

Geometri på ikke-kommutative algebraer

Ski og matematikk 2011

Rondablikk

Arne B. Sletsjøe

Universitetet i Oslo

January 4, 2012

Algebraiske varieteter

$$k = \bar{k} \text{ (f.eks. } \mathbb{C}), S = k[x_1, \dots, x_n]$$

Affint algebraisk n -rom (Zariski-topologi):

$$X = \text{Hom}_{k\text{-alg}}(S, k) = \mathbb{A}^n$$

Affin varietet $Y = V(I) \subset X$ definert av ideal $I \subset S$ med lukkede punkter:

$$\rho : S \rightarrow k \quad \text{slik at} \quad \rho(I) = 0$$

dvs. mengden av alle n -tupler $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ slik at $f(\underline{x}) = 0$ for alle $f \in I$.

$$X_A = \text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k)$$

hvor $A = S/I$.

Algebraiske varieteter

Hilberts Nullstellensatz : La $f \in S$ være et polynom slik at $f(\underline{x}) = 0$ for alle $\underline{x} \in V(I)$, da finnes et naturlig tall r slik at $f^r \in I$.

For et radikalt ideal, $I = \sqrt{I} \subset S$:

$$I(V(I)) = I \quad V(I(X_A)) = X_A$$

Funktorielt (kontravariant):

$$\text{Surjeksjon } A \rightarrow B \quad \leftrightarrow \quad \text{inkludsjon } X_B \hookrightarrow X_A$$

Spesielt, for maksimalt ideal $I = \mathfrak{m} \subset A$, eller $\rho : A \rightarrow k = A/\mathfrak{m}$

$$\{pt\} \hookrightarrow X_A$$

Algebraiske varieteter

En ringhomomorfi $\rho : A \rightarrow k \simeq \text{End}_k(k)$ svarer til en A -modulstruktur på vektorrommet $V \simeq k$.

En A -modul-struktur på V , $V \simeq k^m$, $m \geq 2$:

$$\rho : A \rightarrow \text{End}_k(V) \simeq M_m(k)$$

La A være genereret av $x_1, \dots, x_n$, setter $A_i = \rho(x_i)$:

Resultat: Siden A er kommutativ kan matrisene $A_1, \dots, A_n$ simultant *trianguliseres*.

La $\mathcal{V} = \text{supp}(V)$ være mengden av komposisjonsfaktorer til V . Dersom $\mathcal{V}$ har m forskjellige elementer, så kan vi simultant *diagonalisere* mengden. Det betyr at i det tilfellet svarer en A -modul-struktur på $V \simeq k^m$ til en inklusjon av m forskjellige punkter i X_A .

Moduler

V en venstre A -modul, av dimensjon $\dim_k(V) = m$ over en assosiativ algebra A med strukturavbildning

$$\rho : A \rightarrow \text{End}_k(V)$$

V **simpel**: $\Leftrightarrow \rho$ surjektiv

V **indekomposabel** $\Leftrightarrow M$ splitter ikke

Til $\overline{V}$ tilordner vi den **assosierte semi-simple modulen** (opp til permutasjoner av faktorer)

$$\text{supp}(V) = \{V_i\} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{V} = \bigoplus V_i$$

Merk: Dersom A er kommutativ og $\mathcal{V}$ har $\dim_k(V) = m$ forskjellige elementer, så er $\overline{V} \simeq V$.

Moduler

Ekvivalente moduler: $\rho \sim \rho'$

$$\exists P \in SL_n(k); \forall a \in A, \rho'(a) = P^{-1}\rho(a)P$$

Svakere ekvivalens, $\rho \sim_* \rho'$;

$$\text{supp}(V) \sim \text{supp}(V')$$

Vi setter

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_m &= \{V \mid \dim(V) = m, \text{ semi-simpel}\} / \sim \\ &= \{M \mid \dim(V) = m\} / \sim_*\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\text{Simp}_m(A) &= \{V \mid \dim(V) = m, \text{ simpel}\} / \sim \\ \mathcal{D}_m &= \mathcal{M}_m - \text{Simp}_m(A)\end{aligned}$$

En $\sim_*$ -ekvivalensklasse $[V] \in \mathcal{D}_m$ kan splitte opp i mange $\sim$ -ekvivalensklasser.

Moduler

Eksempel. $A = k[PSL_2] \simeq k\langle x, y \rangle / (x^2 - 1, y^3 - 1)$

1-dimensjonale representasjoner:

6 punkter, $x \mapsto \pm 1$, $y \mapsto \omega$, $\omega^3 = 1$

2-dimensjonale representasjoner: 3 komponenter (ved en av dem)

$$M_s : \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & -1 \end{pmatrix}$$

hvor $s \in k$, $\omega^3 = 1$, $\omega \neq 1$. For $s \neq 0, 2(\omega - 1)$ er modulene simple, mens M_0 og $M_{2(\omega-1)}$ gir indekomposable, ikke-simple moduler.

$$N_t : \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \omega \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

For $t \neq 0, 2(\omega - 1)$ er modulene simple og $N_t \simeq M_t$. Som over er de to eksepsjonelle modulene N_0 og $N_{2(\omega-1)}$ indekomposable og ikke-simple, men ikke isomorfe med noen M_s .

Traseringen

La $m \geq 2$ være et helt tall og la

$$(x_{ij}^k), \quad 0 \leq i, j \leq m, \quad 1 \leq k \leq n$$

være n generiske $m \times m$ -matriser. De generiske matrisene genererer en ring $R = R_{ij}^k$. La $\Gamma = k[x_{ij}^k]$ og $T = \{\text{tr}(Z) \in \Gamma \mid Z \in R\}$ være vektorrommet av alle traser til alle matriser i ringen generert av de generiske matrisene.

Artin-Procesis resultat: Vektorrommet T har en naturlig ring-struktur.

Gruppa $SL_n(k)$ virker på R og derfor på Γ . Artin-Procesi viser at T er lik invariantringen $T = \Gamma^{SL_n(k)}$.

Traseringen

Lukkede punkter $\rho : \Gamma \rightarrow k$ svarer til m -dimensjonale representasjoner av den frie algebraen $S = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. To representasjoner er $\sim_*$ -ekvivalente hvis og bare hvis de er like på traseringen.

Resultat: De lukkede punktene til traseringen T parametriserer semi-simple m -dimensjonale representasjoner av S .

La $A = S/I$. For en $m \times m$ -matrise M og et polynom $f \in I$ betrakter vi matrisen $f(M)$. La $tr(I)$ være det $SL_n(k)$ -invariante idealet i Γ , generert av trasene $tr(f(M))$ for alle $f \in I$ og $M \in R$. Traseringen til A er gitt ved $T/tr(I)$, men den er svært komplisert å regne ut.

Traseringen

Konklusjon: For en k -algebra A definerer (m) -traseringen en varietet $C_m(A)$ som inneholder $\text{Simp}_m(A)$ som en åpen mengde og hvor elementer i komplementet $\mathcal{D}_m$ svarer til $\sim_*$ -ekvivalensklasser av moduler, som igjen samler (muligens) mange $\sim$ -ekvivalensklasser.

Formaneks resultat: Det finnes et ideal $\mathcal{F} \subset T$ i traseringen, kalt **Formanek-senteret** slik at $\text{Simp}_m(A)$ er varieteten definert ved $T/\mathcal{F}$.

I klassisk forstand vil en indekomposabel modul ligge "uendelig nært" den assosierte semi-simple modulen. Det er derfor umulig å beskrive modulrommet av m -dimensjonale moduler med en algebraisk varietet. Den vil ikke ha nok lukkede punkter.

Traseringen

Eksempel. $A = k[x]/(x^2 - 1)$, (to disjunkte punkter).

Vi skal beregne 2-traseringen:

Traseringen til $S = k[x]$ er en plynring generert av trasen og determinanten til $\rho(x)$, dvs. $T = k[t, d]$. Vi har $I = (x^2 - 1)$ og

$$\begin{aligned} tr(I) &= (t^2 - 2d - 2, t^3 - 3td - t, t^4 - 4t^2d + 2d^2 - 2, \\ &\quad t^5 - 5t^3d + 5td^2 - t, \dots) \\ &= (t^2 - 2d - 2, td - t, d^2 - 1) \end{aligned}$$

Traseringen $T/tr(I) = k[t, d]/(t^2 - 2d - 2, td - t, d^2 - 1)$ har 3 lukkede punkter $(t, d) \mapsto (\pm 2, 1)$ og $(t, d) \mapsto (0, -1)$. Siden ringen er kommutativ svarer ingen av disse til simple moduler.

Traseringen

Resultat. La $S = k\langle x, y \rangle$. Da er (2-)-traseringen gitt ved

$$T = k[t_x, t_y, d_x, d_y, t_{xy}]$$

og Formanek-senteret er generert av

$$d_{[X,Y]} = -\frac{1}{4}((2t_{XY} - t_X t_Y)^2 - (t_X^2 - 4d_X)(t_Y^2 - 4d_Y))$$

der t_x står for trasen, og $d_x = \frac{1}{2}(t_x x - t_x^2)$ er determinanten.

Traseringen

Eksempel. $A = k[x, y]/(xy + yx)$

De 1-dimensjonale representasjonene er de to koordinataksene.

2-traseringen er gitt ved

$$k[t_x, t_y, d_x, d_y, t_{xy}]/(t_x d_y, t_y d_x, t_{xy})$$

Formaneksenteret:

$\det(xy - yx) = \det(2xy) = 4 \det(x) \det(y) \neq 0$ betyr at de simple modulene er gitt ved $t_x = t_y = t_{xy} = 0$ og $d_x, d_y \neq 0$. Altså planet tatt bort koordinataksene.

Tangentbunten til en (kommutativ) algebra

La $A = S/I$ kommutativ k -algebra med Kähler differensialer Ω_A og V en A -modul:

$$Der_k(A, V) = Hom_A(\Omega_A, V)$$

Ide: Erstatte A -modulen Ω_A med en k -algebra $Ph(A)$.

La $\underline{A} = A/k\text{-alg}$ være kategorien:

Objekter: ring-homomorfier $\kappa : A \rightarrow R$

Morfismer: $\psi : \kappa \rightarrow \kappa'$ som respekterer avbildningen fra A .

Funktoren $Der_k(A, -) : A/k\text{-alg} \rightarrow \underline{sets}$ er representerbar i denne kategorien og vi kaller det representerende objektet $\iota : A \rightarrow Ph(A)$, dvs. det er en naturlig isomorfi

$$Der_k(A, \kappa) \simeq Hom_{\underline{A}}(\iota, \kappa)$$

Tangentbunten

Sett $\kappa = \iota$. Den spesielle morfismen

$$1_{Ph(A)} \in Hom_{\underline{A}}(Ph(A), Ph(A))$$

produserer en universell derivasjon, $d : A \rightarrow Ph(A)$ slik at derivasjoner $D : A \rightarrow B$ på en naturlig måte svarer til ring-homomorfier $\phi_D : Ph(A) \rightarrow B$, og slik at $D = \phi_D \circ d$

Konstruksjonen er funktoriell, dvs. en k -algebra homomorfi $\phi : A \rightarrow B$ gir oss en naturlig homomorfi $\tilde{\phi} : Ph(A) \rightarrow Ph(B)$.

Merk at $Ph(A)$ ikke er kommutativ, selv om A er kommutativ.

Tangentbunter

La $\psi : F \rightarrow A$ være en surjektiv homomorfi, hvor F nå er en fri tensoralgebra på n generatorer, $x_1, \dots, x_n$. La $I = \ker(\psi)$ være det to-sidige idealet som genererer A . Da har vi

Proposisjon

$$Ph(A) = k\langle x_1, \dots, x_n dx_1, \dots, dx_n \rangle / (I, dI)$$

hvor dx_i er en formell variabel.

Eksempler

$$Ph(k[x]) = k\langle x, dx \rangle$$

$$Ph(k[x, y]) = k\langle x, y, dx, dy \rangle / ([x, y], [x, dy] - [y, dx])$$

Tangentbunten

Hvorfor tangentbunt?

Tangentbunten er karakterisert ved at seksjonene danner vektorfelt.

En seksjon av $\iota : A \rightarrow Ph(A)$ i kategorien $\underline{A}$ er en ring-homomorfi

$$\sigma : Ph(A) \rightarrow A \quad \text{slik at} \quad \sigma \circ \iota = Id_A$$

Dette svarer til en derivasjon $\sigma \circ d \in Der_k(A, A)$, dvs. et vektorfelt.

Tangentbunt

$A = S/I$, med $I = (f_1, \dots, f_m)$. Jacobi-matrisen

$$J(I) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Anta $rk(J(I))(\rho) = r$ for et lukket punkt $\rho : A \rightarrow k$, dvs. løsningsrommet til $J(I)(\rho) \cdot \underline{x} = 0$ har dimensjon $n - r$. La L_ρ være $n \times (n - r)$ -matrisen hvor kolonnene er lineært uavhengige løsninger av Jacobi-likningen, mao. $J(I)(\rho) \cdot L_\rho = 0$. Dersom rangen til Jacobi-matrisen er lokalt konstant kan vi utvide løsningen til en matrise L med koeffisienter i en lokalisering av A og vi får en avbildning

$$Ph(A_F)_{com} \longrightarrow A_F \otimes_k k[z_1, \dots, z_r]$$

Tangentbunter

Avbildningen er gitt som følger:

Anta at $J(I)$ har konstant rang i en åpen $U \subset X$. La $\{v_1, \dots, v_r\}$ være en basis for kjernen til $J(I)$, hvor $v_i = (v_{i,1}, \dots, v_{i,n})$.

Koordinatene til disse vektorene ligger i en lokalisering av A . Anta A er generert av $x_1, \dots, x_n$. For et element $f \in I$ har vi $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. La $dx_i \mapsto \sum_j v_{i,j} \otimes z_j$. Avbildningen er veldefinert siden for et hvert element $f \in A$,

$$\begin{aligned} df &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \mapsto \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_j v_{i,j} \otimes z_j \\ &= \sum_j \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} v_{i,j} \right) \otimes z_j = 0 \end{aligned}$$

og vi kan vise at den er surjektiv og injektiv.

Tangentbunten

Vi skal se på tangentbunten til $A = k[x]/(x^2 - 1)$. Vi har

$$Ph(A) = k\langle x, dx \rangle / (x^2 - 1, x dx + dx x)$$

2-traseringen til $Ph(A)$ er gitt ved (vi lar i det videre $dx = y$)

$$k[t_x, t_y, d_x, d_y, t_{xy}] / tr(x^2 - 1, xy + yx)$$

hvor

$$tr(x^2 - 1, xy + yx) = (t_x d_y, t_y d_x, t_{xy}, t_x^2 - 2d_x - 2, t_x d_x - t_x, d_x^2 - 1)$$

eller forenklet

$$k[t_x, d_x, d_y] / (t_x d_y, t_x^2 - 2d_x - 2, t_x d_x - t_x, d_x^2 - 1)$$

Dette gir for de lukkede punktene:

2 isolerte punkter; $(t_x, d_x, d_y) = (\pm 2, 1, 0)$

en 1-dimensjonal familie hvor $t_x = 0$, $d_x = -1$ og d_y kan velges fritt. Formanek-senteret er fortsatt gitt ved $d_x \cdot d_y$, dvs. for $d_y \neq 0$ er modulen simpel.

Tangentbunten

La V være modulen bestemt av $t_x = 0$, $d_x = -1$ og vilkårlig $d_y \neq 0$. Restriksjonen til A er gitt ved

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dvs. over paret $(1, -1)$ finnes en 1-dimensjonal familie av "tangenter".

For de to modulene gitt ved $(t_x, d_x, d_y) = (\pm 2, 1, 0)$ har vi

$$x \mapsto \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Over parene $\pm(1, 1)$ er $t_y = d_y = 0$ og vi har ikke noen tangenter.