$$\sum_{i=1}^{24} X_i = 179.234 \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^{24} X_i^2 = 1362.573.$$

Finn empirisk gjennomsnitt og standardavvik. Lag dessuten 90%-konfidensintervall for μ (eventuelt et med konfidensnivå tilnærmet 90%, altså ikke helt eksakt).

(c) I situasjonen over, hva er forventningen til variablene

$$U = \sum_{i=1}^{24} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \quad \text{og} \quad V = \sum_{i=1}^{24} \frac{(X_i - \hat{\mu})^2}{\sigma^2},$$

der $\hat{\mu}$ er maximum likelihood-estimatoren for μ ?

(d) En stokastisk variabel Y har tettheten

$$h(y) = \begin{cases} 4e^{-y^4} y^3 & \text{for } y \geq 0, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Finn den kumulative fordelingsfunksjonen $H(y)$ for Y . Finn dessuten medianen i fordelingen. Hva er fordelingen til $Z = Y^4$?

(e) Vis, ved hjelp av moment-genererende funksjoner, at en sum av to uavhengige Poisson-fordelte variable også er Poisson-fordelt.

Oppgave 2: en mynt og en annen mynt

DET ER TO MYNTER I EN HATT, og de ser prikk like ut. Den ene er «vanlig», med sjanse en halv for Kron; den andre har derimot sjanse to tredjedeler for Kron.

- (a) Du velger en av disse, tilfeldig (hver av dem har samme sjanse for å bli valgt av deg), og slynger den opp i luften. Hva er sannsynligheten p for at det blir Kron?
- (b) Du utfører altså denne øvelsen, og får Kron. Hva er sannsynligheten q for mynten er «den vanlige», av de to?
- (c) Du kaster denne mynten en gang till, spenningen stiger!, og får Kron, også denne gangen. Hva er nå sannsynligheten r for at mynten du valgte var den vanlige?
- (d) La K_1 være begivenheten «kron første gang» og tilsvarende K_2 begivenheten «kron andre gang». Er K_1 og K_2 uavhengige?

Oppgave 3: en mynt, en terning, og et sannsynlighetsrom

JEG SER PÅ DEN HVIDE HIMMEL og på utfallsrommet

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \{k, m\}, \omega_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

La 2^Ω være potensmengden, det vil si samlingen av alle delmengder av Ω .

- (a) Vis at funksjonen

$$\Pr(A) = \frac{|A|}{12} \quad \text{for } A \in 2^\Omega,$$

der $|A|$ betyr antall elementer i mengden A , er et sannsynlighetsmål på $(\Omega, 2^\Omega)$.

- (b) Her er to hendelser:

$$A = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \{k, m\}, \omega_2 \in \{1, 3, 5\}\},$$

$$B = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \{k, m\}, \omega_2 \in \{5, 6\}\}.$$

Er disse to hendelsene avhengige eller uavhengige?

- (c) Se på funksjonen

$$X(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \omega_1 = k, \\ 0 & \text{hvis } \omega_1 = m \end{cases}$$

Kan du forklare hvorfor X er en tilfeldig variabel? Hva er fordelingen til X ?

- (d) Hva er sannsynlighetstettheten til den tilfeldige variabelen Y gitt ved $Y = X + I_A + I_B$? Tegn også en skisse av dens kumulative fordeling.

Oppgave 4: en øvre grense å estimere

VI HAR KOMMET TIL funksjonen gitt ved

$$f(x) = \frac{3x^2}{\theta^3} \quad \text{for } x \in [0, \theta],$$

og $f(x) = 0$ ellers, der θ er en ukjent positiv parameter vi ønsker å estimere.

- (a) Sjekk at f er en tetthet, og finn et uttrykk for den kumulative tettheten $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$.
- (b) La X være en tilfeldig variabel hvis fordeling har tetthet f . Finn forventningen og variansen til X .
- (c) La $X_1, \dots, X_n$ være uavhengige tilfeldige variable, alle med samme fordeling som X , og la $\bar{X}_n = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$ være det empiriske gjennomsnittet. Bruk $\bar{X}_n$ og det du vet om X til å lage en estimator $\hat{\theta}_n = a\bar{X}_n$ som er forventningsrett for θ ; det vil si, finn en slik a .
- (d) La så $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Finn b_n slik at estimatoren $\tilde{\theta}_n = b_n M_n$ er forventningsrett for θ .
- (d) Vi liker estimatorer som gjør det forventede kvadrerte avvik mellom estimator og estimand liten. Og det gjør du også. Hvilken estimator, $\hat{\theta}_n$ eller $\tilde{\theta}_n$, liker du best? Forklar.

Oppgave 5: lineær trend pluss støy

FOR GITTE MÅLEPUNKTER $x_1, \dots, x_n$, alle positive, anta at $Y_i \sim N(\beta x_i, 1)$.

- (a) Vis at både maximum likelihood- og minste kvadratsum-estimatoren blir lik $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n x_i Y_i / M$, der $M = \sum_{i=1}^n x_i^2$.
- (b) Vis at denne estimatoren er forventningsrett og finn dens varians.
- (d) Lag et 95% konfidensintervall for β .

Oppgave 6: firkanter i prosess

VERDEN STÅR IKKE HELT STILLE, og mange objekter er i vedvarende endring. Det er mange eksempler fra anvendte vitenskaper der man studerer hvordan visse objekter forandrer seg over tid, med hensyn til geometriske karakteristika, utforming, størrelse, etc., når de blir utsatt for forskjellige prøvelser.

Her skal vi se på en ganske enkel modell for utvikling av *firkanter*, som utsettes for jevnlig «sjokk». Man starter med enhetskvadratet $F_0 = [0, 1] \times [0, 1]$ ved tid 0. Ved tid 1 utsettes firkanten for en prosess som bringer den til tilstanden $F_1 = [0, U_1] \times [0, V_1]$, der U_1 og V_1 er uavhengige og uniformt fordelte over $[0, 2]$. Ved tid 2 kommer et nytt sjokk, representert ved nye skaleringer U_2 og V_2 , slik at firkanten nå er blitt $F_2 = [0, U_1 U_2] \times [0, V_1 V_2]$. Slik fortsetter prosessen, slik at den opprinnelige firkanten etter n tidsenheter er blitt

$$F_n = [0, X_n] \times [0, Y_n], \quad \text{der} \quad X_n = U_1 \cdots U_n \text{ og } Y_n = V_1 \cdots V_n.$$

Det antas at alle $U_1, U_2, \dots, V_1, V_2, \dots$ er uavhengige fra den uniforme fordelingen over $[0, 2]$.

- (a) Vis at U_i , og dermed V_i , har forventning 1. Finn også deres varians. Bruk dette til å finne forventning for sidelengdene X_n og Y_n – forklar spesielt at arealet A_n av firkanten, etter n sjokk, har forventning 1. Finn dessuten variansen for A_n . Kommenter det du finner.
- (b) Hva er sannsynligheten for at firkant nr. n er større enn nr. $n-1$, altså at F_n inneholder F_{n-1} som en delmengde?
- (c) Hva er sannsynligheten for at firkant nr. n har et større areal enn nr. $n-1$? Finn en approksimasjon til den eksakte sannsynligheten ved simulering. (Det er fint om du også finner svaret ved en eksakt beregning.)
- (d) Vi følger nå firkanten gjennom de $n = 4$ første sjokk, og spør først om sannsynligheten for at firkanten har blitt større hver av disse gangene, altså at

$$F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset F_4.$$

Beregn denne. Kanskje er det mer sannsynlig at firkantene avtar i størrelse? Beregn sannsynligheten for at en firkant har blitt mindre ved hvert av de første $n = 4$ sjokk, altså at

$$F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset F_4.$$

- (e) Firkantene har faktisk en tendens til å bli mindre og mindre, ved grundig bokettersyn. Finn sannsynligheten

$$q_n = \Pr(F_n \text{ er større enn } [0, 1] \times [0, 1]),$$

nå for $n = 3$, gjerne ved simulering. (Det er fullt mulig, men noe tuklete, å finne denne sannsynligheten q_n eksakt, og dermed se hvordan den beveger seg med n .)

- (f) Prøv å vise at arealet A_n til F_n virkelig går mot null, i sannsynlighet, altså at

$$\Pr(A_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{for hver } \varepsilon > 0.$$

- (g) Vi endrer nå kjørereglene en smule, og sier at U_i og V_i er fra den uniforme fordelingen over $[0, b]$, der vi over har konsentrert oss om det interessante spesialtilfellet $b = 2$ (som har $E A_n = 1$, osv.). Vi at hvis $b > e = 2.71828\dots$, så vil firkantprosessen tvert i mot eksplodere, dvs. at firkantenes areal vokser mot uendelig når n vokser.