



# Innholdsfortegnelse

- 1 Historisk kontekst og motivasjon for målteori**
- 2 Mål og målrom
- 3 Pushforward-målet
- 4 Kompletthet
- 5 Målbare funksjoner
- 6 Integrasjon
- 7 Integrasjon med hensyn til pushforward-målet
- 8 Konvergensteoremer
- 9 Sannsynlighetsteori

# Hvorfor Lebesgue-integralet?

På slutten av 1800-tallet var Riemann-integralet godt etablert, men det hadde begrensninger:

# Hvorfor Lebesgue-integralet?

På slutten av 1800-tallet var Riemann-integralet godt etablert, men det hadde begrensninger:

- Det kunne ikke håndtere funksjoner med for mangediskontinuiteter.

# Hvorfor Lebesgue-integralet?

På slutten av 1800-tallet var Riemann-integralet godt etablert, men det hadde begrensninger:

- Det kunne ikke håndtere funksjoner med for mangediskontinuiteter.
- Det passet dårlig til punktvis konvergens av funksjonsfølger.

# Hvorfor Lebesgue-integralet?

På slutten av 1800-tallet var Riemann-integralet godt etablert, men det hadde begrensninger:

- Det kunne ikke håndtere funksjoner med for mange diskontinuiteter.
- Det passet dårlig til punktvis konvergens av funksjonsfølger.

# Hvorfor Lebesgue-integralet?

På slutten av 1800-tallet var Riemann-integralet godt etablert, men det hadde begrensninger:

- Det kunne ikke håndtere funksjoner med for mange diskontinuiteter.
- Det passet dårlig til punktvis konvergens av funksjonsfølger.

Lebesgue ønsket et bedre integral som kunne:

# Hvorfor Lebesgue-integralet?

På slutten av 1800-tallet var Riemann-integralet godt etablert, men det hadde begrensninger:

- Det kunne ikke håndtere funksjoner med for mange diskontinuiteter.
- Det passet dårlig til punktvis konvergens av funksjonsfølger.

Lebesgue ønsket et bedre integral som kunne:

- **Integrere flere funksjoner.**

# Hvorfor Lebesgue-integralet?

På slutten av 1800-tallet var Riemann-integralet godt etablert, men det hadde begrensninger:

- Det kunne ikke håndtere funksjoner med for mangediskontinuiteter.
- Det passet dårlig til punktvis konvergens av funksjonsfølger.

Lebesgue ønsket et bedre integral som kunne:

- Integrere flere funksjoner.
- Samhandle bedre med grenseprosesser, spesielt ved punktvis konvergens.

# Hvorfor Lebesgue-integralet?

På slutten av 1800-tallet var Riemann-integralet godt etablert, men det hadde begrensninger:

- Det kunne ikke håndtere funksjoner med for mangediskontinuiteter.
- Det passet dårlig til punktvis konvergens av funksjonsfølger.

Lebesgue ønsket et bedre integral som kunne:

- Integrere flere funksjoner.
- Samhandle bedre med grenseprosesser, spesielt ved punktvis konvergens.

# Hvorfor Lebesgue-integralet?

Med andre ord...

Schtøgg  $f$ , kan vi...  $\int f$  ??

# Hvorfor Lebesgue-integralet?

Med andre ord...

Schtøgg  $f$ , kan vi...  $\int f$  ??

$$\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n ??$$

# Hvorfor Lebesgue-integralet?

Med andre ord...

Schtøgg  $f$ , kan vi...  $\int f$  ??

$$\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n ??$$

- Riemann: uniform konvergens.
- Lebesgue: nok med punktvis konvergens! (+ litt)

# Henri Léon Lebesgue (1875-1941)



Figur: 28. juni 1875, Beauvais - 26. Juli 1941, Paris.

Artige fakta:

# Henri Léon Lebesgue (1875-1941)



Figur: 28. juni 1875, Beauvais - 26. Juli 1941, Paris.

Artige fakta:

- Lebesgue publiserte sin doktorgrad *Intégrale, longueur, aire* i 1902 hvor han introduserte integralet som bærer hans navn.

# Henri Léon Lebesgue (1875-1941)



Figur: 28. juni 1875, Beauvais - 26. Juli 1941, Paris.

## Artige fakta:

- Lebesgue publiserte sin doktorgrad *Intégrale, longueur, aire* i 1902 hvor han introduserte integralet som bærer hans navn.
- Uten Lebesgue-integralet ville moderne Fourier-analyse og sannsynlighetsteori kollapse.

# Henri Léon Lebesgue (1875-1941)

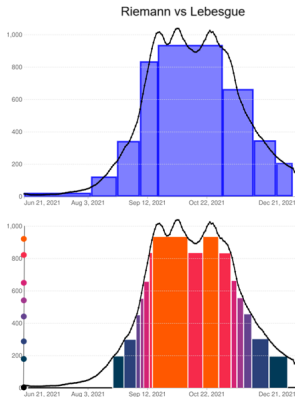


Figur: 28. juni 1875, Beauvais - 26. Juli 1941, Paris.

## Artige fakta:

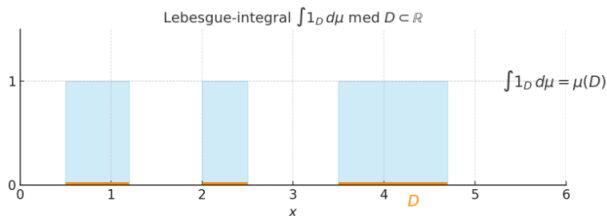
- Lebesgue publiserte sin doktorgrad *Intégrale, longueur, aire* i 1902 hvor han introduserte integralet som bærer hans navn.
- Uten Lebesgue-integralet ville moderne Fourier-analyse og sannsynlighetsteori kollapse.
- **Lebesgue og Baire kom skikkelig dårlig overens.**

# Riemann vs Lebesgue-integrasjon



Figur: Riemann: summerer bredde ganger høyde over  $x$ -intervaller; Lebesgue: summerer høyde ganger bredde over nivåmengder. Kilde: Wikipedia.

# Riemann vs Lebesgue-integrasjon

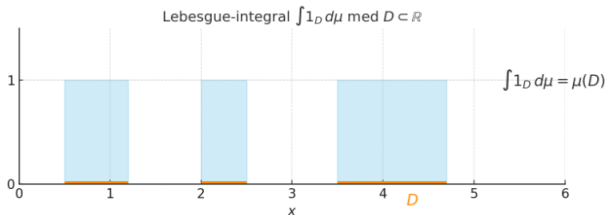


Grunnprinsipp ved Lebesgue-integrasjon:  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,

$$\int 1_D d\mu = \mu(D),$$

men...

# Riemann vs Lebesgue-integrasjon



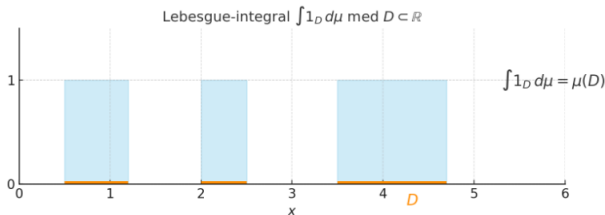
Grunnprinsipp ved Lebesgue-integrasjon:  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,

$$\int \mathbf{1}_D d\mu = \mu(D),$$

men...

- hvilke egenskaper/aksiomer bør  $\mu$  oppfylle?

# Riemann vs Lebesgue-integrasjon



Grunnprinsipp ved Lebesgue-integrasjon:  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,

$$\int \mathbf{1}_D d\mu = \mu(D),$$

men...

- hvilke egenskaper/aksiomer bør  $\mu$  oppfylle?
- hvordan konstrueres  $\mu(D)$ ?

19. Réciproquement: si quels que soient  $a$  et  $b$  l'ensemble des valeurs de  $x$  pour lesquelles on a  $a > f(x) > b$  est mesurable, et si la fonction  $f(x)$  est bornée, elle est sommable.

En effet, divisons l'intervalle de variation de  $f(x)$ ; soient  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  les points de division. Soit  $e_i (i = 0, 1, \dots, n)$  l'ensemble des valeurs de  $x$  pour lesquelles  $f(x) = a_i$ .

Soit  $e'_i (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$  l'ensemble des valeurs de  $x$  pour lesquelles  $a_i < f(x) < a_{i+1}$ .

Les points de l'ensemble  $E$  attaché à  $f(x)$ , correspondant aux valeurs de  $x$  qui appartiennent à  $e_i$  forment un ensemble mesurable dans le plan et de mesure  $|a_i \cdot m_i(e_i)|$ , ( $m_i(e_i)$  désignant une mesure linéaire).

Les points de  $E$  qui correspondent à ceux de  $e'_i$  forment un ensemble contenant un ensemble mesurable de mesure  $|a_i \cdot m_i(e'_i)|$ , et contenu dans un ensemble mesurable de mesure  $|a_{i+1} \cdot m_i(e'_i)|$ .

$E$  contient donc un ensemble de mesure

$$\sum_0^n |a_i \cdot m_i(e_i)| + \sum_1^n |a_{i-1} \cdot m_i(e'_i)|$$

et est contenu dans un ensemble de mesure

$$\sum_0^n |a_i \cdot m_i(e_i)| + \sum_1^n |a_i \cdot m_i(e'_i)|.$$

Ces deux mesures diffèrent de moins de  $(a_n - a_0)\alpha$  en appelant  $\alpha$  le maximum de  $a_i - a_{i-1}$ , donc on peut les rendre aussi voisines que l'on veut et  $E$  est mesurable, donc  $f$  sommable.

De plus on sait calculer la mesure de  $E$ ; donc, si  $f$  est positive l'intégrale est la limite commune des deux sommes

$$\tau = \sum_0^n a_i m_i(e_i) + \sum_1^n a_{i-1} \cdot m_i(e'_i), \quad \Sigma = \sum_0^n a_i m_i(e_i) + \sum_1^n a_i m_i(e'_i)$$

lorsque  $a_{i-1} - a_i$  tend vers zéro.

Or si  $n$  n'est pas toujours positive la limite de la somme de ceux des termes de  $\tau$  ou  $\Sigma$  qui sont positifs donne la mesure de l'ensemble que nous avons appelé  $E_+$  § 16, et la limite de la somme des termes négatifs donne  $-m(E_-)$ , donc dans tous les cas  $\tau$  et  $\Sigma$  définissent l'intégrale.

20. Il n'est peut-être pas inutile de montrer que des raisonnements analytiques auraient pu nous conduire à la considération des fonctions sommables et de ce que nous venons d'appeler leurs intégrales.

Soit une fonction continue toujours croissante  $f(x)$  définie entre  $\alpha$  et  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ) et variant entre  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ). Prenons arbitrairement pour  $x$  les valeurs

$$x_0 = \alpha < x_1 < x_2 \dots < x_n = \beta$$

auxquelles correspondent pour  $f(x)$  les valeurs

$$a_0 = a < a_1 < a_2 \dots < a_n = b.$$

L'intégrale définie, au sens ordinaire du mot, est la limite commune des deux sommes

$$\sum_1^n (x_i - x_{i-1}) a_{i-1} \quad \sum_1^n (x_i - x_{i-1}) a_i$$

quand le maximum de  $x_i - x_{i-1}$ , tend vers zéro.

Mais  $x_i$  est donné si  $a_i$  l'est, et  $x_i - x_{i-1}$  tend vers zéro si  $a_i - a_{i-1}$  tend vers zéro. Donc pour définir l'intégrale d'une fonction continue croissante  $f(x)$  on peut se donner les  $a_i$ , c'est-à-dire la division de l'intervalle de variation de  $f(x)$ , au lieu de se donner les  $x_i$ , c'est-à-dire la division de l'intervalle de variation de  $x$ .

En cherchant à opérer de même, d'abord dans le cas simple des fonctions continues variables dans tout intervalle, et n'ayant qu'un nombre fini de maxima et minima, puis dans le cas d'une fonction continue quelconque on est facilement conduit à cette propriété. Soit une fonction continue  $f(x)$  définie dans  $(\alpha, \beta)$  et variant entre  $a$  et  $b$ , ( $a < b$ ). Choisissons arbitrairement

$$a = a_0 < a_1 < a_2 \dots < a_n = b;$$

$f(x) = a_i$  pour les points d'un ensemble fermé  $e_i$ , ( $i = 0, 1, \dots, n$ );  $a_i < f(x) < a_{i+1}$  pour les points d'un ensemble, somme d'intervalles,  $e'_i$ , ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ); les ensembles  $e_i$  et  $e'_i$  sont mesurables.

Les deux quantités

$$\tau = \sum_0^n a_i m(e_i) + \sum_1^n a_i m(e'_i), \quad \Sigma = \sum_0^n a_i m(e_i) + \sum_1^n a_{i+1} m(e'_i)$$

tendent vers  $\int_a^b f(x) dx$  quand le nombre des  $a_i$  augmente de façon que le maximum de  $a_i - a_{i-1}$ , tende vers zéro.

Cette propriété obtenue, on peut la prendre pour définition de l'intégrale de  $f(x)$ . Mais les deux quantités  $\tau$  et  $\Sigma$  ont un sens pour d'autres fonctions

Figur: PhD-avhandling *Intégrale, Longueur, Aire* av Lebesgue (1902).  
Lebesgue-integralet er introdusert nederst til høyre.

# Innholdsfortegnelse

- 1 Historisk kontekst og motivasjon for målteori
- 2 Mål og målrom**
- 3 Pushforward-målet
- 4 Kompletthet
- 5 Målbare funksjoner
- 6 Integrasjon
- 7 Integrasjon med hensyn til pushforward-målet
- 8 Konvergensteoremer
- 9 Sannsynlighetsteori

# $\sigma$ -algebra

## Definisjon ( $\sigma$ -algebra)

$X \neq \emptyset$  mengde. En samling  $\mathcal{A}$  av delmengder av  $X$  kalles  **$\sigma$ -algebra** over  $X$  dersom:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ,
- (ii)  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$ ,
- (iii)  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .

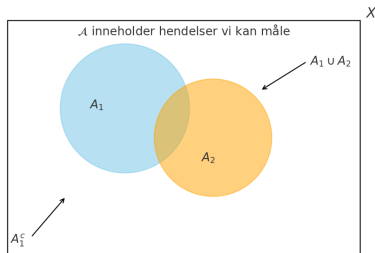
# $\sigma$ -algebra

## Definisjon ( $\sigma$ -algebra)

$X \neq \emptyset$  mengde. En samling  $\mathcal{A}$  av delmengder av  $X$  kalles  **$\sigma$ -algebra** over  $X$  dersom:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ,
- (ii)  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$ ,
- (iii)  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .

*Tenk på at  $A \in \mathcal{A}$  er begivenheter du kan måle sannsynligheten til.*



# $\sigma$ -algebra

## Definisjon ( $\sigma$ -algebra)

$X \neq \emptyset$  mengde. En samling  $\mathcal{A}$  av delmengder av  $X$  kalles  **$\sigma$ -algebra** over  $X$  dersom:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ,
- (ii)  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$ ,
- (iii)  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .

**Eksempel I:**  $X = \mathbb{R}^n$  og  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , Borel- $\sigma$ -algebra (dvs.  $\sigma$ -algebraen generert av intervallene  $(a, b]$ ).

# $\sigma$ -algebra

## Definisjon ( $\sigma$ -algebra)

$X \neq \emptyset$  mengde. En samling  $\mathcal{A}$  av delmengder av  $X$  kalles  **$\sigma$ -algebra** over  $X$  dersom:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ,
- (ii)  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$ ,
- (iii)  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .

**Eksempel I:**  $X = \mathbb{R}^n$  og  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , Borel- $\sigma$ -algebra (dvs.  $\sigma$ -algebraen generert av intervallene  $(a, b]$ ).

**Eksempel II:**  $X \neq \emptyset$  mengde,  $\mathcal{P}(X)$  betår av alle delmengder av  $X$  (potensmengde).  $\mathcal{P}(X)$  er den største!

# $\sigma$ -algebra

## Definisjon ( $\sigma$ -algebra)

$X \neq \emptyset$  mengde. En samling  $\mathcal{A}$  av delmengder av  $X$  kalles  **$\sigma$ -algebra** over  $X$  dersom:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ,
- (ii)  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$ ,
- (iii)  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .

**Eksempel I:**  $X = \mathbb{R}^n$  og  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , Borel- $\sigma$ -algebra (dvs.  $\sigma$ -algebraen generert av intervallene  $(a, b]$ ).

**Eksempel II:**  $X \neq \emptyset$  mengde,  $\mathcal{P}(X)$  består av alle delmengder av  $X$  (potensmengde).  $\mathcal{P}(X)$  er den største!

**Eksempel III:**  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$ ,  
 $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, X\}$ ,  
ikke  $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{b, c\}, X\}$ , men  $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$ .

## Lemma

*$X$  mengde,  $\mathcal{B}$  samling av delmengder av  $X$ . Da finnes det en minste  $\sigma$ -algebra  $\sigma(\mathcal{B})$  som inneholder  $\mathcal{B}$ .*

## Lemma

*$X$  mengde,  $\mathcal{B}$  samling av delmengder av  $X$ . Da finnes det en minste  $\sigma$ -algebra  $\sigma(\mathcal{B})$  som inneholder  $\mathcal{B}$ .*

## Bevis.

$\mathcal{P}(X) \supset \mathcal{B}$ , dog ikke nødvendigvis den minste!

Sett:

$$G(\mathcal{B}) = \{A \subseteq X \mid A \text{ er med i alle } \sigma\text{-algebraer som inneholder } \mathcal{B}\}.$$

Da gjør  $G(\mathcal{B})$  jobben. 

# Mål

## Definisjon (Mål)

En avbildning  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  kalles **mål** dersom:

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ .
- (ii) ( $\sigma$ -additivitet) Hvis  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$  er en parvis disjunkt følge av mengder, så gjelder:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

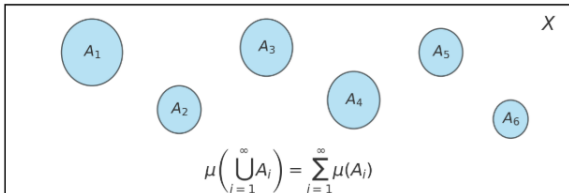
# Mål

## Definisjon (Mål)

En avbildning  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  kalles **mål** dersom:

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ .
- (ii) ( $\sigma$ -additivitet) Hvis  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$  er en parvis disjunkt følge av mengder, så gjelder:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$



# Mål

## Definisjon (Mål)

En avbildning  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  kalles **mål** dersom:

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ .
- (ii) ( $\sigma$ -additivitet) Hvis  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$  er en parvis disjunkt følge av mengder, så gjelder:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

## Definisjon (Målbar rom og målrom)

$(X, \mathcal{A})$  der  $X \neq \emptyset$  er en mengde,  $\mathcal{A}$  er en  $\sigma$ -algebra over  $X$ , kalles et **målbart rom** og sammen med et mål  $\mu$  på  $\mathcal{A}$ , dvs.  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , kalles et **målrom**.

# Eksempler av mål:

# Eksempler av mål:

## Eksempel (Borel-mål)

Borel-mål: hvilket som helst mål  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ .

Borel-målet:  $\mu((a, b]) = b - a$ .

# Eksempler av mål:

## Eksempel (Borel-mål)

Borel-mål: hvilket som helst mål  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ .

Borel-målet:  $\mu((a, b]) = b - a$ .

## Eksempel (Lebesgue-mål)

Lebesgue-målet:  $\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$  slik at  $\mu((a, b]) = b - a$  (ideen om lengde).

# Eksempler av mål:

## Eksempel (Borel-mål)

Borel-mål: hvilket som helst mål  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ .

Borel-målet:  $\mu((a, b]) = b - a$ .

## Eksempel (Lebesgue-mål)

Lebesgue-målet:  $\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$  slik at  $\mu((a, b]) = b - a$  (ideen om lengde). Hva er  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$  her? Senere.

# Eksempler av mål:

## Eksempel (Borel-mål)

Borel-mål: hvilket som helst mål  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ .

Borel-målet:  $\mu((a, b]) = b - a$ .

## Eksempel (Lebesgue-mål)

Lebesgue-målet:  $\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$  slik at  $\mu((a, b]) = b - a$  (ideen om lengde). Hva er  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$  her? Senere.

## Eksempel (Lebesgue-Stieltjes-mål)

$F$  en økende funksjon. Borel-mål definert ved  $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ .

# Eksempler av mål:

## Eksempel (Borel-mål)

Borel-mål: hvilket som helst mål  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ .

Borel-målet:  $\mu((a, b]) = b - a$ .

## Eksempel (Lebesgue-mål)

Lebesgue-målet:  $\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$  slik at  $\mu((a, b]) = b - a$  (ideen om lengde). Hva er  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$  her? Senere.

## Eksempel (Lebesgue-Stieltjes-mål)

$F$  en økende funksjon. Borel-mål definert ved  $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ .

## Eksempel (Sannsynlighetsmål)

$\mathbb{P}[A] = \{\text{Sannsynlighet for at } A \text{ inntreffer}\}$ , gitt en begivenhet  $A$ .

# Kontinuitet av mål

## Teorem

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  målrom og  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$  en følge.

# Kontinuitet av mål

## Teorem

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  målrom og  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$  en følge.

■ (kontinuitet nedenfra) Hvis  $A_n \subseteq A_{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , så er

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

# Kontinuitet av mål

## Teorem

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  målrom og  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$  en følge.

■ (kontinuitet nedenfra) Hvis  $A_n \subseteq A_{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , så er

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

■ (kontinuitet ovenfra) Hvis  $\mu(A_1) < \infty$  og  $A_n \supseteq A_{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , så er

$$\mu \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

# Kontinuitet av mål

## Teorem

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  målrom og  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$  en følge.

■ (kontinuitet nedenfra) Hvis  $A_n \subseteq A_{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , så er

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

■ (kontinuitet ovenfra) Hvis  $\mu(A_1) < \infty$  og  $A_n \supseteq A_{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , så er

$$\mu \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

## Teorem

*Kontinuitet nedenfra er ekvivalent med  $\sigma$ -additivitet.*

# Innholdsfortegnelse

- 1 Historisk kontekst og motivasjon for målteori
- 2 Mål og målrom
- 3 Pushforward-målet**
- 4 Kompletthet
- 5 Målbare funksjoner
- 6 Integrasjon
- 7 Integrasjon med hensyn til pushforward-målet
- 8 Konvergensteoremer
- 9 Sannsynlighetsteori

# Pushforward-mål

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  målrom,  $(Y, \mathcal{B})$  målbart rom og  $f : X \rightarrow Y$  en transformasjon.

# Pushforward-mål

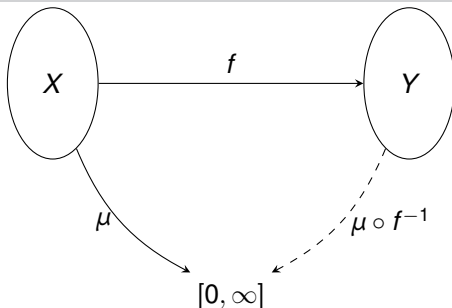
$(X, \mathcal{A}, \mu)$  målrom,  $(Y, \mathcal{B})$  målbart rom og  $f : X \rightarrow Y$  en transformasjon.

## Definisjon (Pushforward-mål)

Følgende funksjon på  $\mathcal{B}$

$$\nu(B) = f_*\mu = \mu(f^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}$$

er et mål og  $(Y, \mathcal{B}, f_*\mu)$  blir et målrom.



# Innholdsfortegnelse

- 1 Historisk kontekst og motivasjon for målteori
- 2 Mål og målrom
- 3 Pushforward-målet
- 4 Kompletthet**
- 5 Målbare funksjoner
- 6 Integrasjon
- 7 Integrasjon med hensyn til pushforward-målet
- 8 Konvergensteoremer
- 9 Sannsynlighetsteori

## Definisjon (Nullmengde)

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  målrom. En mengde  $N \subseteq X$ , slik at  $N \subseteq D$  og  $\mu(D) = 0$  kalles **nullmengde**. Vi betegner

$$\mathcal{N} = \{N \subseteq X : N \text{ nullmengde}\}$$

samlingen av alle nullmengder.

## Definisjon (Nullmengde)

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  målrom. En mengde  $N \subseteq X$ , slik at  $N \subseteq D$  og  $\mu(D) = 0$  kalles **nullmengde**. Vi betegner

$$\mathcal{N} = \{N \subseteq X : N \text{ nullmengde}\}$$

samlingen av alle nullmengder.

## Definisjon (Kompletthet)

Dersom  $N \in \mathcal{N} \Rightarrow N \in \mathcal{A}$  sier vi at  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  er et **komplett** målrom. I så fall, må man ha

$$\mu(N) = 0 \quad N \in \mathcal{N}.$$

## Definisjon (Komplettering av $\sigma$ -algebra)

Er  $\mathcal{A}$  ikke komplett? Det går bra:

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$$

er den minste (komplette)  $\sigma$ -algebraen som inneholder  $\mathcal{A} \cup \mathcal{N}$ .

## Definisjon (Komplettering av $\sigma$ -algebra)

Er  $\mathcal{A}$  ikke komplett? Det går bra:

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$$

er den minste (komplette)  $\sigma$ -algebraen som inneholder  $\mathcal{A} \cup \mathcal{N}$ .

## Definisjon (Komplettering av $\mu$ )

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  kan kompletteres til  $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$  der  $\overline{\mathcal{A}}$  er kompletteringen av  $\mathcal{A}$  og  $\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$ .

## Definisjon (Komplettering av $\sigma$ -algebra)

Er  $\mathcal{A}$  ikke komplett? Det går bra:

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$$

er den minste (komplette)  $\sigma$ -algebraen som inneholder  $\mathcal{A} \cup \mathcal{N}$ .

## Definisjon (Komplettering av $\mu$ )

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  kan kompletteres til  $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$  der  $\overline{\mathcal{A}}$  er kompletteringen av  $\mathcal{A}$  og  $\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$ . **Teorem:**  $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$  er et komplett målrom.

## Definisjon (Komplettering av $\sigma$ -algebra)

Er  $\mathcal{A}$  ikke komplett? Det går bra:

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$$

er den minste (komplette)  $\sigma$ -algebraen som inneholder  $\mathcal{A} \cup \mathcal{N}$ .

## Definisjon (Komplettering av $\mu$ )

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  kan kompletteres til  $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$  der  $\overline{\mathcal{A}}$  er kompletteringen av  $\mathcal{A}$  og  $\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$ . **Teorem:**  $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$  er et komplett målrom.

## Eksempel

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \quad \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).$$

<https://www.math3ma.com/blog/lebesgue-but-not-borel>

# Innholdsfortegnelse

- 1 Historisk kontekst og motivasjon for målteori
- 2 Mål og målrom
- 3 Pushforward-målet
- 4 Kompletthet
- 5 Målbare funksjoner**
- 6 Integrasjon
- 7 Integrasjon med hensyn til pushforward-målet
- 8 Konvergensteoremer
- 9 Sannsynlighetsteori

To målrom:  $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ .

### Definisjon (Målbar funksjon)

En funksjon  $f : X \rightarrow Y$  kalles  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -**målbar** dersom for alle  $B \in \mathcal{B}$ , så har vi at  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ .

To målrom:  $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ .

## Definisjon (Målbar funksjon)

En funksjon  $f : X \rightarrow Y$  kalles  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -**målbar** dersom for alle  $B \in \mathcal{B}$ , så har vi at  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ .

## Eksempel

Hvis  $Y = \mathbb{R}$  og  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$  Borel- $\sigma$ -algebraen og  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Da er  $f$  målbar dersom  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  for alle Borel-mengder  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

To målrom:  $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ .

## Definisjon (Målbar funksjon)

En funksjon  $f : X \rightarrow Y$  kalles  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -**målbar** dersom for alle  $B \in \mathcal{B}$ , så har vi at  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ .

## Eksempel

Hvis  $Y = \mathbb{R}$  og  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$  Borel- $\sigma$ -algebraen og  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Da er  $f$  målbar dersom  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  for alle Borel-mengder  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

## Lemma

*La  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  være en funksjon mellom målbare rom. La  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$  være en samling av mengder slik at  $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$ .*

*Da er  $f$   $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -målbar hvis, og bare hvis,  $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$  for alle  $C \in \mathcal{C}$ .*

To målrom:  $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ .

## Definisjon (Målbar funksjon)

En funksjon  $f : X \rightarrow Y$  kalles  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -**målbar** dersom for alle  $B \in \mathcal{B}$ , så har vi at  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ .

## Eksempel

Hvis  $Y = \mathbb{R}$  og  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$  Borel- $\sigma$ -algebraen og  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Da er  $f$  målbar dersom  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  for alle Borel-mengder  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

## Korollar

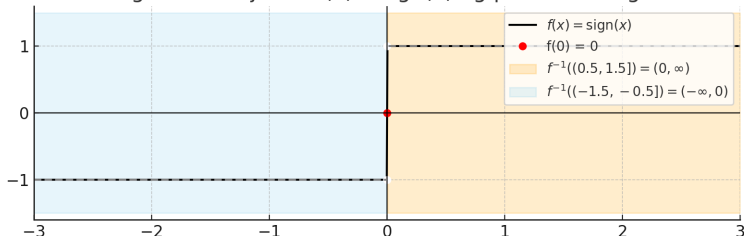
$f : X \rightarrow \mathbb{R}$  er Borel-målbar hvis, og bare hvis

$$f^{-1}((-\infty, r)) \in \mathcal{A}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

# Eksempler

- $f(x) = 0, x < 0, f(x) = 1, x \geq 0$  er målbar.

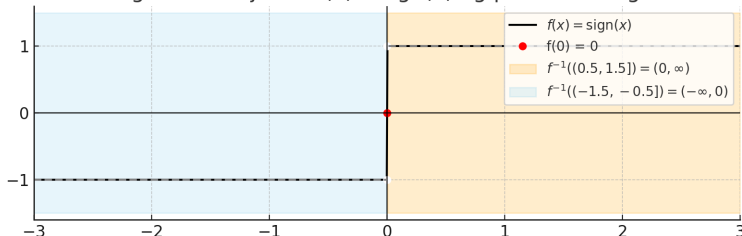
Signumfunksjonen  $f(x) = \text{sign}(x)$  og preavbildninger



# Eksempler

- $f(x) = 0, x < 0, f(x) = 1, x \geq 0$  er målbar.

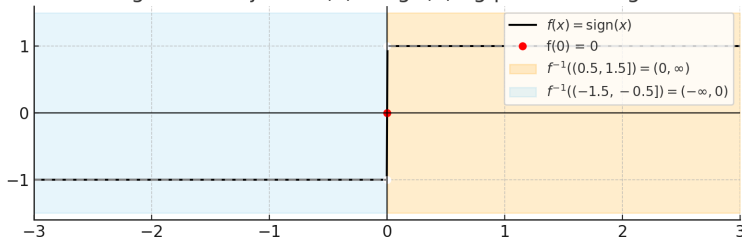
Signumfunksjonen  $f(x) = \text{sign}(x)$  og preavbildninger



# Eksempler

- $f(x) = 0, x < 0, f(x) = 1, x \geq 0$  er målbar.

Signumfunksjonen  $f(x) = \text{sign}(x)$  og preavbildninger

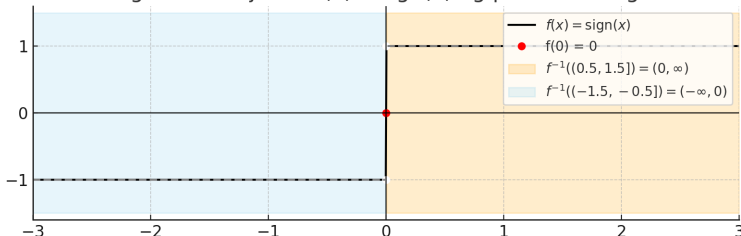


- Kontinuerlige funksjoner.

# Eksempler

- $f(x) = 0, x < 0, f(x) = 1, x \geq 0$  er målbar.

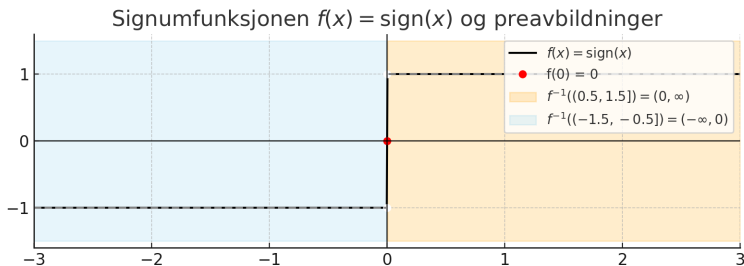
Signumfunksjonen  $f(x) = \text{sign}(x)$  og preavbildninger



- Kontinuerlige funksjoner.

# Eksempler

- $f(x) = 0, x < 0, f(x) = 1, x \geq 0$  er målbar.

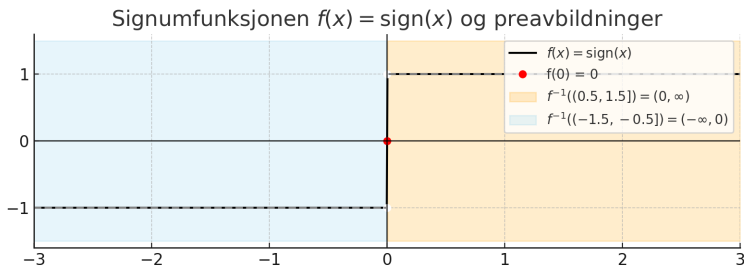


- Kontinuerlige funksjoner.

- $af + bg, a, b \in \mathbb{R}; fg; f/g, g \neq 0, \limsup_n f_n, \liminf_n f_n, \{x : f(x) \geq g(x)\}$  osv.

# Eksempler

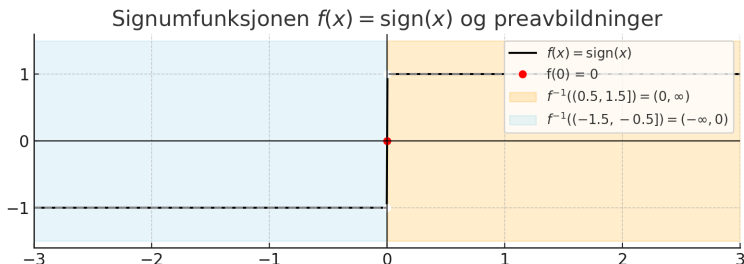
- $f(x) = 0, x < 0, f(x) = 1, x \geq 0$  er målbar.



- Kontinuerlige funksjoner.
- $af + bg, a, b \in \mathbb{R}; fg; f/g, g \neq 0, \limsup_n f_n, \liminf_n f_n, \{x : f(x) \geq g(x)\}$  osv.
- $f^+ = \max\{f, 0\}, f^- = \max\{-f, 0\}$  hence  $|f| = f^+ + f^-$ .

# Eksempler

- $f(x) = 0, x < 0, f(x) = 1, x \geq 0$  er målbar.



- Kontinuerlige funksjoner.
- $af + bg, a, b \in \mathbb{R}; fg; f/g, g \neq 0, \limsup_n f_n, \liminf_n f_n, \{x : f(x) \geq g(x)\}$  osv.
- $f^+ = \max\{f, 0\}, f^- = \max\{-f, 0\}$  hence  $|f| = f^+ + f^-$ .
- $X = \{a, b, c\}, \mathcal{A} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, X\}, Y = \{0, 1\}, \mathcal{B} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, Y\}$  and  $f : X \rightarrow Y, f(x) = \mathbf{1}_{\{a\}}(x)$  is **not** measurable.

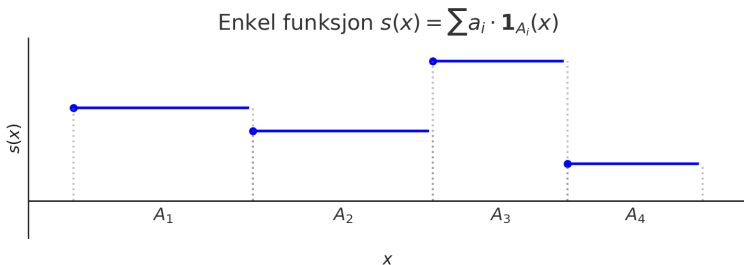
# Innholdsfortegnelse

- 1 Historisk kontekst og motivasjon for målteori
- 2 Mål og målrom
- 3 Pushforward-målet
- 4 Kompletthet
- 5 Målbare funksjoner
- 6 Integrasjon**
- 7 Integrasjon med hensyn til pushforward-målet
- 8 Konvergensteoremer
- 9 Sannsynlighetsteori

# Enkle funksjoner

$(X, \mathcal{A})$  et målbart rom. En enkel funksjon er gitt på formen

$$s(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad A_i \in \mathcal{A}, \quad a_i > 0.$$

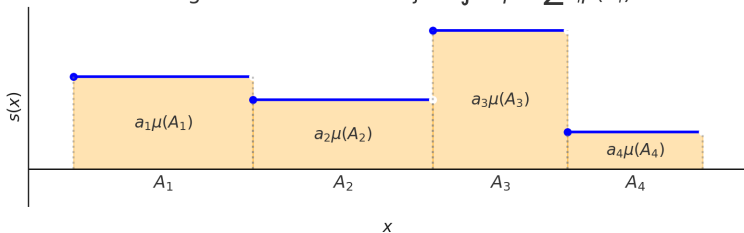


For enkelthets skyld:  $A_i$  disjunkte og  $a_i$  ulike (standardform).

# Integrasjon av enkle funksjoner

$$s(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad (\text{på standardform}), \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = X.$$

Integralet av enkel funksjon:  $\int s \, d\mu = \sum a_i \mu(A_i)$



Vi definerer integralet til  $s$  m.h.p.  $\mu$

$$\int_X s \, d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$$

# Integrasjon av ikke-negative funksjoner

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ enkel} \right\}.$$

# Integrasjon av ikke-negative funksjoner

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ enkel} \right\}.$$

En konstruktiv ekvivalent definisjon er: En økende følge  $\{s_n\}_{n \geq 1}$  enkle funksjoner slik at  $s_n \rightarrow f$  punktvis på  $X$ , da har vi at

$$\lim_n \int_X s_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Den ovennevnte tilnærmingen baserer seg på *monoton konvergensteorem* (MCT) som vi ikke har introdusert.

# Integrasjon av ikke-negative funksjoner

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ enkel} \right\}.$$

En konstruktiv ekvivalent definisjon er: En økende følge  $\{s_n\}_{n \geq 1}$  enkle funksjoner slik at  $s_n \rightarrow f$  punktvis på  $X$ , da har vi at

$$\lim_n \int_X s_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

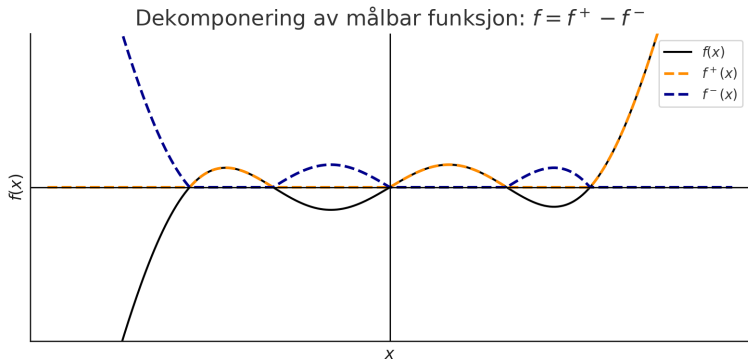
Den ovennevnte tilnærmingen baserer seg på *monoton konvergensteorem* (MCT) som vi ikke har introdusert.

$$\lim_n \int_X s_n d\mu \stackrel{\text{MCT}}{=} \int_X \lim_n s_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

# Integrasjon av målbare funksjoner

Bruk dekomponeringen:  $f = f^+ - f^-$

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$



# Integrability

En målbar funksjon  $f$  er  $\mu$ -**integrerbar** hvis, og bare hvis

$$\int_X |f| d\mu < \infty.$$

# Integrability

En målbar funksjon  $f$  er  $\mu$ -**integrerbar** hvis, og bare hvis

$$\int_X |f| d\mu < \infty.$$

Klassen av integrerbare funksjoner  $f$  betegnes

$$L^1(\mu) = \left\{ f \text{ målbar} : \int_X |f| d\mu < \infty \right\}.$$

Funksjonsrommet  $L^1(\mu)$  er et Banach-rom.

# Integrability

En målbar funksjon  $f$  er  $\mu$ -**integrerbar** hvis, og bare hvis

$$\int_X |f| d\mu < \infty.$$

Klassen av integrerbare funksjoner  $f$  betegnes

$$L^1(\mu) = \left\{ f \text{ målbar} : \int_X |f| d\mu < \infty \right\}.$$

Funksjonsrommet  $L^1(\mu)$  er et Banach-rom.

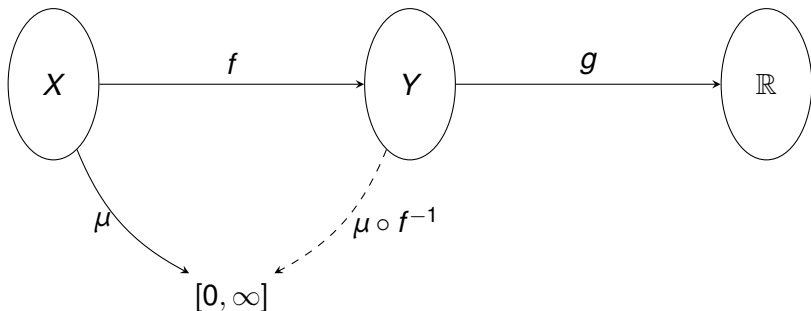
## Bemerkning

Alle Riemann-integrerbare begrensede funksjoner på  $[a, b]$  er Lebesgue integrerbare, men uengentlig integrasjon er en annen sak!

# Innholdsfortegnelse

- 1 Historisk kontekst og motivasjon for målteori
- 2 Mål og målrom
- 3 Pushforward-målet
- 4 Kompletthet
- 5 Målbare funksjoner
- 6 Integrasjon
- 7 Integrasjon med hensyn til pushforward-målet**
- 8 Konvergensteoremer
- 9 Sannsynlighetsteori

# Integrasjon mht pushforward-målet



$$\int_X g \circ f \, d\mu = \int_Y g \, d\mu \circ f^{-1}$$

# Innholdsfortegnelse

- 1 Historisk kontekst og motivasjon for målteori
- 2 Mål og målrom
- 3 Pushforward-målet
- 4 Kompletthet
- 5 Målbare funksjoner
- 6 Integrasjon
- 7 Integrasjon med hensyn til pushforward-målet
- 8 Konvergensteoremer**
- 9 Sannsynlighetsteori

# Monoton konvergensteorem

$\{f_n\}_{n \geq 1}$  en følge ikke-negative funksjoner slik at  $f_n \leq f_{n+1}$  og  $f_n \rightarrow f$  punktvis. Da

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

# Monoton konvergensteorem

$\{f_n\}_{n \geq 1}$  en følge ikke-negative funksjoner slik at  $f_n \leq f_{n+1}$  og  $f_n \rightarrow f$  punktvis. Da

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

$f$  kan være uendelig.

# Monoton konvergensteorem

$\{f_n\}_{n \geq 1}$  en følge ikke-negative funksjoner slik at  $f_n \leq f_{n+1}$  og  $f_n \rightarrow f$  punktvis. Da

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

$f$  kan være uendelig.

## Eksempel (På tavla)

$\mu$  Lebesgue-målet,  $f_n(x) = \mathbf{1}_{[0, 1 - \frac{1}{n}]}(x)$ ,  $x \in [0, 1]$ .

# Monoton konvergensteorem

$\{f_n\}_{n \geq 1}$  en følge ikke-negative funksjoner slik at  $f_n \leq f_{n+1}$  og  $f_n \rightarrow f$  punktvis. Da

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

$f$  kan være uendelig.

## Eksempel (På tavla)

$\mu$  Lebesgue-målet,  $f_n(x) = \mathbf{1}_{[0, 1 - \frac{1}{n}]}(x)$ ,  $x \in [0, 1]$ .

## Eksempel (På tavla)

$\mu$  Lebesgue-målet.

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

# Anvendelse av MCT

Det gir en konstruktiv definisjon av  $\mu$ -integral:

## Lemma

*$(X, \mathcal{A}, \mu)$  målrom og  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  en ikke-negativ funksjon. Det eksisterer en økende følge med funksjoner  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  slik at  $f_n \rightarrow f$  punktvis på  $X$ .*

# Anvendelse av MCT

Det gir en konstruktiv definisjon av  $\mu$ -integral:

## Lemma

*$(X, \mathcal{A}, \mu)$  målrom og  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  en ikke-negativ funksjon. Det eksisterer en økende følge med funksjoner  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  slik at  $f_n \rightarrow f$  punktvis på  $X$ .*

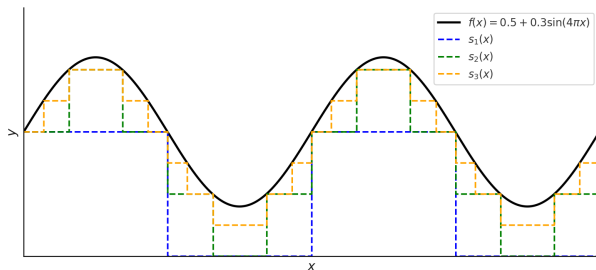
Man kan vise at  $f_n$  over kan velges som enkle funksjoner  $s_n$  på standardform. Da gjelder

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \lim_n s_n \, d\mu = \lim_n \underbrace{\int_X s_n \, d\mu}_{\text{definert!}}.$$

# Anvendelse av MCT

Et klassisk valg av  $s_n(x)$  er:

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^{2^n \cdot n} \frac{k-1}{2^n} \cdot \mathbf{1}_{\left\{\frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\right\}} + n \cdot \mathbf{1}_{\{f(x) \geq n\}}.$$



# Dominert konvergensteorem

La  $g \in L^1(\mu)$  og  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  en følge slik at  $f_n \rightarrow f$  punktvis og  $|f_n| \leq g$  for alle  $n \geq 1$ . Da

$$\lim_n \int |f_n - f| d\mu = 0. \quad (1)$$

Noe som også medfører at

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu. \quad (2)$$

# Dominert konvergensteorem

La  $g \in L^1(\mu)$  og  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  en følge slik at  $f_n \rightarrow f$  punktvis og  $|f_n| \leq g$  for alle  $n \geq 1$ . Da

$$\lim_n \int |f_n - f| d\mu = 0. \quad (1)$$

Noe som også medfører at

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu. \quad (2)$$

## Eksempel (På tavla)

$\mu$  Lebesgue-målet,  $f_n(x) = x^n$ ,  $x \in [0, 1]$ .

## Eksempel (På tavla)

$\mu$  Lebesgue-målet,  $f_n(x) = n \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{n}]}(x)$ ,  $x \in [0, 1]$ .

# Dominert konvergensteorem

La  $g \in L^1(\mu)$  og  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  en følge slik at  $f_n \rightarrow f$  punktvis og  $|f_n| \leq g$  for alle  $n \geq 1$ . Da

$$\lim_n \int |f_n - f| d\mu = 0. \quad (1)$$

Noe som også medfører at

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu. \quad (2)$$

## Bemerkning

(1) og (1) er ekvivalente under DCT, men generelt medfører (2) ikke (1). Dette er et generelt resultat i funksjonsanalyse: svak konvergens + konvergens i norm = sterk konvergens. Her medfører forresten  $f_n \rightarrow f$  punktvis +  $|f_n| \leq g$  svak konvergens.

# Fatou-Lebesgue-teorem

1)  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  ikke-negative målbare funksjoner:

$$\int_X \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu \quad (\text{Fatous lemma})$$

# Fatou-Lebesgue-teorem

1)  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  ikke-negative målbare funksjoner:

$$\int_X \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu \quad (\text{Fatous lemma})$$

2) Dersom det finnes  $g \in L^1(\mu)$  slik at  $|f_n| \leq g$  så har vi

$$\limsup_n \int_X f_n d\mu \leq \int_X \limsup_n f_n d\mu \quad (\text{omvendte Fatous lemma})$$

# Fatou-Lebesgue-teorem

1)  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  ikke-negative målbare funksjoner:

$$\int_X \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu \quad (\text{Fatous lemma})$$

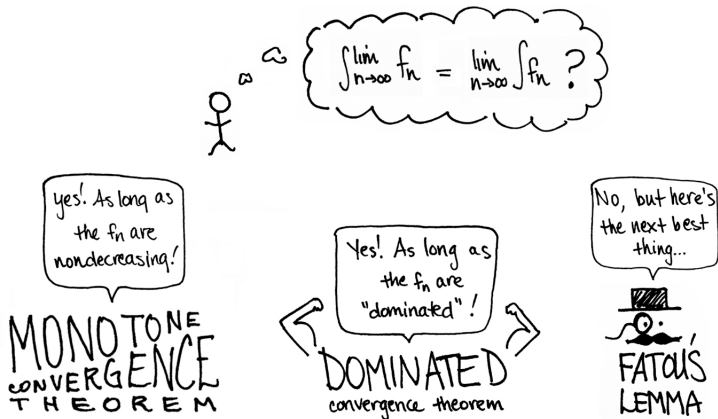
2) Dersom det finnes  $g \in L^1(\mu)$  slik at  $|f_n| \leq g$  så har vi

$$\limsup_n \int_X f_n d\mu \leq \int_X \limsup_n f_n d\mu \quad (\text{omvendte Fatous lemma})$$

Både-og (Fatou-Lebesgue-teorem):  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  ikke-negative slik at  $|f_n| \leq g \in L^1(\mu)$ , så

$$\int_X \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu \leq \limsup_n \int_X f_n d\mu \leq \int_X \limsup_n f_n d\mu.$$

# DCT, MCT og Fatou oppsummert



Figur: Bilde fra: <https://www.math3ma.com>

# Sammenligning av Riemann og Lebesgue-integrasjon

| Type                       | Funksjon                                                                                         | Riemann-integral | Lebesgue-integral |
|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|-------------------|
| Egentlig R og L            | $f$ kontinuerlig på $[0, 1]$                                                                     | ✓                | ✓                 |
| Uegentlig R, men ikke L    | $f(x) = \frac{\sin(1/x)}{x}$ på $(0, 1]$                                                         | ✓                | ✗                 |
| Uegentlig R og Lebesgue    | $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ på $(0, 1]$                                                          | ✓                | ✓                 |
| Ikke Riemann, men Lebesgue | $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ på $[0, 1]$ | ✗                | ✓                 |

✓ = integralet eksisterer, ✗ = ikke definert eller divergerer

# Sammenligning av Riemann og Lebesgue-integrasjon

| Type                       | Funksjon                                                                                         | Riemann-integral | Lebesgue-integral |
|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|-------------------|
| Egentlig R og L            | $f$ kontinuerlig på $[0, 1]$                                                                     | ✓                | ✓                 |
| Uegentlig R, men ikke L    | $f(x) = \frac{\sin(1/x)}{x}$ på $(0, 1]$                                                         | ✓                | ✗                 |
| Uegentlig R og Lebesgue    | $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ på $(0, 1]$                                                          | ✓                | ✓                 |
| Ikke Riemann, men Lebesgue | $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ på $[0, 1]$ | ✗                | ✓                 |

✓ = integralet eksisterer, ✗ = ikke definert eller divergerer

## Teorem (Riemann vs. Lebesgue)

*La  $f$  være målbar og avgreset i et lukket intervall  $[a, b]$ .*

$$f \text{ Riemann-integrerbar} \iff \mu\{x : f \text{ diskontinuerlig}\} = 0.$$

# Uegentlig Lebesgue-integrasjon

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x) dx \quad (\text{Riemann-tilnærming}).$$

La  $f_n(x) = f(x)\mathbf{1}_{[0,n]}(x)$ . Da har vi at

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,\infty)} f_n d\mu.$$

Dersom  $f_n$  ikke-negative og  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ , eller  $|f_n| \geq g \in L^1(\mu)$  så

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,\infty)} f_n d\mu = \int_{[0,\infty)} f d\mu$$

og  $f$  er både uegentlig Riemann- og Lebesgue-integrerbar.

# Innholdsfortegnelse

- 1 Historisk kontekst og motivasjon for målteori
- 2 Mål og målrom
- 3 Pushforward-målet
- 4 Kompletthet
- 5 Målbare funksjoner
- 6 Integrasjon
- 7 Integrasjon med hensyn til pushforward-målet
- 8 Konvergensteoremer
- 9 Sannsynlighetsteori**

# Sannsynlighetsteori!

1 Et målrom  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  der  $\Omega$  er et utfallsrom,  $\mathcal{A}$  en  $\sigma$ -algebra og  $\mathbb{P}$  et mål slik at  $\mathbb{P}[\Omega] = 1$  kalles et **sannsynlighetsrom**.

2

3

4

# Sannsynlighetsteori!

- 1 Et målrom  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  der  $\Omega$  er et utfallsrom,  $\mathcal{A}$  en  $\sigma$ -algebra og  $\mathbb{P}$  et mål slik at  $\mathbb{P}[\Omega] = 1$  kalles et **sannsynlighetsrom**.
- 2 En målbar funksjon  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  på et sannsynlighetsrom kalles en **tilfeldig variabel**.
- 3
- 4

# Sannsynlighetsteori!

- 1 Et målrom  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  der  $\Omega$  er et utfallsrom,  $\mathcal{A}$  en  $\sigma$ -algebra og  $\mathbb{P}$  et mål slik at  $\mathbb{P}[\Omega] = 1$  kalles et **sannsynlighetsrom**.
- 2 En målbar funksjon  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  på et sannsynlighetsrom kalles en **tilfeldig variabel**.
- 3 Integralet til en tilfeldig variabel m.h.p. sannsynlighetsmålet  $\mathbb{P}$ :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}$$

kalles **forventningen** til  $X$ .

4

# Sannsynlighetsteori!

- 1 Et målrom  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  der  $\Omega$  er et utfallsrom,  $\mathcal{A}$  en  $\sigma$ -algebra og  $\mathbb{P}$  et mål slik at  $\mathbb{P}[\Omega] = 1$  kalles et **sannsynlighetsrom**.
- 2 En målbar funksjon  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  på et sannsynlighetsrom kalles en **tilfeldig variabel**.
- 3 Integralet til en tilfeldig variabel m.h.p. sannsynlighetsmålet  $\mathbb{P}$ :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}$$

kalles **forventningen til  $X$** .

- 4 Pushforward-målet medfører at vi kan regne forventninger slik:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\Omega} g \circ X d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} g d\mathbb{P}_X,$$

der  $\mathbb{P}_X$  er den såkalte *loven til  $X$* , og kan uttrykkes vha. en økende funksjon:  $\mathbb{P}_X[(a, b]] = F_X(b) - F_X(a)$  – nemlig *fordelingsfunksjonen* til  $X$ .

# Sannsynlighetsteori!

- 1 Et målrom  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  der  $\Omega$  er et utfallsrom,  $\mathcal{A}$  en  $\sigma$ -algebra og  $\mathbb{P}$  et mål slik at  $\mathbb{P}[\Omega] = 1$  kalles et **sannsynlighetsrom**.
- 2 En målbar funksjon  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  på et sannsynlighetsrom kalles en **tilfeldig variabel**.
- 3 Integralet til en tilfeldig variabel m.h.p. sannsynlighetsmålet  $\mathbb{P}$ :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}$$

kalles **forventningen** til  $X$ .

- 4 Pushforward-målet medfører at vi kan regne forventninger slik:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\Omega} g \circ X d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} g d\mathbb{P}_X,$$

der  $\mathbb{P}_X$  er den såkalte *loven til*  $X$ , og kan uttrykkes vha. en økende funksjon:  $\mathbb{P}_X[(a, b]] = F_X(b) - F_X(a)$ , nemlig *fordelingsfunksjonen* til  $X$ .

Takk for meg!

$$\mathbb{P}[\pi z^2 a] = 1$$

UiO : **Matematisk institutt**

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet



**David R. Banos**



**Reell rett frem: målteori**

Støtteforedrag i MAT2400

