

Metriske rom

All you need is distance

Tom Lindstrøm

Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

6. mai 2025

Avstandsforelskelse

Det sies ofte at det som skiller matematisk analyse fra andre deler av matematikken, er grensebegrepet. Men under grensebegrepet ligger noe enda mer fundamentalt, nemlig begrepet "avstand".

Eksempel: At $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ betyr at vi kan få **avstanden** mellom a_n og b så liten vi vil ved å velge n tilstrekkelig stor.

Eksempel: At f er kontinuert i a betyr at vi kan få **avstanden** mellom $f(x)$ og $f(a)$ så liten vi vil ved å velge **avstanden** mellom x og a tilstrekkelig liten.

Når vi bruker disse beskrivelsene i MAT1100, tenker vi på avstander mellom tall. Når vi bruker dem i MAT1110, tenker vi oftere på avstanden mellom n -tupler, dvs. mellom punkter eller vektorer.

I mer avanserte deler av matematikken (MAT2400?) dreier det seg like ofte om avstanden mellom funksjoner eller avstanden mellom mengder.

Grunnleggende observasjon: Alt vi trenger for å definere grenser og kontinuitet, er et fornuftig avstandsbegrep.

Hva må vi kreve av et avstandsbegrep?

Anta at noen har en mengde X og påstår at man kan bruke en funksjon $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ til å måle avstanden mellom punkter i X : $d(x, y)$ er avstanden mellom x og y . Hvilke krav ville vi stille til en slik funksjon d ?

- (i) (positivitet) $d(x, y) \geq 0$ med likhet hvis og bare hvis $x = y$.
- (ii) (symmetri) $d(x, y) = d(y, x)$.
- (iii) (trekantulikheten) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

En funksjon som tilfredsstiller (i)-(iii) kalles en *metrikk* på X , og paret (X, d) kalles et *metrisk rom*.

De tre aksiomene ovenfor er logisk sett alt vi har å arbeide med når vi studerer metriske rom. I tillegg har vi våre erfaringer med diverse avstandsbegreper i den virkelige verden, og vi kan bruke disse som en inspirasjonskilde til å innføre begreper og formulere hypoteser.

Eksempler på metriske rom

Eksempel 1: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$.

Eksempel 2: (*Euklidsk metrikk*) $X = \mathbb{R}^n$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Eksempel 3: (*Manhattan-metrikken*) $X = \mathbb{R}^2$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

Eksempel 4: $X = C([a, b], \mathbb{R})$.

$$d_1(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} \quad (\text{worst case})$$

$$d_2(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx \quad (\text{gjennomsnitt})$$

$$d_3(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{generalisert euklidsk})$$

Overføre begreper til metriske rom

Mange begreper kan overføres til metriske rom rett og slett ved å kopiere definisjonene vi kjenner fra kalkulus:

Eksempel 1: Anta at $\{x_n\}$ er en følge av punkter i et metrisk rom (X, d) . Hva skal det bety at følgen konvergerer mot et punkt a i X ?

Definisjon: Følgen $\{x_n\}$ *konvergerer mot et punkt a* dersom det for alle $\epsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $d(x_n, a) < \epsilon$ når $n \geq N$.

Eksempel 2: Anta at $f: X \rightarrow Y$ er en funksjon mellom to metriske rom (X, d_X) og (Y, d_Y) . Hva skal det bety at f er kontinuerlig i et punkt a ?

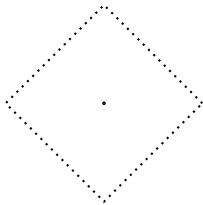
Definisjon: f er *kontinuerlig i punktet a* dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$ når $d_X(x, a) < \delta$.

Geometriske begreper

Åpen kule: Anta at $a \in X$ og at $r > 0$. Da er den åpne kula med radius r rundt a definert som

$$B(a; r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

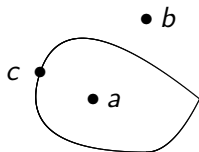
Advarsel: En kule i et metrisk rom er ikke nødvendigvis veldig kuleformet. Her er en kule i Manhattan-metrikken:



Åpne og lukkede mengder

Anta at A er en delmengde av X . Et punkt kan forholde seg til A på tre forskjellige måter:

- (i) Et punkt a er et *indre punkt* for A dersom det finnes en kule $B(a; r)$ om a som er helt inneholdt i A .
- (ii) Et punkt b er et *ytre punkt* for A dersom det finnes en kule $B(b; r)$ om b som er helt inneholdt i A^c .
- (iii) Et punkt c er et *randpunkt* for A dersom enhver kule $B(c; r)$ om c inneholder både punkter fra A og fra A^c .

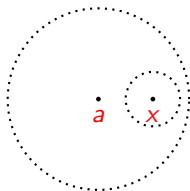


En mengde er *lukket* dersom den inneholder alle sine randpunkter, og *åpen* dersom den ikke inneholder noen av dem.

Eksempel på et geometrisk argument

Påstand: En åpen kule er en åpen mengde.

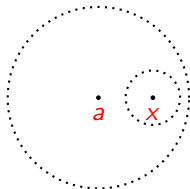
Vi har en åpen kule om a med radius r . Hvis x er et punkt i kula, må vi vise at x er et indre punkt, dvs. at det finnes en kule om x som er helt inneholdt i den opprinnelige kula.



Eksempel på et geometrisk argument

Påstand: En åpen kule er en åpen mengde.

Vi har en åpen kule om a med radius r . Hvis x er et punkt i kula, må vi vise at x er et indre punkt, dvs. at det finnes en kule om x som er helt inneholdt i den opprinnelige kula.



Hvilken radius skulle en slik kule ha? Hvis vi jobber i planet, ser det ut til at en radius $s = r - d(a, x)$ burde holde.

Hypotese: Kulen $B(x, r - d(a, x))$ er inneholdt i $B(a, r)$.

Bevis: Anta $y \in B(x, r - d(a, x))$. Da er

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + (r - d(a, x)) = r$$

Filosofi: Bruk din geometriske intuisjon fra planet/rommet, men sjekk at den også gjelder i generelle metriske rom!

Kompakte mengder: Finn åstedet

Ikke alt er like lett å generalisere. I $\mathbb{R}^d$ er en mengde kompakt hvis den er lukket og begrenset, men denne definisjonen fungerer ikke i generelle metriske rom (dvs. den gir oss ikke de resultatene vi ønsker å oppnå). Isteden må vi bruke denne definisjonen:

Definisjon: En delmengde K av et metrisk rom er *kompakt* dersom enhver følge av elementer i K har en delfølge som konvergere **til et punkt i K** .

Hva er vitsen? Kompakthet er en detektivs beste venn; den gir henne mulighet til å lokalisere hvor forbrytelsene foregår (nemlig i det punktet som delfølgen konvergerer mot).

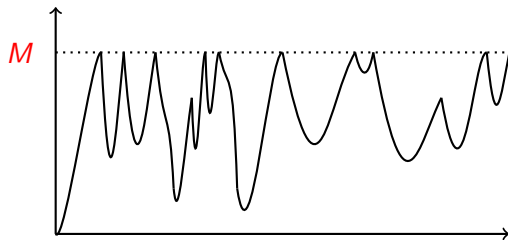
Eksempel: Ekstremalverdisetningen

Teorem: En kontinuerlig funksjon $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ definert på en kompakt mengde har et maksimumspunkt.

Bevis: Vi går på jakt etter åstedet. Hvis

$$M = \sup\{f(x) : x \in K\},$$

kan vi finne en følge $\{x_n\}$ av elementer i K slik at $\{f(x_n)\}$ går mot M (dette gjelder selv om M skulle finne på å være ∞). Problemet er at selv om vi har kontroll på $\{f(x_n)\}$, har vi ikke kontroll på $\{x_n\}$ – denne følgen kan godt tenkes å hoppe og sprette rundt i K .



Reddet av kompakthet

Men siden K er kompakt, finnes det en delfølge $\{x_{n_k}\}$ som konvergerer mot et punkt $x \in K$ (den zoomer inn på en av fjelltoppene). Dermed har vi

$$x_{n_k} \rightarrow x \implies f(x_{n_k}) \rightarrow f(x) \text{ siden } f \text{ er kontinuerlig}$$

og

$$f(x_{n_k}) \rightarrow M \text{ per konstruksjon}$$

Altså er $f(x) = M$ og vi har funnet et maksimalpunkt. □

Dette argumentet er ganske typisk for kompakthetsargumenter: Vi bruker den konvergente delfølgen til å zoome inn på stedet der problemet befinner seg.

Et eksempel til: uniform kontinuitet

Husk definisjonen av uniform kontinuitet.

Definisjon: En funksjon $f: X \rightarrow Y$ mellom metriske rom er *uniformt kontinuerlig* dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$ når $d_X(x, y) < \delta$.

Forskjellen fra vanlig kontinuitet er at gitt en ϵ , skal *den samme* δ 'en fungere overalt – den får ikke avhenge av hvor i rommet vi er.

Eksempel: Funksjonen $f(x) = x^2$ er kontinuerlig, men ikke uniformt kontinuerlig på $\mathbb{R}$. Funksjonsgrafen blir brattere dess større x blir, og vi trenger stadig mindre δ 'er til å takle den samme ϵ 'en.

Uniform kontinuitet på kompakter

Teorem: Anta at f er kontinuerlig på en kompakt mengde K . Da er f uniformt kontinuerlig på K .

Bevis: Vi skal argumentere kontrapositivt: Anta at f ikke er uniformt kontinuerlig; vi skal vise at f ikke er kontinuerlig. Siden kontinuitet er et punktvis begrep, må vi lokalisere et punkt der f ikke er kontinuerlig.

Siden f ikke er uniformt kontinuerlig, må det finnes en $\epsilon > 0$ som ingen δ kan parére. For enhver $n \in \mathbb{N}$ finnes det da punkter $x_n, y_n \in K$ slik at $d_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, men $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$. Siden K er kompakt, finnes det en delfølge $\{x_{n_k}\}$ som konverger mot et punkt $a \in K$. Vi har nå lokalisert synderen, og skal vise at f ikke er kontinuerlig i a . Observer at både $\{x_{n_k}\}$ og $\{y_{n_k}\}$ konvergerer mot a . Hvis f var kontinuerlig i a , ville da både $\{f(x_{n_k})\}$ og $\{f(y_{n_k})\}$ konvergere mot $f(a)$, og det er umulig siden $d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \epsilon$ for alle k . □

Kompletthet: Nesten er godt nok

Definisjon: En følge $\{x_n\}$ i et metrisk rom er en *Cauchy-følge* dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $d(x_n, x_m) < \epsilon$ når $n, m \geq N$.

En Cauchy-følge er en følge der leddene klumper seg mer og mer sammen, og det er lett å tro at en slik følge alltid må konvergere. Det er imidlertid ikke tilfellet; følgen kan klumpe seg sammen rundt et "hull" i det metriske rommet.

Kanonisk eksempel: Følgen $x_1 = 1.4$, $x_2 = 1.41$, $x_3 = 1.414$, $x_4 = 1.4142$ er en Cauchy-følge i $\mathbb{Q}$, men konvergerer ikke i $\mathbb{Q}$.

Definisjon: Et metrisk rom (X, d) er *komplett* dersom alle Cauchy-følger i X konvergerer.

Eksempler: $\mathbb{R}^n$, $C(K, X)$ når X er komplett, Banach- og Hilbert-rom.

Hva er vitsen?

Mange matematiske problemer kan ikke løses direkte. Isteden begynner man med å lage “nestenløsninger”, og hvis disse nestenløsningene er nærmere og nærmere hverandre, håper man at de konvergerer mot en ekte løsning. Hvis alt dette foregår i et komplett rom, slipper man å konstruere den ekte løsningen – det holder å vise at nestenløsningene danner en Cauchy-følge og at grensen må være en løsning av problemet.

Eksempel: Beviset for Banachs fikspunktteorem er et typisk eksempel på denne strategien. Husk at en avbildning $f: X \rightarrow X$ er en *kontraksjon* dersom det finnes en $s < 1$ slik at $d(f(x), f(y)) \leq sd(x, y)$ for alle $x, y \in X$.

Banachs fikspunktteorem: Anta at (X, d) er et komplett metrisk rom og at $f: X \rightarrow X$ er en kontraksjon. Da har f et entydig fikspunkt a , og uansett hvilket startpunkt $x_0 \in X$ vi velger, så vil følgen

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^{\circ 2}(x_0), \dots, x_n = f^{\circ n}(x_0), \dots$$

konvergere mot a .

Bevisideen

Ideen i beviset er å vise at følgen

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^{\circ 2}(x_0), \dots, x_n = f^{\circ n}(x_0), \dots$$

er en Cauchy-følge. Da vet vi at den konvergerer uten å måtte konstruere grensepunktet a . Det er lett å vise at a er et fikspunkt: Vi har $x_{n+1} = f(x_n)$ der venstresiden konvergerer mot a og høyresiden mot $f(a)$, og dermed må $a = f(a)$.

Et mer avansert eksempel er eksistensen av løsninger av ordinære differensialligninger. Her starter man med tilnærmede løsninger, og bruker så enten Banachs fikspunktteorem eller Arzelà-Ascolis teorem til vise konvergens mot en ekte løsning. Begge disse teoremene bygger på at rom av kontinuerlige funksjoner er komplette i supremumsmetrikken.

En kort oppsummering

I fugleperspektiv handler teorien om metriske rom om *de fire k-ene*:

- ▶ konvergens
- ▶ kontinuitet
- ▶ kompakthet
- ▶ kompletthet

I tillegg kommer en god del fingerferdighet med hvordan disse begrepene behandles!

Noen oppgaver

Oppgave 1. (Fingerferdighetsøvelse) Anta at $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$ er to følger i et metrisk rom. Anta at det finnes en $\epsilon > 0$ slik at $d(x_n, y_n) > \epsilon$ for alle n . Vis at $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$ ikke kan konvergere mot samme punkt.

Oppgave 2. (Eksamen 2022) Anta at (X, d) er et metrisk rom og at $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon. Hvis $a \in \mathbb{R}$, sier vi at ligningen $f(x) = a$ er *nesten løsbart* hvis det for hver $\epsilon > 0$ er en $x \in X$ slik at $|f(x) - a| < \epsilon$. Vis at hvis X er kompakt og $f(x) = a$ er *nesten løsbart*, så finnes det en $x \in X$ slik at $f(x) = a$. Finn et eksempel som viser at dette ikke alltid er tilfellet for ikke-kompakte X .

Oppgave 3. (Eksamen 2016) I denne oppgaven er (X, d) et metrisk rom. Husk at dersom A er en delmengde av X , så er ∂A mengden av alle randpunktene til A . *Tillukningen* til A er mengden $\bar{A} = A \cup \partial A$.

- a) Vis at $x \in \bar{A}$ hvis og bare hvis det finnes en følge $\{a_n\}$ av punkter i A som konvergerer mot x .
- b) Vis at $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. Gi et eksempel på at $\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$.

Løsninger

Oppgave 1. Anta for motsigelse at $x_n \rightarrow a$ and $y_n \rightarrow a$. Det finnes da en $N \in \mathbb{N}$ slik at $d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$ og $d(y_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$ når $n \geq N$. Fra trekantulikheten får vi

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, a) + d(a, y_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

som er en selvmotsigelse.

Oppgave 2. Since $f(x) = a$ is *almost solvable*, there is for each $n \in \mathbb{N}$ an $x_n \in X$ such that $|f(x_n) - a| < \frac{1}{n}$. Since X is compact, $\{x_n\}$ has a subsequence $\{x_{n_k}\}$ converging to a point $x_0 \in X$. By construction, $f(x_{n_k}) \rightarrow a$, and since f is continuous, $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0) = a$.

A counterexample in the noncompact case is to let $X = (0, 1)$, $f(x) = x$, and $a = 0$. Then $f(x) = a$ is *almost solvable*, but there is no $x \in X$ such that $f(x) = a$.

Alternative solution: Observe that since f is continuous, so is $g(x) = |f(x) - a|$. By the Extreme Value Theorem, g has a minimum point x_0 . Since g is nonnegative, $g(x_0) \geq 0$, and since for every $\epsilon > 0$ there is an x such that $g(x) < \epsilon$, we must have $g(x_0) = 0$, i.e. $f(x_0) = a$.

Oppgave 3. a) Assume first that $x \in \bar{A}$. Then every ball $B(x, \frac{1}{n})$ contains an element a_n from A , and clearly the sequence $\{a_n\}$ converges to x . On the other hand, if there is a sequence $\{a_n\}$ from A converging to x , every ball $B(x, r)$ contains an element $a_n \in A$, and hence x cannot be an exterior point of A . This means that x is either an interior point or a boundary point, and in either case $x \in \bar{A}$.

b) Observe first that if $x \in \bar{A}$, then there is a sequence $\{a_n\}$ from A converging to x . As this sequence is also in $A \cup B$, we see that $x \in \overline{A \cup B}$. Hence $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$. A totally similar argument shows that $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$, and hence $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

To prove the opposite inclusion, assume that $x \in \overline{A \cup B}$. By a), there is a sequence $\{c_n\}$ from $A \cup B$ converging to x . This sequence must either have infinitely many terms from A or infinitely many terms from B (or both), say infinitely many from A . Let $\{c_{n_k}\}$ be the subsequence consisting of the terms that lie in A . As this is a sequence from A converging to x , we see that $x \in \bar{A}$. A similar argument shows that $x \in \bar{B}$ if infinitely many terms of $\{c_n\}$ belong to B . This means that if $x \in \overline{A \cup B}$, then $x \in \bar{A}$ or $x \in \bar{B}$, and hence $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$. As we now have both inclusions, we see that

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

To find an example of $\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$, we may let $X = \mathbb{R}$ and choose $A = (-\infty, 0)$, $B = (0, \infty)$. Then $\overline{A \cap B} = \bar{\emptyset} = \emptyset$ while $\bar{A} \cap \bar{B} = \{0\} \neq \emptyset$.