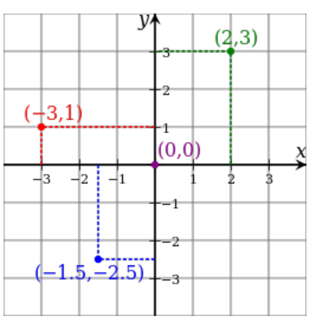
Yves Meyer,
Abelprisvinner 2017

ORTOGONALE FUNKSJONSSYSTEMER

Ortogonale funksjonssystemer spiller en viktig rolle i mange matematiske disipliner. Grunnideen er å forsøke å finne et begrenset antall "basisfunksjoner" som kan fungere som byggestener, slik at alle andre funksjoner kan bygges opp av disse. I tillegg ønsker vi at basisfunksjonene har så "snille" egenskaper at denne byggingen ikke blir for komplisert.

For 400 år siden introduserte filosofen og matematikeren René Descartes det som i ettertiden har fått navnet kartesisk koordinatsystem. Ideen med et slikt system er at man på en enkel måte kan beskrive beliggenheten til et punkt. Vi trenger kun et refereransesystem. Referansesystemet er bestemt av tre essensielle karakteristika; plassering av nullpunktet, retningen på aksene og en målestokk. I tillegg krever vi at aksene står normalt på hverandre. I forhold til et slikt system kan vi entydig beskrive posisjonen til et punkt, og regne den ut uten alt for store vanskeligheter. Posisjonen til et punkt relativt til referansesystemet uttrykkes ved punktets koordinater med hensyn på akse-retningene og målestokken.



Denne enkle ideen kan vi generalisere til mer abstrakte anvendelser. I stedet for punkter i rommet ser vi på funksjoner. Koordinatakser erstattes med spesielle basisfunksjoner og skalarproduktet som bestemmer koordinatverdiene byttes ut med et mer generelt **indreprodukt**. Akkurat som koordinatene til et punkt beskriver punktets komponent i en bestemt retning, vil koordinatene til en funksjon langs med en av basisfunksjonene beskrive funksjonens "komponent" i denne retningen. Dersom basisfunksjonene står normalt på hverandre, dvs. at deres innbyrdes indreprodukt er 0, sier vi at familien av basisfunkisjoner utgjør et **ortogonalt** funksjonssystem. Dersom basisfunksjonene i tillegg er normalisert, som i den generaliserte settingen betyr at indreproduktet av basisfunksjonene med seg selv er 1, bytter vi betegnelsen ortogonal med begrepet **ortonormal**.

Det er vanlig å bruke notasjonen $\langle f, g\rangle$ for indreproduktet mellom to funksjoner f og g. Indreproduktet har mange gode egenskaper, bl.a. vil indreproduktet av en funksjon med seg selv alltid være et ikke-negativt tall. Kun én funksjon skal ha indreprodukt med seg selv lik 0, og det er den konstante funksjonen 0.

Det finnes mange forskjellige ortogonale funksjonssystemer. Mest berømt er Fouriers trigonometriske systemer der basisfunksjonene er trigonometriske funksjoner $\sin nx$ og $\cos nx$ for varierende verdier av $n = 1, 2, \ldots$. I dette tilfellet kan vi definere indreproduktet av to funksjoner som

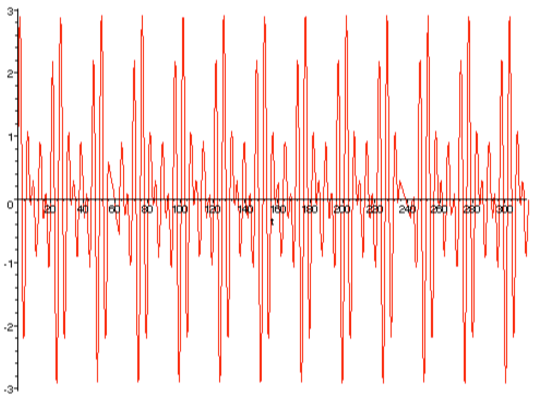
$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$$

og det er lett å forvisse seg om at f.eks.

$$\langle \sin nx, \cos mx\rangle = 0$$

Men tilsvarende resultat gjelder uansett hvilke av de gitte trigonometriske funksjonene vi velger, så lenge de ikke er like.

En viktig anvendelse av trigonometriske funksjoner er å tolke dem som lydbølger av ulik frekvens.



Figuren viser en illustrasjon av en tre-tone dur-akkord. Denne kan vi nå "teste" mot enkle sinus-svingninger med ulik frekvens. Å teste betyr i denne sammenheng at vi regner ut indreproduktet av denne svingningen med basisfunksjonene $\sin nx$. Siden disse funksjonene er innbyrdes ortogonale vil indreproduktet være 0 bortsett fra i de tilfellene der vi presis treffer med en av svingningene som inngår i treklangen. På denne måten kan vi rent teoretisk dekomponere lyden i dens enkelte bestanddeler. Enkelte begavede mennesker kan også gjøre dette i praksis, jfr. anekdoten om den 14-årige Mozart som skrev ned notene til Allegris Miserere etter å ha hørt den framført under en gudstjeneste i Vatikanet.

Det vi aller helst ønsker oss for et ortogonalt funksjonssystem er at det er **komplett**. Anta at vi har gitt et ortogonalt funksjonssystem, $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots$ (som vi gjerne kan anta er ortonormalt ved ganske enkelt å dele hver funksjon med indreproduktet med seg selv) og vi ønsker å dekomponere en annen funksjon f. Vi regner ut verdien av komponentene

$$\langle f, \phi_j \rangle$$

og setter dem sammen til en ny funksjon

$$\overline{f} = \sum_j \langle f, \phi_j \rangle \, \phi_j$$

På grunn av ortonormaliteten av systemet, vil denne funksjonen ha den gode egenskapen at

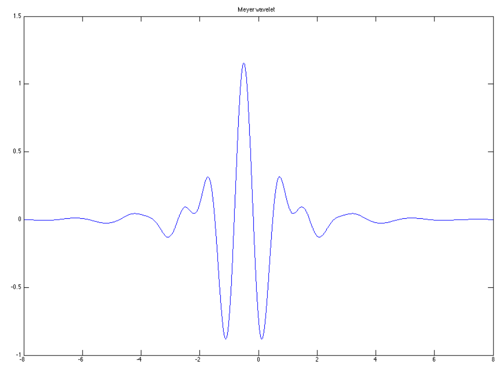
$$\overline{\overline{f}} = \overline{f}$$

Spørsmålet er om vi også har $\overline{f} = f$. Dersom dette med små modifikasjoner er riktig, så sier vi at det ortogonale funksjonssystemet er komplett. Det vil ikke alltid være slik, men når det er tilfelle, har vi skaffet oss et svært godt utgangspunkt for å kunne bruke systemet til å oppnå viktige resultater.

Siden basis-funksjonene i dette eksempelet kan tolkes som stasjonære svingninger med varierende frekvens, vil systemet være velegnet til å dekomponere funksjoner av samme natur. Andre funksjoner, med mer uregelmessigheter og brå endringer, vil ikke være like enkle å rekonstruere ved hjelp av trigonometriske basis-funksjoner. Dersom en funksjon på en eller annen måte beskriver en digitalisering av et fotografi, vil de delene av bildet som er svært homogene, f.eks. en blå himmel, kunne oppfattes som stasjonære. Mens konturer og kontraster vil være utpreget ikke-stasjonære.

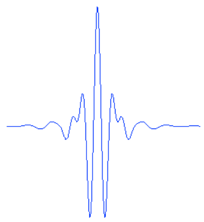
For å beskrive slike brå endringer kan man kombinere Fouriers trigonometriske basis-funksjoner med en såkalt vindus-teknikk, dvs. at man kun betrakter en liten del av en harmonisk svingning. Denne metoden har imidlertid noen begrensninger. For å kunne lokalisere brå endringer i signalene, eller i funksjonen som beskriver dem, vil vi trenge et smalt vindu. Jo smalere vindu, jo mer presis kan vi beskrive hvor endringen skjer. Konsekvensen er at vi "ser" en alt for liten del av basis-funksjonen til å kunne fastslå frekvensen. Den ekstreme ytterligheten vil være at vi reduserer vinduet til kun ett punkt. Men en svært kortvarig knepp vil ikke være nok til å fastslå frekvensene til lyden som inngår i kneppet. Uskarphetsrelasjonen i signalbehandling sier at jo mer presis vi kan fastslå når endringen skjer, jo vanskeligere er det å avgjøre hva endringen innebærer, og omvendt. For å optimalisere informasjonsinnhentingen må vi stadig variere vindusbredde og frekvens, og systemet bli unødig komplisert og ineffektivt.

I den moderne wavelet-teorien, introdusert av Jean Morlet og utviklet til en robust matematisk teori av Yves Meyer, omgår man til en viss grad disse vanskelighetene.

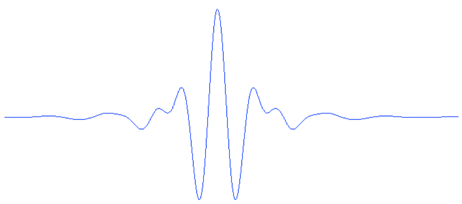


Meyers wavelet

Grunnlaget for denne teorien er å etablere en felles "moder-wavelet". Denne ene og samme funksjonen legges så til grunn for å konstruere hele det ortonormale funksjonssystemet. I tillegg til at funksjonene blir svært ensartet, de har på sett og vis samme form, noe som i matematisk sett er svært gunstig. Moder-waveleten kan f.eks. se ut som en skalert del av en bølgefunksjon, slik som i Meyers wavelet. Når vi har behov for å øke vindusbredden til denne waveleten "strekker" vi bare hele waveleten ut . Siden formen på waveleten er konstant vil økt bredde bety redusert frekvens og omvendt. Dermed vil basis-funksjonene være skreddersydd for å redusere problemene forårsaket av uskarhetsrelasjonen. Den andre bonusen er selvfølgelig at moder-waveleten sammen med alle sine "strekkinger" danner et ortogonalt funksjonssystem som i mange sammenhenger i tillegg vil være komplett.



Meyers wavelet, presset sammen



Meyers wavelet, strukket ut

Med Meyers generelle teori på plass, var det bare for ettertiden å sette i gang å produsere moder-waveleter egnet for et eller annet spesifikt formål, uten å måtte bekymre seg for om systemet av basis-funksjoner tilfredsstilte ortogonalitets-kravet. Det hadde Meyer tatt hånd om på et helt generelt grunnlag.