Hvordan finne magiske kvadrater og løse sudoku ved hjelp av sannsynlighetsmodeller og Markovkjeder



Nils Lid Hjort

Department of Mathematics, University of Oslo

Fagligpedagogisk dag, 29-x-2026
(Flere fagdetaljer: se våre FocuStat Blogposter)

Tidligere fagligpedagogiske affærer:

* 2020: Korona-prosessene: hvordan måle akselerasjonen?
* 2019: Overspredde, betabinomiske og markovske barn
* 2018: Krig, fred, og statistikere
* 2017: Hvaler, politikere, og statistikere
* 2015: Tirant lo Blanc, 1466:
  Når tok Forfatter To over for Forfatter En?
* 2014: OL og VM i langrennssprint:
  Hvordan semifinalene influerer finalene
* 2013: Hvem skal få lov til å gå 10000 m?
* ... og diverse enda tidligere anledninger

Idag: magiske kvadrater, sudoko – hvordan finne disse uten å være ekspert:

* lager sannsynlighetsmodeller (i digre rom)
* fikses slik at høy sannsynlighet $\approx$ nærme løsning
* sampler i vei fra disse (via Markovkjeder)
* håper å finne løsning i løpet av et par millioner iterasjoner

The Lost Symbol (Dan Brown, 2009, 47 millioner bøker)



Albrecht Dürer, Melencolia I, 1514

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

"Thirty-four", she said. "Every direction adds up to thirty-four." "Exactly", Langdon said. "But did you know that this magic square is famous because Dürer accomplished the seemingly impossible?" He quickly showed Katherine that in addition to making the rows, columns, and diagonals add up to thirty-four, Dürer had also found a way to make the four quadrants, the four center squares, and even the four corner squares add up to that number. "Most amazing, though, was Dürer's ability to position the numbers 15 and 14 together in the bottom row as an indication of the year in which he accomplished this incredible feat!'

Sagrada Família, Barcelona

Antoni Gaudí og Josep Maria Subirachs: det magiske 33-kvadrat



Et magisk 6×6 kvadrat

Se hvor pen den er: tallene $1, 2, 3, \ldots, 34, 35, 36$ arrangert slik at alle summer $= 111$ (som er $(1 + \cdots + 36)/6$): saumfar de 6 rader; de 6 kolonner; de 2 diagonaler.

$$\begin{bmatrix} 32 & 14 & 26 & 13 & 25 & 1 \\ 22 & 8 & 11 & 18 & 16 & 36 \\ 10 & 24 & 5 & 35 & 31 & 6 \\ 15 & 12 & 33 & 17 & 7 & 27 \\ 29 & 23 & 2 & 9 & 28 & 20 \\ 3 & 30 & 34 & 19 & 4 & 21 \end{bmatrix}$$

Men hvordan?! (a) Vanligvis: man er smart og iherdig matematiker og lærer seg diverse talltriks.
(b) IDAG: jeg er smart på annet vis: (i) lager gode sannsynlighetsmodeller; (ii) sampler fra disse; (iii) håper det beste.

Smarte modeller: høy sannsynlighet $\approx$ nær løsning

Mekker i hop en sannsynlighetsmodell $f(x)$ på det digre rommet av alle x, alle verdens 6×6-kvadrater, der $1, 2, \ldots, 35, 36$ skal bo.

Digert (bare fornavnet): $1 \cdot 2 \cdots 35 \cdot 36 = 36! = 3.7199 \cdot 10^{41}$: ubegripelig mye større enn f.eks. $3000 \cdot 10^{12}$ (jordklodens samlede pengesum, tre tusen billiarder, i kroner). Jeg ønsker meg at

$$R(x) = \sum_{i=1}^{6} \Big| \sum_{j=1}^{6} x[i,j] - m \Big|,$$

$$C(x) = \sum_{j=1}^{6} \Big| \sum_{i=1}^{6} x[i,j] - m \Big|,$$

$$D(x) = \Big| x[1,1] + \cdots + x[6,6] - m \Big| + \Big| x[6,1] + \cdots + x[1,6] - m \Big|$$

blir små, kommer nærme null, for $m = 111$, det magiske tall.

Plan, del I: min sannsynlighetsmodell

På det digre rommet av absolutt alle x, definer

$$f(x) = (1/k)\exp\{-\lambda Q(x)\},$$

der

$$Q(x) = R(x) + C(x) + D(x).$$

Her er λ en tweaking parameter (velger selv, i min laptop), og

$$k = \sum_{\text{astronomical}} \exp\{-\lambda Q(x)\}$$

er en sum over de ridikuløst mange ledd, den som gjør at $\sum_{\text{alle } x} f(x) = 1$. Ingen maskin kan beregne k.

λ stor: altfor skarp på toppen, kommer aldri i gang;
λ liten: altfor flatt, blir letende uendelig lenge.

Plan, del II: sampler fra min modell (og håper det beste)

Tja, svært liten nål i abnormt stor høystakk:
99.999999 prosent av de fantasillioner utfall har lav sannsynlighet.

Jeg håper å kunne sample i vei blant de 0.0000001 prosent med høyere sannsynlighet.

Er jeg heldig (og dyktig med min λ og min R-kode), finner jeg «før eller senere» utfall x der $Q(x) = R(x) + C(x) + D(x)$ er lav (nærme en løsning) ...

og «før eller meget senere» endelig en x^* der $Q(x^*) = R(x^*) + C(x^*) + D(x^*) = 0$ (en løsning!).

Verktøy: MCMC, Markov Chain Monte Carlo (funnet opp i 1953, da noen ville lage en H-bombe).

Spesialkonstruert Markovkjede av 6×6-kvadrater:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{1,000,000}, x_{1,000,001}, \ldots,$$

der x_{n+1} bare avhenger av x_n (funnet opp av A.A. Markov i 1906).

Rigger til spesialkonstruert Markovkjede i min laptop

(i) Jeg starter hvorsomhelst, i en x_1;

(ii) fra x_n lager jeg en x_{n+1}^{prop}, en random proposal;

(iii) jeg vurderer min proposal (et millisekund), og aksepterer den med min $\text{pracc}(x_{n+1}^{\text{prop}} \,|\, x_n)$;

(iv) om proposal ikke akseptert blir kjeden stående i x_n:

$$x_{n+1} = (1 - \text{ok})\, x_n + \text{ok}\, x_{n+1}^{\text{prop}}.$$

der $\text{ok} = 1$ hvis akseptert, $\text{ok} = 0$ hvis ikke akseptert.

Dette er en Markovkjede – og !!alt fungerer!!
dersom (a) $\pi(x^{\text{prop}} \,|\, x^{\text{old}}) = \pi(x^{\text{old}} \,|\, x^{\text{prop}})$, symmetrisk valgmekanisme for proposal; og (b)

$$\text{pracc} = \min\left(1, \frac{f(x^{\text{prop}})}{f(x^{\text{old}})}\right).$$

Klassisk: gitt en Markovkjede, hvordan går det, hva blir $f(x)$?
Her: bygger min egen Markovkjede, for å komme til oppgitt $f(x)$.

Proposal, regning, sjekking, praccing, skift (skritt for skritt)

Fra MCMC-kvadrat nr. 1102 til MCMC-kvadrat nr. 1003:
(i) foreslår å bytte verdiene i $[3, 4]$ og $[5, 6]$, altså $(23, 22)$ med $(22, 23)$; (ii) beregner sannsynligheten for at forslaget skal effektueres, $\mathrm{pracc} = \exp(-\lambda) = 0.358$;
(iii) svaret blir «ja» denne gangen:

$$\text{fra} \begin{bmatrix} 35 & 24 & 9 & 17 & 18 & 10 \\ 5 & 15 & 16 & 14 & 27 & 34 \\ 12 & 11 & 26 & 23 & 30 & 8 \\ 36 & 2 & 20 & 21 & 6 & 25 \\ 19 & 28 & 7 & 33 & 1 & 22 \\ 4 & 31 & 32 & 3 & 29 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{til} \begin{bmatrix} 35 & 24 & 9 & 17 & 18 & 10 \\ 5 & 15 & 16 & 14 & 27 & 34 \\ 12 & 11 & 26 & 22 & 30 & 8 \\ 36 & 2 & 20 & 21 & 6 & 25 \\ 19 & 28 & 7 & 33 & 1 & 23 \\ 4 & 31 & 32 & 3 & 29 & 13 \end{bmatrix}$$

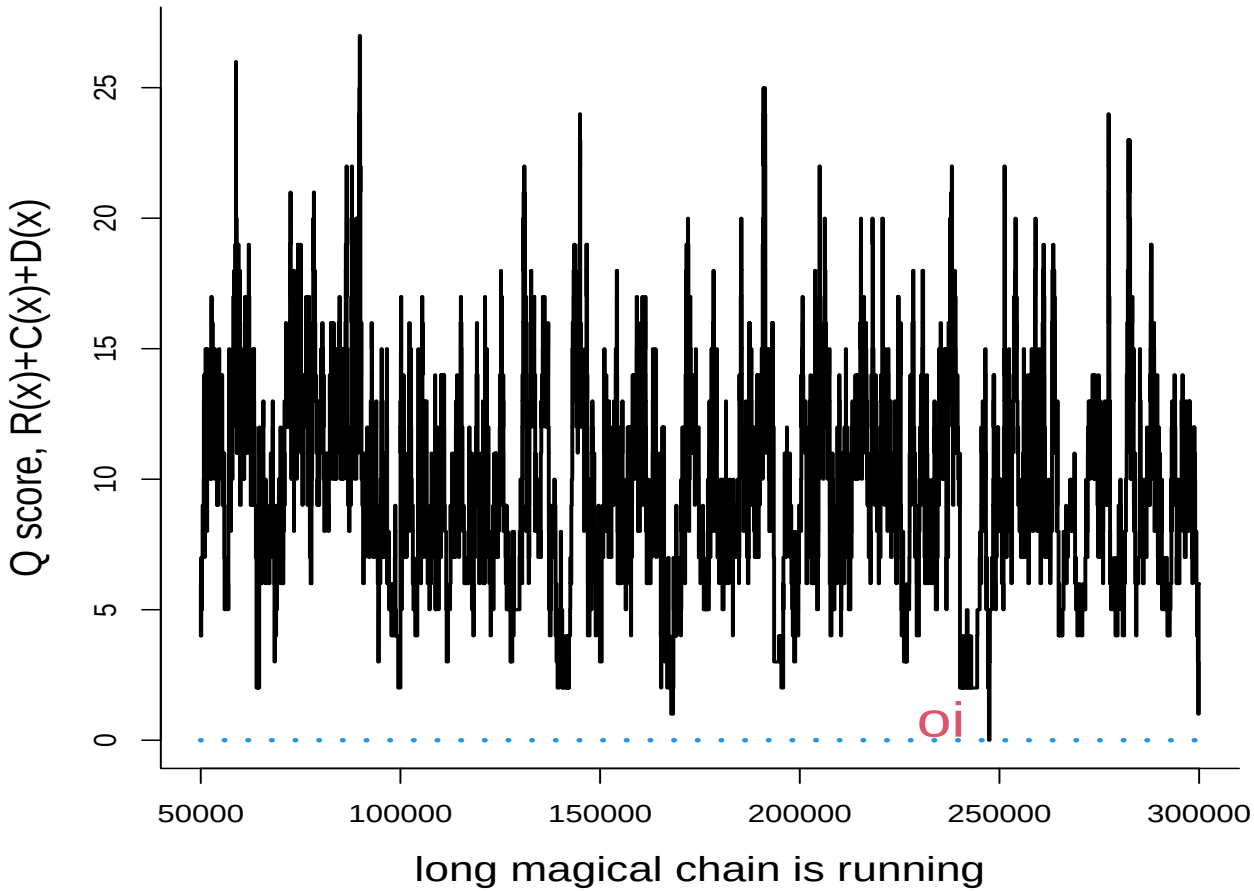
Dermed går $Q(x)$-kjeden

$$\text{fra } Q(x[1102, ,]) = 9 \text{ til } Q(x[1103, ,]) = 10.$$

Denne operasjonen, skritt for skritt, gjøres f.eks. en million ganger.

Klar ferdig gå:

Starter et tåpelig sted, x_1; prøver med $\lambda = 0.999$; proposals: velger to posisjoner fritt og bytter om; kjører i vei.



oi: etter 247361 iterasjoner har jeg funnet mitt magiske x^*.

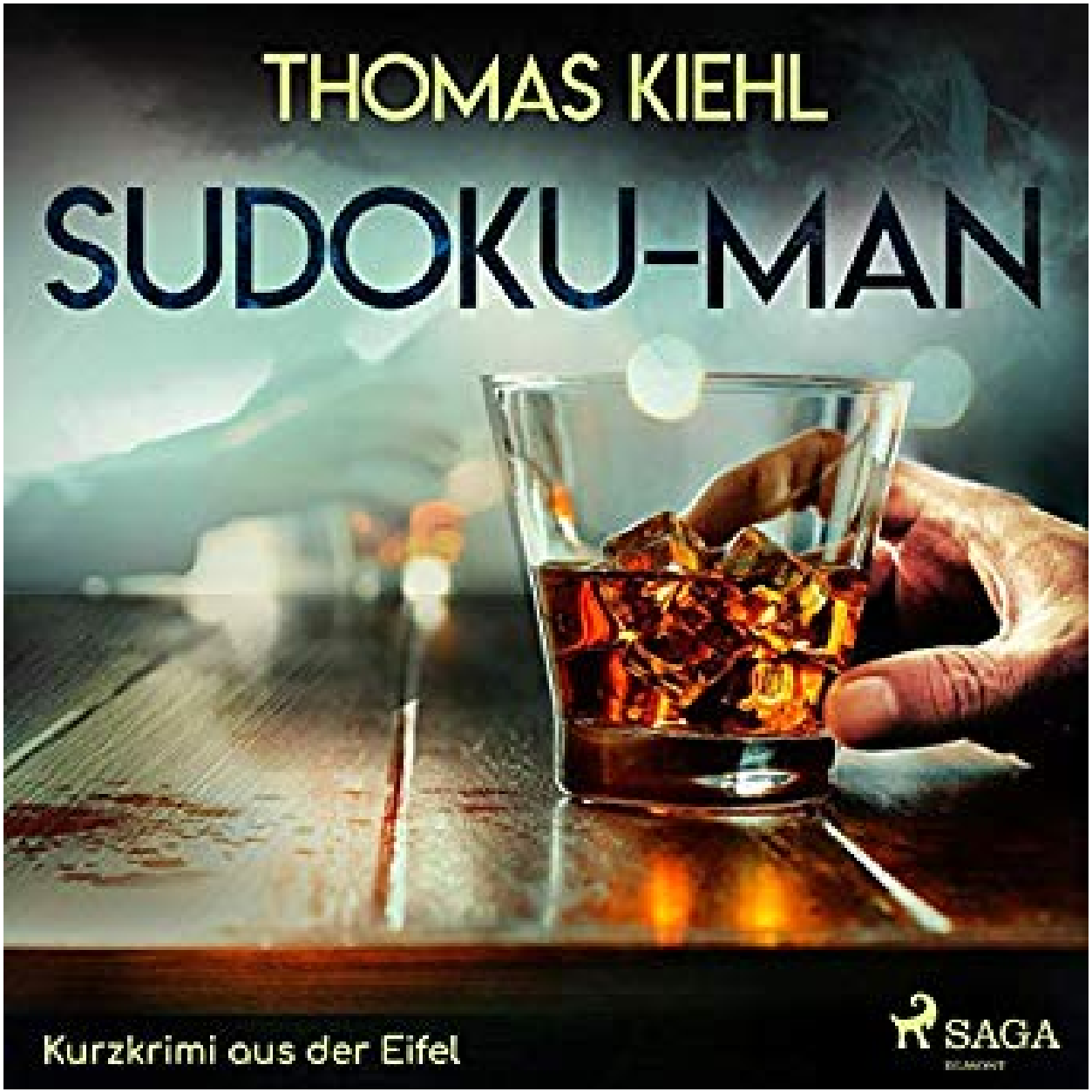
Taller tasks (utfallsrom $>$ antall atomer i universet)

Mitt maskineri – sette opp klok modell + MCMC sampling – gjør det mulig å angripe tøffere oppgaver. Denne 8×8 er ekstra magisk: sum 260 for alle rader, alle kolonner, begge diagonaler, og dessuten sum 520 i de fem 4×4-blokkene:

$$f(x) = (1/k)\exp\{-\lambda Q(x)\},$$
$$Q(x) = R(x) + C(x) + D(x) + E_1(x) + E_2(x) + E_3(x) + E_4(x) + E_5(x).$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 27 & 50 & 6 & 48 & 43 & 39 & 46 & 1 \\ 3 & 56 & 60 & 8 & 14 & 49 & 61 & 9 \\ 11 & 28 & 45 & 53 & 24 & 40 & 25 & 34 \\ 35 & 42 & 7 & 41 & 16 & 36 & 19 & 64 \\ \hline 22 & 17 & 44 & 26 & 54 & 13 & 21 & 63 \\ 59 & 5 & 33 & 57 & 29 & 2 & 37 & 38 \\ 52 & 32 & 55 & 12 & 62 & 23 & 4 & 20 \\ 51 & 30 & 10 & 15 & 18 & 58 & 47 & 31 \end{array}\right]$$

Neste kapittel: skremmende & fascinerende



Min aller første sūdoku

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

(sùdú) kinesisk, for sudoku, «enkeltstående tall»;
japansk, forkortelse av sūji wa dokushin ni kagiru:
«tallene må være enkeltstående».

Prøver mine magiske knep (i dette nye farvann)

Kan jeg sjekke alle? Nei, det tar en computer 37 år. For de første 3 blokker er det 4, 5, 8 tall som mangler:

$$4! \cdot 5! \cdot 8! = 24 \cdot 120 \cdot 40320 = 116{,}121{,}600$$

muligheter bare der. Tilsammen $8.388 \cdot 10^{23}$ mulige kombinasjoner.

Vil få til: tallene i hver linje og kolonne, sortert, skal være 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Så $r_i(x)$ og $c_j(x)$ skal komme seg ned til null:

$$r_i(x) = \sum_{j=1}^{9} |\mathrm{sort}(x[i,\cdot])_j - j|,$$

$$c_j(x) = \sum_{i=1}^{9} |\mathrm{sort}(x[\cdot,j])_i - i|.$$

Så jeg kjører $f(x) = (1/k)\exp\{-\lambda Q(x)\}$, med abnorm k, og

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{9} r_i(x) + \sum_{j=1}^{9} c_j(x).$$

Her går vi igjen

Kjører $f(x) = (1/k)\exp\{-\lambda Q(x)\}$, på det digre rommet av alle 9×9-kvadrater x, med de 9 blokker, og der $(5+4+1)+(3+4+3)+(1+4+5) = 30$ er pre-satt: jeg skal finne de manglende 61 tall og deres presise posisjoner.

En del mer bokholderi enn for kvadratene.

(i) Proposals: velger 1 av de 9 blokker; velger 2 posisjoner blant de ikke-besatte; bytter om. Sannsynlighetene er symmetriske,

$$\pi(x^{\text{prop}} \mid x^{\text{old}}) = \pi(x^{\text{old}} \mid x^{\text{prop}}),$$

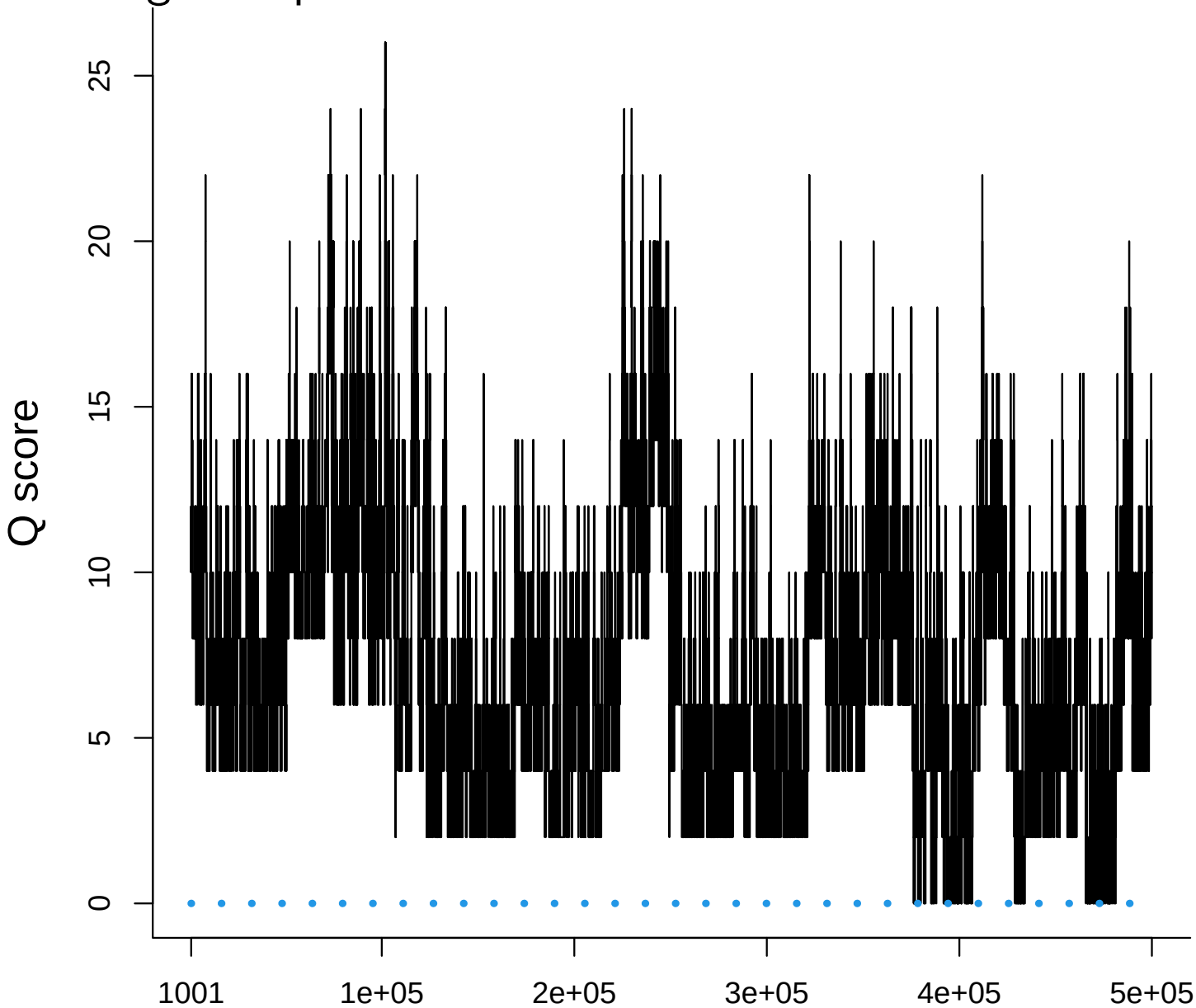
nødvendig for at min MCMC skal levere fra den gitte $f(x)$.

(ii) Den presise pracc (hurra!, den brysomme k blir borte!):

$$\text{pracc} = \min\left(1, \frac{f(x^{\text{prop}})}{f(x^{\text{old}})}\right) = \min\left(1, \exp(-\lambda[\{Q(x^{\text{prop}}) - Q(x)\}])\right).$$

Den lange magiske Markovkjede leverer fra $f(x)$

Hold ut og vent på null:



Dermed finner jeg frem

Min Markovkjede $x_1, x_2, \cdots$ av digre 9×9-matriser holder på en halv million ganger (ti laptop-minutter) – og finner x^*, løsningen (uten å vite a priori at det er en løsning, og uten å vite at bare er én løsning).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} & 4 \\ \mathbf{6} & 7 & 2 \\ 1 & \mathbf{9} & \mathbf{8} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & \mathbf{7} & 8 \\ \mathbf{1} & \mathbf{9} & \mathbf{5} \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 8 \\ 5 & \mathbf{6} & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{8} & 5 & 9 \\ \mathbf{4} & 2 & 6 \\ \mathbf{7} & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & \mathbf{6} & 1 \\ \mathbf{8} & 5 & \mathbf{3} \\ 9 & \mathbf{2} & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & \mathbf{3} \\ 7 & 9 & \mathbf{1} \\ 8 & 5 & \mathbf{6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & \mathbf{6} & 1 \\ 2 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{9} \\ 2 & \mathbf{8} & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} & 4 \\ 6 & 3 & \mathbf{5} \\ 1 & \mathbf{7} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$$

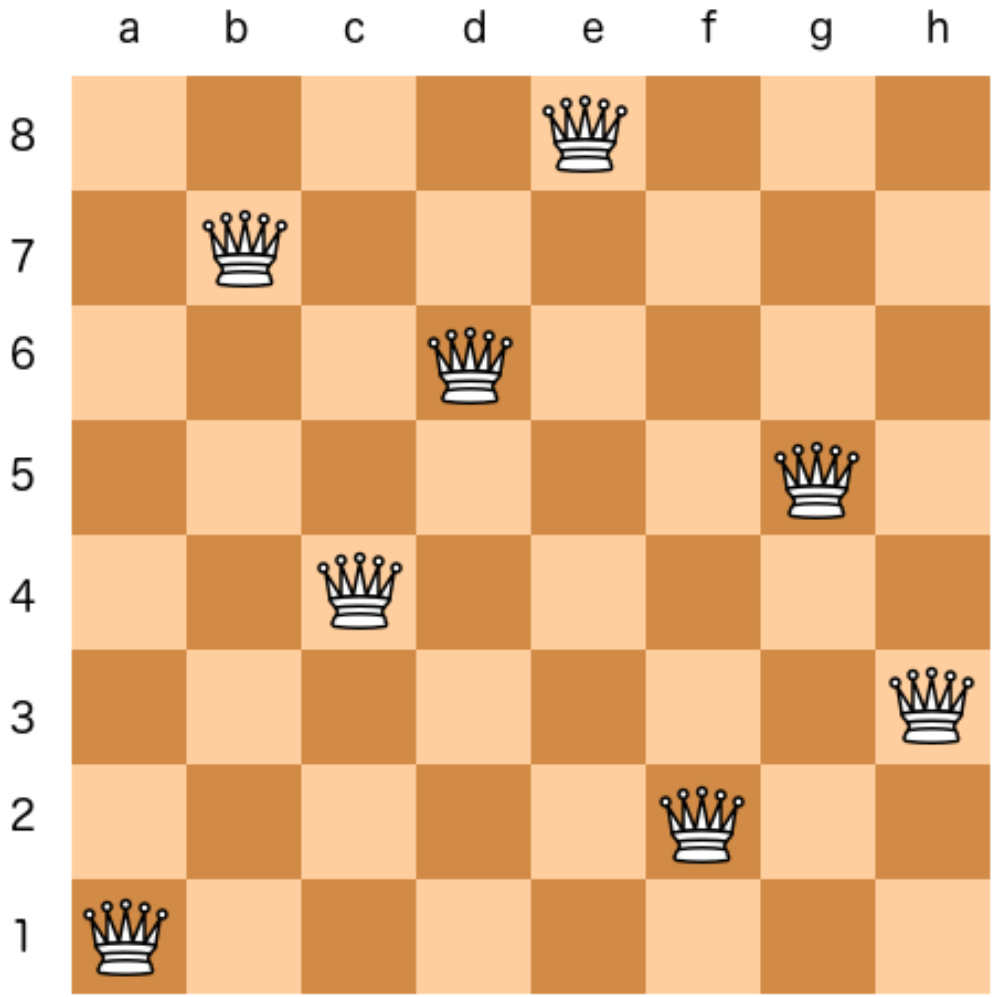
... men det er millioner av Himālayāḥ

Vi leter etter høyeste topp – men må stundom klatre ned og finne andre Himālayāḥ (Sanskr. plur. av Himālayau), og klatre igjen.



8 dronninger (som ikke får true hinannen)

Løsninen kan finnes via $f(x) = (1/k)\exp\{-\lambda Q(x)\}$ og MCMC, med en fornuftig $Q(x)$ (og en del bokholderi).



Fotnoter

* Kan kjøre slike spor i diverse andre Store Kombinatoriske Labyrinter: den reisende handelsmann
* Rubiks kube: jo, den tror jeg skal kunne la seg løse, fra scratch, via statistisk modell + MCMC, men med plunder, og i etapper
* Min tweaking parameter λ må stundom fikles med
* Kan øke temperaturen: simulert kokeplate (nennsomt øke λ)
* Idag har jeg (mest) vært probabilist – men varianter av dette dukker opp der jeg er statistiker: kjedene selv blir observert (høydimensjonale tidsrekker), og jeg må estimere diverse $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (i motsetning til å sette dem selv)

(Noen) referanser

G Claeskens, NL Hjort (2008). *Model Selection and Model Averaging.* CUP.

R Dickter (2014). *Number Time Archetype: The Significance of Magic Squares in China and the West.* Grass Valley, Cal.

Edwards, A.W.F. (2025). *The Latin Square: Essays in Defence of R.A. Fisher.* Cam Rivers Publishing, Cambridge, UK.

Franklin, B. (1791). *The Autobiography of Benjamin Franklin.* Mémoires de la vie privée de Benjamin Franklin, Buisson, Paris; then published in English, by J. Parson's, London, 1793.

Geißler, A. (1878). Über die Phantasmen während des Einschlafens. *Philosophische Studien*, vol. 1, 83–93.

NL Hjort (2019). Your Mother is Alive with Probability One Half. *FocuStat Blog xii.*

NL Hjort (2019). The Magic Square of 33. *FocuStat Blog xiii.*

NL Hjort (2026). Sudoku Solving and Finding Magic Squares by Probability Models and Markov Chains. *arXiv.2604.25402*

NL Hjort, EAa Stoltenberg (2026). *Statistical Inference: 600 Exercises, 100 Stories.* CUP.