KONVERGENS

... HVORFOR?

Ulrik Skre Fjordholm

OVERSIKT

1. Hva er konvergens?
2. Hva bruker vi det til?
3. Oppsummering

HVA ER KONVERGENS?

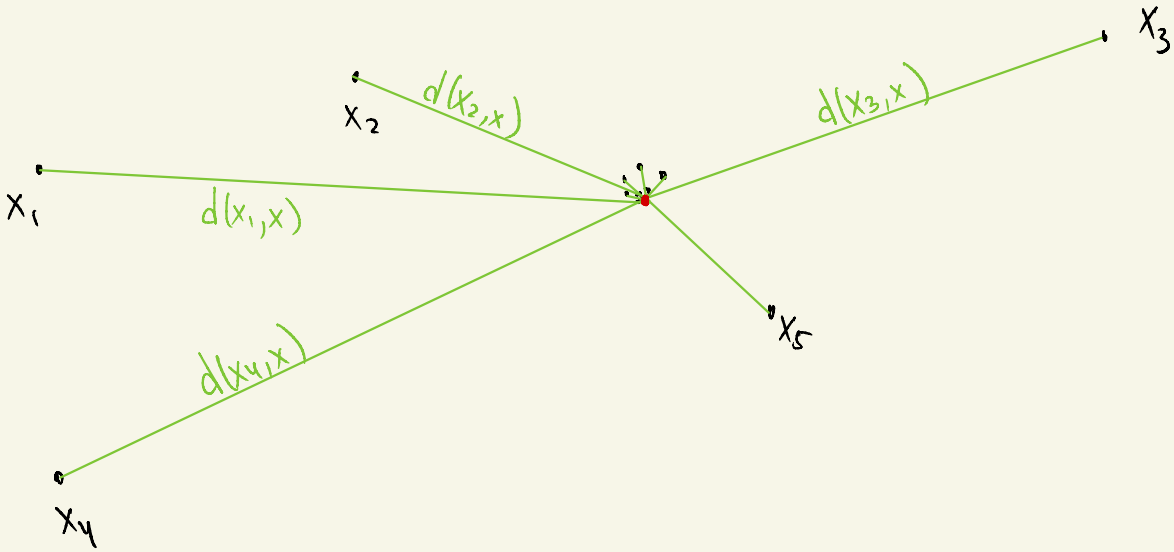
DEFINISJON AV KONVERGENS

En følge $x_1, x_2, \ldots$ **konvergerer** mot x om punktene kommer nærmere og nærmere x



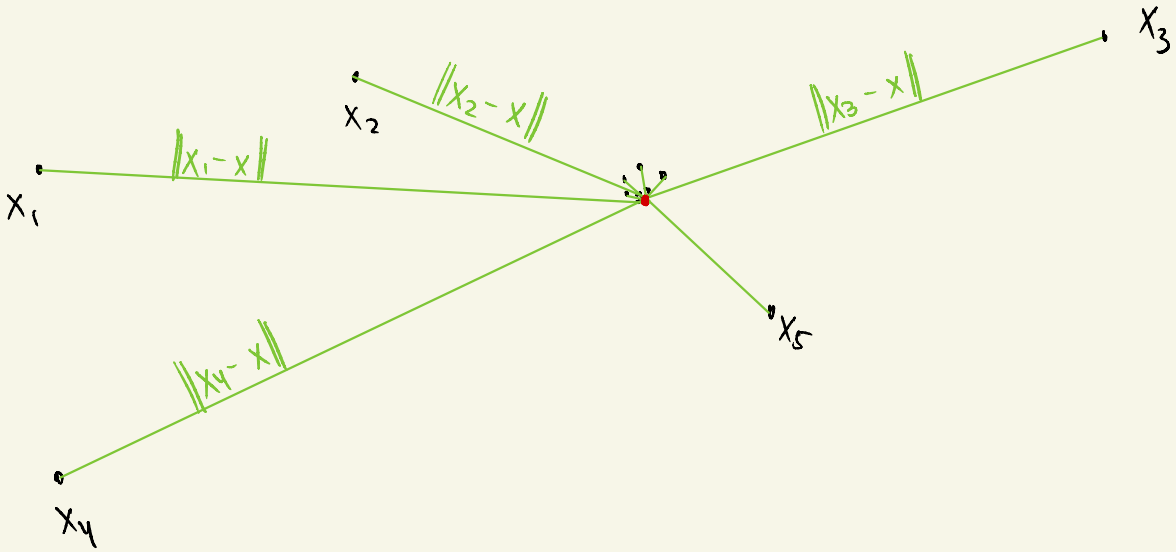
DEFINISJON AV KONVERGENS

En følge $x_1, x_2, \ldots$ i et metrisk rom (X, d) konvergerer mot x om $d(x_k, x) \longrightarrow 0$ når $k \to \infty$



DEFINISJON AV KONVERGENS

En følge $x_1, x_2, \ldots$ i et normert vektorrom $(X, \|\cdot\|)$ **konvergerer** mot x om $\|x_k - x\| \longrightarrow 0$ når $k \to \infty$



EKSEMPLER

Følgen $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ konvergerer mot 0 i $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, fordi

$$\left|\frac{1}{k} - 0\right| = \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

EKSEMPLER

Følgen $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ konvergerer mot 0 i $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, fordi

$$\left|\frac{1}{k} - 0\right| = \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Følgen $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$ konvergerer mot 1 i $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ fordi

$$\left|\frac{k+1}{k} - 1\right| = \frac{(k+1)-k}{k} = \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

La $\varepsilon > 0$. Vil ha $\frac{1}{k} < \varepsilon \iff k > \frac{1}{\varepsilon}$

UNIFORM KONVERGENS

La $C([a,b]) = \{$ kontinuerlige $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \}$ og

$$\rho(f,g) = \sup \{ |f(t) - g(t)| : t \in [a,b] \}.$$

Vi siger at $f_1, f_2, \ldots$ konvergerer uniformt mod f om

$$\rho(f_n, f) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |f(t) - g(t)| < \varepsilon\ \ \forall\ t \in [a,b]$$

$$\Longrightarrow \rho(f_n, f) \leq \varepsilon$$

EKSEMPEL

La $f_n(t) = \cos(t + 1/n)$, $f(t) = \cos(t)$ for $t \in \mathbb{R}$.

Da vil $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ uniformt.

$t \in [a,b] \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| = |\cos(t+1/n) - \cos t|$

$= |\sin(\xi)((t+1/n) - t)|$ for en $\xi \in [t, t+\frac{1}{n}]$

$= |\sin(\xi)| \frac{1}{n}$

$\leq \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \rho(f_n, f) \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

PUNKTVIS KONVERGENS

La $f_1, f_2, \ldots$ være en følge av funksjoner $f_n : X \longrightarrow Y$.
Vi sier at $f_n \longrightarrow f$ punktvis om: For alle $x \in X$ vil

$$d_y(f_n(x), f(x)) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Uniform konvergens $\Rightarrow$ punktvis konvergens

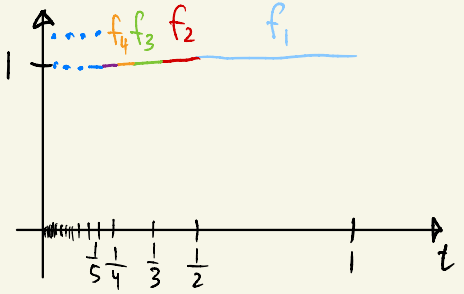
EKSEMPLER

Definer $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ved $f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } \frac{1}{n+1} < t < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$

Da vil $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ punktvis, men ikke uniformt.

La $t \in (0,1]$. La $N > \frac{1}{t}$. Da vil $f_n(t) = 0 \quad \forall\ n \geq N$.

Men $\rho(f_n, 0) = 1$



KONVERGENS I L^p

La $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vare et målrom, $p \in [1, \infty]$ og $f_1, f_2, \ldots \in L^p(\mu)$.
Vi sier at $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ i L^p om $\|f_n - f\|_{L^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

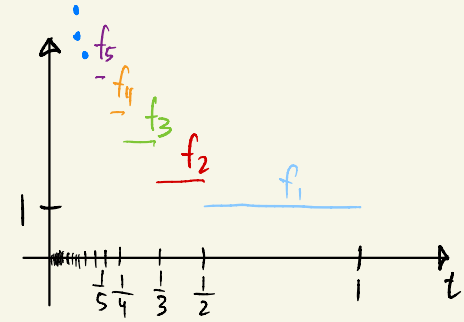
(Her er $\|g\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_X |g(x)|^p \, dx\right)^{1/p} & \text{om } p < \infty \\ \text{ess sup}_{x \in X} |g(x)| & \text{om } p = \infty \end{cases}$

og $L^p(\mu) = \{g : X \to \mathbb{R} : \|g\|_{L^p} < \infty\}$.)

EKSEMPLER

Definer $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ved $f_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{om } \frac{1}{n+1} < t < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$

Da vil $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ i $L^1(\mu)$, men ikke i $L^p(\mu)$ for $p \geq 2$.



HVORFOR SÅ MANGE FORSKJELLIGE KONV.?

Konvergenstyper for funksjoner:

- Punktvis
- Uniform
- L^p (for $p \in [1, \infty]$)
- Konvergens i mål
- ⋮

HVA BRUKER VI DET TIL?

ALT ER KONVERGENS!

En kontinuerlig funksjon er en funksjon som bevarer konvergens:

om $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, vil også $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

ALT ER KONVERGENS!

En kontinuerlig funksjon er en funksjon som bevarer konvergens:

om $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, vil også $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

Et komplett metrisk rom er et rom der alle Cauchy-følger konvergerer.

En kompakt mengde er en mengde der alle følger har en konvergent delfølge.

ALT ER KONVERGENS!

En kontinuerlig funksjon er en funksjon som bevarer konvergens:

om $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, vil også $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

Et komplett metrisk rom er et rom der alle Cauchy-følger konvergerer.

En kompakt mengde er en mengde der alle følger har en konvergent delfølge.

En funksjon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er deriverbar om $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ er konvergent når $h \to 0$

En rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gir bare mening når $\sum_{n=1}^{N} a_n$ konvergerer når $N \to \infty$

HVA BRUKES KONVERGENS TIL?

Vi vil løse matematiske problemer,

finn x slik at $f(x) = y$

for eksempel:

- finne røtter til et polynom
- løse et lineært ligningssett
- løse en differensialligning
- finne en inversfunksjon
- finne et minimumspunkt

HVA BRUKES KONVERGENS TIL?

finn x slik at $f(x) = y$

Strategi:

1) løs et enklere problem

finn x_n slik at $f_n(x_n) = y_n$

2) vis at $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ og $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$

HVA BRUKES KONVERGENS TIL?

finn x slik at $f(x) = y$

Strategi:

1) løs et enklere problem

finn x_n slik at $f_n(x_n) = y_n$

2) vis at $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ og $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$

3) bruk kompakthet eller kompletthet til å vise at $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \overline{x}$

HVA BRUKES KONVERGENS TIL?

finn x slik at $f(x) = y$

Strategi: 1) løs et enklere problem

finn x_n slik at $f_n(x_n) = y_n$

2) vis at $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ og $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$

3) bruk kompakthet eller kompletthet til å vise at $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \overline{x}$

4) vis at $\overline{x}$ løser problemet:

$$f(\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} f_n(\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

EKSEMPLER

Ekstremalverdisetningen:
Om K er kompakt og $f: K \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, finnes $\overline{x} \in K$ slik at $f(\overline{x}) \geq f(x) \quad \forall\, x \in K$

Bevis:
- Finn maksimerende følge $f(x_1), f(x_2), \ldots$. Bruk kompakthet til å velge en konvergent delfølge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, $x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} \overline{x}$.
- Bruk kontinuitet for å vise at $\overline{x}$ løser problemet:

$$f(\overline{x}) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \sup_{x \in K} f(x).$$

EKSEMPLER

$x: \; g(x) = y$

$\Leftrightarrow g(x) - y + x = x$

$= f(x)$

Banachs fikspunktteorem

Om X er komplett, $f: X \to X$ er en kontraksjon, og $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, vil $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar{x}$, der $\bar{x} = f(\bar{x})$.

Bevis:

- Estimer direkte for å vise at $(x_n)_n$ er Cauchy:

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{d(x_1, x_2)}{1 - s} s^N \qquad \text{for } n, m \geq N.$$

- Bruk kompletthet for å få konvergens: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar{x}$.

- Bruk kontinuitet for å vise at $\bar{x}$ er et fikspunkt:

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\bar{x}).$$

EKSEMPLER

Differensialligninger

Om $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er Lipschitz og $z \in \mathbb{R}^n$, finnes en unik løsning av $\frac{d}{dt} y(t) = f(y(t))$, $y(0) = z$

Bevis: Bruk fikspunktiterasjonen

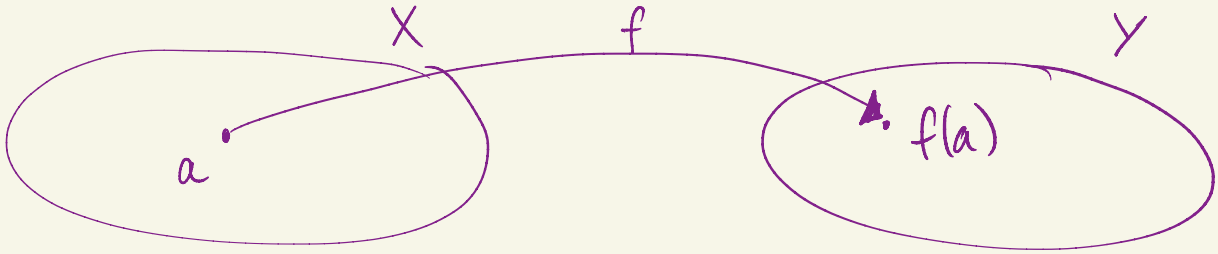
$$\frac{d}{dt} y_{k+1}(t) = f(y_k(t)), \qquad y_{k+1}(0) = z$$

og Banachs fikspunktteorem.

EKSEMPLER

Invers funksjonsteorem

Om X og Y er komplette, $f: X \to Y$ er deriverbar og $f'(a)$ er inverterbar, er f inverterbar nær a.



Bevis: Omformuler problemet til å løse en ligning, og bruk Banachs fikspunktteorem.

EKSEMPLER

Konstruksjon av integralet

For en funksjon $f: X \to \mathbb{R}$, finn trappefunksjoner / enkle funksjoner $f_1, f_2, \ldots : X \to \mathbb{R}$ slik at $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$.

Da er

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, dx.$$

EKSEMPEL FRA VIRKELIGHETEN

Finn $u = u(x,t)$ $\left(x \in \mathbb{R},\ t \in [0,\infty)\right)$ slik at

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\ t \in (0,\infty)$$

(f gitt) og $u(x,0) = \pi(x)$.

Løs istedet $\frac{\partial}{\partial t} v^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x} f(v^\varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} v^\varepsilon$ for $\varepsilon > 0$

(gjør fikspunktiter. $\frac{\partial}{\partial t} v^{\varepsilon,k+1} + \frac{\partial}{\partial x} f(v^{\varepsilon,k}) = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} v^{\varepsilon,k+1}$)

La nå $\varepsilon \longrightarrow 0$: $v^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{??} u$

OPPSUMMERING

HVORDAN VISE KONVERGENS?

i) **Direkte estimat:** Vis direkte at $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

> **Eksempel:** $\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

ii) **Kompletthet:** Om du er i et komplett rom, vis at $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er Cauchy.

> **Eksempel:**
> - Bevis for Banachs fikspunktteorem
> - Konvergens av rekker

iii) **Kompakthet:** Vis at $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ligger i en kompakt mengde.

> **Eksempel:**
> - Bevis for eksistens av ekstremalverdier
> - Konvergens av numeriske metoder for differensialligninger.

PIZZA!?