## ST 104, våren 1991
## Markov-prosesser

`-- ekstraoppgaver fra Nils --`

### Oppgave 1

La $Y$ være en variabel med utfallsrom de naturlige tall $\{0, 1, 2, \ldots\}$ og sannsynlighetsfordeling $\Pr\{Y = n\} = p_n$. Definer den *genererende funksjon* for $Y$ ved

$$G(z) = G_Y(z) = Ez^Y = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr\{Y = n\} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n.$$

(a) Beregn $G(z)$ når $Y$ er Poisson-fordelt med parameter $\lambda$, dvs. $p_n = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$ for $n \geq 0$.
(b) Og finn $G(z)$ når $Y$ er geometrisk fordelt, dvs. $p_n = (1-p)^n p$ for $n \geq 0$.
(c) Tilbake til den generelle definisjonen: Vis at $G(z)$ eksisterer for ihvertfall $-1 < z \leq 1$. Hva er $G(1)$?
(d) Vis at $G'(z) = EYz^{Y-1}$, ihvertfall for $|z| < 1$. Hva blir $G''(z)$, uttrykt som forventning?
(e) Vis at $G'(1) = EY$ og at $G''(1) = EY(Y-1)$. Anvend dette til å finne forventning og varians for Poisson-fordelingen og den geometriske fordeling.
(f) Anta at $X$ og $Y$ er uavhengige variable med genererende funksjoner $G_X(z)$ og $G_Y(z)$. Vis at variabelen $X + Y$ har genererende funksjon

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)\, G_Y(z).$$

(g) Bruk (f) (i kombinasjon med et entydighetsteorem i teorien for potensrekker) til å vise at summer av uavhengige Poisson-variable er Poisson-fordelt.

### Oppgave 2

Man definerer den genererende funksjonen til en *vilkårlig* tallfølge $\{a_n : n \geq 0\}$ ved $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, altså ikke bare for de som danner sannsynligheter. Spesielt defineres

$$P_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} z^n \quad \text{og} \quad F_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n$$

for Markovkjeder med overgangs-sannsynligheter $P_{ij}^{(n)}$ og førstegangs-sannsynligheter $f_{ij}^{(n)}$. Merk her at $P_{ii}^{(0)} = 1$, $P_{ij}^{(0)} = 0$ når $i \neq j$, mens $f_{ij}^{(0)}$ er definert som 0 for alle $i$ og $j$.

(a) Vis at

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}.$$

(b) Vis at $P_{ii}(z) = 1/(1 - F_{ii}(z))$. Hva får du fra dette når $z$ går mot 1 fra venstre?
(c) Vis at $P_{ij}(z) = F_{ij}(z) P_{jj}(z)$ når $i \neq j$. Undersøk igjen hva du får frem ved å la $z \to 1$.

## Oppgave 3

Denne oppgaven handler om den såkalte 'dobbelt-forventnings-regelen', som spiller en ikke ubetydelig rolle i statistikk og sannsynlighetsregning. Vi får ofte bruk for den i ST 104.

(a) La $(X, Y)$ ha simultan sannsynlighetsfordeling

$$\Pr\{X = x, Y = y\} = f(x, y), \quad x \in \mathcal{X},\, y \in \mathcal{Y},$$

der utfallsrommene $\mathcal{X}$ og $\mathcal{Y}$ er endelige eller tellbart uendelige. Vis at den betingede fordelingen for $X$ gitt $Y = y$ er $f(x|y) = f(x, y)/f_2(y)$, der $f_2(y) = \sum_x f(x, y)$ er marginalfordelingen for $Y$.

(b) Se på den betingede forventningen

$$E\{X|Y = y\} = \sum_x x\, f(x|y) = \xi(y),$$

oppfattet som funksjon av $y$. Spesielt kan man oppfatte $E(X|Y) = \xi(Y)$ som en stokastisk variabel (som bare avhenger av $Y$). Vis at

$$E\{E(X|Y)\} = E\xi(Y) = EX.$$

Dette er regelen om dobbeltforventning, i enkel diskret versjon. Ofte skriver man bare $EE(X|Y)$ istedetfor $E\{E(X|Y)\}$.

(c) Gjennomfør dette i situasjonen der $(X, Y)$ er kontinuerlig fordelt, med simultantetthet $f(x, y)$. Regelen gjelder helt generelt, også med mer kompliserte typer av sannsynlighetsfordelinger.

(d) Bruk regelen over til å finne frem til 'regelen om dobbeltvarians':

$$\mathrm{Var}\, X = E\{\mathrm{Var}\, X|Y\} + \mathrm{Var}\{EX|Y\}.$$

Man skriver '$\mathrm{Var} = E\mathrm{Var} + \mathrm{Var}E$'.

(e) En enkel illustrasjon: Anta at $X$ for gitt $p$-verdi er binomisk fordelt $(n, p)$. Sett opp de velkjente formler for $E(X|p)$ og $\mathrm{Var}(X|p)$. Anta så at $p$ ikke er konstant i populasjonen, men er en stokastisk variabel $P$, som varierer i henhold til den uniforme fordelingen på $[0, 1]$. Finn forventning og varians til $P$. Og bruk så dette til å finne *ubetinget* forventning og varians til $X$.

(f) I et klassisk datamateriale over 6000 12-barnsfamilier i Nieder-Sachsen fra forrige århundre viser det seg at mens den empiriske forventning for $X$, antall gutter av 12 fødsler, ganske riktig er meget nær $12 \cdot 0.52 = 6.24$, så er derimot det empiriske standardavviket på `[checkit, Nils]`, signifikant større enn $(12 \cdot 0.52 \cdot 0.48)^{1/2} = 1.731$ [som er det tall man skulle forvente hvis $X$ var eksakt binomisk fordelt $(12, 0.52)$]. Gi en rimelig forklaring på dette.

## Oppgave 4

La $\{X_n\}$ være en Markov-kjede på $\{0, 1\}$ med overgangsmatrise

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

(a) Finn stasjonær-sannsynlighetene $\pi_0$ og $\pi_1$.

(b) Finn $f_{00}^{(n)}$-sannsynlighetene. Beregn dessuten

$$f_{00}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} \quad \text{og} \quad \mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)},$$

og gi tolkninger av disse størrelsene.

(c) Finn den genererende funksjonen $F_{00}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} z^n$. Hva er denne rekkens konvergensområde?

(d) Og bruk en kjent sammenheng mellom $F_{00}(z)$ og $P_{00}(z)$ til å finne frem til

$$P_{00}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{(n)} z^n = \frac{1 - 0.6\, s}{1 - 1.5\, s + 0.5\, s^2}.$$

Hva er denne rekkens konvergensområde?

(e) Ved rekke-utvikling skal du så finne et eksplisitt uttrykk for $P_{00}^{(n)}$. Hvis du ikke lykkes med rekkeutviklingen (og partialbrøk-oppspaltingen?) kan du bruke en annen metode (citere fra boken, for eksempel).

(f) La $V_j$ være den første $n \geq 1$ der $X_n = j$ ('første besøkstidspunkt i $j$'). Finn de fire tallene

$$\tau_{ij} = E\{V_j | X_0 = i\}, \quad i, j = 0, 1.$$

## Oppgave 5

Se så på en Markovkjede $\{X_n\}$ med utfallsrom $\{1, 2, 3, 4\}$ og overgangsmatrise

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}.$$

(a) Forklar hvilke klasser av tilstander denne Markovkjeden har, og legg ut om rekurrens og transiens.

(b) Vennligst regn ut $\mathbf{P}^2$ og $\mathbf{P}^3$. Kommenter.

(c) Beregn den såkalte 'fundamentale matrisen', $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$.

(d) La $N_j = \sum_{n=1}^{\infty} I\{X_n = j\}$ være det totale antall besøk i tilstand $j$. Hva er den prinsipale forskjell på $N_1$ og $N_2$ på den ene side, og $N_3$ og $N_4$ på den annen side?

(e) Finn $\mu_{33}$, $\mu_{34}$, $\mu_{43}$, $\mu_{44}$, der $\mu_{ij} = E\{N_j | X_0 = i\}$.

(f) Finn også $\sigma_{ij}^2$, variansen til $N_j$ gitt start i $X_0 = i$, for $i, j = 3, 4$.

(g) Se på $N^* = N_3 + N_4$, den totale tid kjeden befinner seg blant de transiente tilstandene. Finn forventning og varians for $N^*$, gitt at $X_0 = 3$.

(h) Se endelig på $g_{ij}$, sannsynligheten for at kjeden etter å levd blant de transiente elementene starter sin rekurrente karriere i akkurat $j$, gitt at $X_0 = i$, for $i = 3, 4$ og $j = 1, 2$. Finn $g_{31}$, $g_{32}$, $g_{41}$, $g_{42}$.

(i) Finn til slutt grensen $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ for så mange $(i, j)$ du klarer, altså i beste fall alle elementene i matrisen $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$.

## Oppgave 6

Lag en Markovkjede på $\{1,2,3\}$ som ikke er tids-reversibel, dvs. der den reverserte kjede *ikke* har samme overgangsmatrise som den opprinnelige.

## Oppgave 7

Hvilken pinlig blunder gjør U. Narayan Bhat seg skyldig i, i sin Exercise 16, side 67?

## Oppgave 8

Du har to bøtter med tilsammen $2N = 10$ små baller. La $X_n$ være antall baller i venstre bøtte ved tidspunkt $n$, så $X_n \in \{0, 1, \ldots, 10\}$. Hvis $X_n = i$ så vil $X_{n+1}$ være lik $i + 1$ med sannsynlighet $1 - \frac{i}{10}$ og lik $i - 1$ med sannsynlighet $\frac{i}{10}$.

(a) Gi en 'uformell' beskrivelse av hvordan denne prosessen oppfører seg over tid.

(b) Finn stasjonærfordelingen $\pi_0, \ldots, \pi_{10}$.

(c) Generaliser til $2N$ istedetfor '10', og finn igjen stasjonærfordelingen. Dette er den såkalte Ehrenfest-modellen, som blant annet blir brukt for varmeutveksling, stålfjærer med balansepunkt, maktbalanse, &cetera.

## Oppgave 9

La X være Poisson-fordelt med parameter $\lambda$.

(a) Hva er det mest sannsynlige utfall?

(b) Finn $\Pr\{X \text{ er odde}\}$, $\Pr\{X \text{ er partall}\}$.

(c) Beregn den genererende funksjonen $G(z) = Es^X$.

(d) Finn forventningen $\xi$, variansen $\sigma^2$, samt skjevheten til $\gamma$ for $X$. Definisjonen er $\gamma = E(X - \xi)^3/\sigma^3$. Kommenter situasjonen der $\lambda$ er stor.

## Oppgave 10

La $\{X(t)\colon t \geq 0\}$ og $\{Y(t)\colon t \geq 0\}$ være uavhengige Poisson-prosesser med parametre $\lambda$ og $\mu$. Anta også at $X(0) = Y(0) = 0$.

(a) La $Z(t) = X(t) + Y(t)$. Vis at dette blir en Poisson-prosess. Generaliser.

(b) Hva er sannsynligheten for at en $X$-hendelse inntreffer før første $Y$-hendelse?

(c) Hva er sannsynligheten for at første $X$-hendelse inntreffer samtidig med første $Y$-hendelse?

(d) La $U$ være tiden som går inntil det inntreffer en hendelse i enten $X$- eller $Y$-prosessen. Finn fordelingen til $U$ og $EU$.

(e) La $V$ være tiden som går inntil "det har skjedd noe" i både $X$- og $Y$-prosessen. Finn fordelingen til $V$ og $EV$.

(f) Finn $E\{X(s)|X(t) = 50\}$ for $s \leq t$.

(g) Finn $E\{X(t)|X(t) + Y(t) = 100\}$.

(h) Finn til slutt $E\{X(s)|X(t) + Y(t) = 100\}$ for $s \leq t$.

## Oppgave 11

La $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$ være uavhengige Poisson-prosesser med samme parameter $\lambda$. Alle starter ved tid 0 i tilstand 0.

(a) La $U$ være tiden til første hendelse. Finn fordelingen til $U$ og $EU$.
(b) La $V$ være tiden til det har skjedd noe i alle fire prosesser. Finn fordelingen til $V$ og $EV$.

### Oppgave 12

La $X$, $Y$, $Z$ være uavhengige Poisson-prosesser med parametre $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$. Da blir

$$A(t) = X(t) + Y(t) \quad \text{og} \quad B(t) = Y(t) + Z(t)$$

to *avhengige* Poisson-prosesser.
(a) Finn korrelasjonskoeffisienten mellom $A(t)$ og $B(t)$.
(b) Hva er sannsynligheten for at $A$ har et sprang i tidspunkt $t$, gitt at $B$ har et sprang ved samme tidspunkt? (Sammenlign dette med situasjonen i oppgave 2 punkt (c).)

### Oppgave 13

La $X$ være en Yule-prosess som starter med $X(0) = 1$ individ, og med parameter $\beta$, dvs. $\lambda_i = i\beta$ for $i = 1, 2, \ldots$.
(a) Hva er $\Pr\{X(t) = n\}$? Finn spesielt $EX(t)$.
(b) La $W(n)$ være tiden det tar inntil populasjonen har $n$ individer. Hva er $EW(n)$ og $\operatorname{Var} W(n)$?
(c) Beregn $EW(n)$ og $\operatorname{Var} W(n)$ numerisk for n = 100, 1000, 10000. Benytt at

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \doteq \log n + \gamma,$$
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6},$$

der $\gamma = 0.5772...$ er Euler–Mascheronis konstant.
(d) Er Euler–Mascheronis konstant rasjonal eller irrasjonal?

### Oppgave 14

La $X$ være en Yule-prosess med $X(0) = 1$ igjen.
(a) Finn fordelingen til $X(s)$ gitt at $X(t) = 100$ for $s \leq t$. Finn spesielt $E\{X(\frac{1}{2}t)|X(t) = 100\}$.
(b) For hvilket tidspunkt $s$ er $E\{X(s)|X(t) = 1000\} = 500$? Kommenter resultatet.

### Oppgave 15

La $X$ være eksponentielt fordelt med parameter $\lambda$. Finn den genererende funksjon $f(z) = Ez^X$, samt forventning, varians og skjevhet for $X$.

### Oppgave 16

Anta $W = T_1 + \ldots + T_N$, hvor $T_i$-ene er uavhengige med samme genererende funksjon $f(z) = Ez^T$ og uavhengige av $N$ som har genererende funksjon $G(s) = Es^N$.
(a) Finn et hensiktsmessig uttrykk for $EW$ ved hjelp av "regelen om dobbeltforventning", $EW = EE(W|N)$.

(b) Finn også et passende uttrykk for variansen til $W$ ved hjelp av

$$\operatorname{Var} W = E\operatorname{Var}(W|N) + \operatorname{Var} E(W|N).$$

(c) Finn den genererende funksjonen til $W$ uttrykt ved $f$ og $G$. Bruk dette til å kontrollere (a) og (b).

## ST 104, våren 1991

Марковские цепи

### Oppgave 17

Kunder ankommer en sentral med Poisson-intensitet $\lambda = 2$ pr. minutt. Ekspedisjonstiden varierer fra kunde til kunde, men er eksponentielt fordelt med parameter $\mu = 3$ pr. minutt.

(a) Anta først at det bare er en "luke", dvs. én kø med én betjent. La $X(t)$ være køens lengde ved tidspunkt $t$. Finn stasjonærfordelingen, altså fordelingen til $N = X(\infty)$. — I punktene (b), (c) og (d) skal det antas at systemet er i sin stasjonærfordeling.

(b) Hva er sannsynligheten for at en ankommende kunde kommer til "ledig luke", dvs. slipper kø?

(c) La $W$ være tiden det tar før en tilfeldig ankommende kunde blir ferdig ekspedert (fra han ankommer sentralen). Finn $EW$. Finn også fordelingen til $W$, for eksempel ved hjelp av genererende funksjoner.

(d) Luken er betjent av Hansen, som utnytter hvert ledige sekund til å lese russiske romaner. La $U$ være brøkdelen av en

— Живаго!

— Лариса Федоровна!

arbeidstime der Hansen får lest russiske romaner. Finn $EU$.

(e) Anta nå at sentralen får *to* luker med hver sin betjent og hver sin kø. La $X(t)$ være den samlede kølengde ved tidspunkt $t$. Gjør (a), (b), (c), (d) omigjen for denne nye situasjonen, unntatt spørsmålet Мне это ясно, как день, я это чувствую всеми своими фибрами, но как выразить и сформулировать эту мысль? om fordelingen til $W$ (men finn gjerne dens genererende funksjon). Får Hansen lest mer enn før?

### Oppgave 18

Tenk deg kvaliteten på været grovt sortert i (subjektivt spesifiserte) kategorier D = dårlig, A = alminnelig, og P = pent. (Konsentrer deg om et passende geografisk område og en passende tid på året.)

(a) Sett opp en rimelig $3 \times 3$ matrise med overgangssannsynligheter for D, A, P. Bruk dine (subjektive) kunnskaper om været, og bruk en desimal i sannsynlighetene.

(b) Anta, som en grov approksimasjon, at været følger en ett-skritts Markovkjede med overgangsmatrisen du har spesifisert over. Finn stasjonærsannsynlighetene. Hvor mange dager med pent vær kan du forvente i løpet av juli neste år?

(c) Meteorologisk empiri viser at approksimasjonen over er for dårlig, og at mange fenomener som har med vær og vind å gjøre meget bedre lar seg modellere som en *to-skritts*

Markovkjede. Været imorgen avhenger altså av været idag og igår, men ikke av tidligere dagers data, under en slik modell. — La $X$ være vær-kvaliteten på dag nr. $n$, med tilstander D, A, P, og la

$$Y_n = (X_{n-1}, X_n).$$

Vis at $\{Y_n\}$ danner en ("vanlig") ett-skritts Markovkjede.

(d) Sett opp en for deg rimelig $9 \times 9$ overgangsmatrise for $Y_n$-kjeden, der tilstandene er DD, DA, DP, AD, AA, AP, PD, PA, PP. Bemerk at det er mange 0-er i overgangsmatrisen. Hvor mange dager med pent vær kan du forvente i din 30-dagers sommerferie neste år?

**Oppgave 19**

Aksiomene for sannsynlighetsregningen settes gjerne opp som følger, ihvertfall i elementære lærebøker: $0 \leq P(A) \leq 1$ for alle $A$; $P(\emptyset) = 0$ hvor $\emptyset$ er den tomme mengde; $P(S) = 1$ hvor $S$ er hele utfallsrommet; og $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ når $A$ og $B$ er disjunkte. Det viser seg imidlertid å innebære vesentlige begrensninger på hva som kan utledes dersom man ikke inkluderer en "tellbart uendelig" versjon av den siste grunnregelen:

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad \text{hver gang } A_1, A_2, \ldots \text{ er disjunkte begivenheter.} \qquad (\spadesuit)$$

Vi har faktisk benyttet oss av ($\spadesuit$) mange ganger i både utledninger av resultater og løsninger av oppgaver i ST 104.

(a) Anta at begivenhetene $B_1, B_2, B_3, \ldots$ er voksende; $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots$. Vis at $P(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$.

(b) Betrakt en forgreningsprosess $X_0, X_1, X_2, \ldots$, og la $B$ være den begivenhet at populasjonen før eller siden dør ut. Vis at $\Pr(B) = \lim_{n\to\infty} \Pr\{X_n = 0\}$.

(c) Vis at $\Pr(B)$ over er lik den minste positive løsning av ligningen $f(z) = z$, der $f(z)$ er den genererende funksjonen til fordelingen for antall avkom fra et enkelt individ.

**Oppgave 20**

La $A_1, A_2, A_3, \ldots$ være begivenheter. Definer

$$A_{\text{i.o.}} = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

(a) Forklar hvorfor $A_{\text{i.o.}}$ nøyaktig svarer til at uendelig mange av $A_n$-begivenhetene opptrer ("infinitely often").

(b) Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n)$ er en konvergent rekke. Vis at $\Pr(A_{\text{i.o.}}) = 0$, det vil si at med sannsynlighet 1 vil kun endelig mange av $A_n$-begivenhetene opptre. (Dette er for øvrig "den lette halvparten" av det såkalte Borel–Cantellis lemma.)

(c) La en Markovkjede starte i tilstand $i$, og la tilstand $j$, som kan nås fra $i$, være transient. Vis at sannsynligheten er 0 for at kjeden besøker $j$ uendelig mange ganger.

(d) Betrakt en forgreningsprosess, og definer begivenheten $B$, at prosessen dør ut, og begivenheten $C$, at prosessen eksploderer. $B$ betyr at det finnes en $n$ slik at $X_n = 0$;

$C$ betyr at for hver eneste (store) $K$ så finnes det en $n$ slik at $X_m > K$ for alle $m \geq n$, altså

$$C = \cap_{K=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{m=n}^{\infty} \{X_n > K\}.$$

Vis at $\Pr(B) + \Pr(C) = 1$. Kommenter dette resultatet.

## Oppgave 21

Er livet en Markovkjede? Begrunn svaret.

## Oppgave 22

La $\{X_n\}$ være en Markovkjede på tilstandene 0 og 1 med overgangsmatrise

$$\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

(a) Finn stasjonærfordelingen for kjeden.

(b) Finn "baklengsfordelingen" til kjeden, det vil si finn

$$\Pr\{X_n = i | X_{n+1} = 1\} \quad \text{og} \quad \Pr\{X_n = i | X_n = 0\}$$

for $i = 0$ og $i = 1$. Anta at $n$ er så stor at kjeden har nådd stasjonæritet.

## Oppgave 23

Betrakt pråny en kjede på 0 og 1 definert som over. Under har jeg fått tak i (kunstige, men realistiske) data for $X_0, X_1, \ldots, X_{100}$. Det var bestemt på forhånd at $X_0 = 1$, men $X_1, \ldots, X_{100}$ er altså utfallene av 100 stokastiske variable. Jeg simulerte data med et bestemt og for dere hemmeligholdt valg av parametre $p$ og $q$. (Jeg brukte statistikkprogrampakken MINITAB, som er meget enkel å lære, og som er særlig lett å simulere alle slags fordelinger i.)

```
1 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0
0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 0 0
0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0
0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 1
1 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1
0 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1
```

*If it's a 'one', I'm going downstairs to rape Arlene.*
— THE DICE MAN, Luke Rhinehart, 1971

Oppgaven består i å gjette (estimere) de verdiene jeg har benyttet for $p$ og $q$. Hint: sett først opp et uttrykk for sannsynligheten for at jeg skulle få akkurat utfallet over, uttrykt ved de ukjente parametre $p$ og $q$. Finn så sannsynlighetsmaksimeringsestimatene; de verdier av parametrene som maksimerer sannsynligheten for det faktisk observerte utfall.