

En av dem er alles venn

April 9, 2013

Antakelse:

Vi antar at for en gruppe med mennesker så er det slik at hvert par har nøyaktig *en* felles venn.

Påstand:

Da finnes det ett menneske i gruppa som er venner med alle.

OBS! FOR å følge resonnementene under er det lurt å lage en tegning. Skriv opp medlemmene av gruppa, representert ved bokstaver, på et papirark, og trekk en linje mellom to bokstaver dersom de to medlemmene er venner.

Husk også hele tiden på antakelsen om at et par har nøyaktig *en* felles venn. Ikke ingen og ikke to eller tre, men akkurat *en*.

For en gruppe med 4 medlemmer: Anta at vi har en gruppe med fire medlemmer, vi kaller dem A , B , C og D . A og B har en felles venn som vi lar være C . Dersom B og D har A som sin felles venn, så er A venn med alle. Dersom B og D har C som sin felles venn, så vil C være venn med alle. Påstanden er dermed bevist i dette tilfellet.

For en gruppe med 5 medlemmer: Dersom vi har fem medlemmer i gruppa blir det hele litt vanskeligere. Vi kaller dem A , B , C , D og E . Igjen lar vi C være venn med A og B . Dersom D og E har C som felles venn, vil C være venn med alle. Dersom D og E har A som felles venn, vil A være venn med C , D og E . Hvis A ikke skal være alles venn, kan ikke A og B være venner. Det betyr at B og C sin felles venn må være enten D eller E , la oss si D . Men da ville D og C være venner med både A og B . Det går ikke, siden hvert par skal ha nøyaktig en felles venn, og ikke flere. Altså må A være alles venn.

Formelt bevis i det generelle tilfellet, for en gruppe med n medlemmer, $n \geq 6$:

1. Vi begynner med å vise at to medlemmer som ikke er venner med hverandre, må ha like mange venner.

La A og B være to medlemmer i gruppa som ikke er venner. For hver venn C av A kan vi finne nøyaktig en venn av B ved å plukke ut den felles vennen til

B og C . Tilsvarende for vennene til B . Det betyr at A og B må ha nøyaktig like mange venner.

2. Så viser vi at påstanden i punkt 1 også gjelder for to venner, med andre ord at alle medlemmene må ha like mange venner.

Dersom A og B er venner, og det er flere enn 3 medlemmer av gruppa, så kan vi alltid finne minst ett medlem C som enten ikke er venn med A eller ikke er venn med B . Så anta at C ikke er venn med A . Nå har vi to muligheter, enten er C ikke venn med B , eller C er venn med B . I et første tilfellet vil C ha like mange venner som A , siden de ikke er venner, og av samme grunn B vil ha like mange venner som C . Følgelig vil A ha like mange venner som B . I det andre tilfellet, der B er venn med C , kan vi helt sikkert finne et medlem D som ikke både er venner med A og C , siden B allerede er venner med A og C . D har dermed like mange venner som enten A eller C , men disse er ikke venner og har derfor like mange venner. Så A , C og D har like mange venner. Siden vi har antatt at B ikke er venner med alle, kan vi også anta at D ikke er venner med B . Dermed vil B ha like mange venner som D , og A og B har like mange venner. Altså har alle nøyaktig like mange venner.

3. Nå kommer et smart trekk. Vi introduserer begrepet vennsforbindelse, og teller hvor mange slike forbindelser vi finner i gruppa. Dette kan vi gjøre på to forskjellige måter, noe som gir oss en sammenheng mellom antall medlemmer og antall venner hvert medlem har. En liten teknisk ting her, antall par i en mengde med n elementer er gitt ved formelen $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$.

Anta at det er n medlemmer i gruppa og at alle har k venner. Vi sier at tre medlemmer utgjør en **vennsforbindelse via** A dersom A er venner med de to andre. Vi kan telle opp antall vennsforbindelser på to forskjellige måter. På den ene siden finnes det akkurat like mange vennsforbindelser som det finnes par av medlemmer, nemlig $\binom{n}{2}$. På den annen side finnes det for hvert medlem $\binom{k}{2}$ vennsforbindelser som går via akkurat dette medlemmet. Med i alt n medlemmer gir det $n\binom{k}{2}$ vennsforbindelser. Setter vi disse to tallene til å være like får vi $n = k^2 - k + 1$.

4. I dette punktet systematiserer vi vennskap og vennsforbindelser i tabeller. Dermed får vi oversatt all kunnskap vi har om vennskap og -forbindelser til det matematiske begrepet matrise. Dette er matematikernes favorittøvelse, for nå kommer den matematiske verktøykassa til å åpne seg på vidt gap ...:

Neste skritt er å sette opp **vennskapstabellen** eller **vennskapsmatrisen**. Tabellen har like mange rader og kolonner, en for hvert medlem i gruppa. Hver rute i tabellen svarer til to medlemmer i gruppa, ett gitt ved raden og ett gitt ved kolonnen. Dersom de to medlemmene er venner skriver vi et 1-tall, hvis ikke skriver vi 0. Ingen av medlemmene er venner med seg selv. Dette illustrerer vi med at tabellen har 0-er på **diagonalen**, dvs. tabellplasser der rad og kolonne representerer samme medlem. Vi kaller denne matrisen for **V**. Tilsvarende kan vi lage en tabell for alle vennsforbindelsene. Denne tabellen kaller vi **V²**, og den består av 1-ere på alle plasser (siden det er nøyaktig en vennsforbindelse mellom to medlemmer), unntatt på diagonalen, der vi skriver $k-1$. (Antallet vennsforbindelser via A fra en venn av A tilbake til samme venn er $k-1$)

5. I dette punktet plukker en matematiker bare opp det riktige verktøyet fra verktøykassa. Veldig enkelt når man kan det, dessverre uforståelig for utenforstående:

Så bruker vi litt lineær algebra. Matrisen $\mathbf{V}^2$ har egenverdier $k - 1$ med multiplisitet $n - 1$ og $n + k - 1 = k^2$ med multiplisitet 1. Siden $\mathbf{V}^2$ faktisk er kvadratet av matrisen $\mathbf{V}$, så vil $\mathbf{V}$ ha egenverdier $\pm\sqrt{k - 1}$ med multiplisitet $n - 1$ og $\pm k$ med multiplisitet 1. Sporet til $\mathbf{V}$ er 0 siden alle diagonalelementene er 0, og summen av egenverdiene vil derfor også være 0. Det betyr at det finnes et helt tall t slik at $t\sqrt{k - 1} = k$. Men da må vi ha $k = r^2 + 1$ og $tr = k$ for et helt tall r . Setter vi dette sammen får vi $r^2 - tr + 1 = 0$ som har som sin eneste heltallsløsning $t = 2$, $r = 1$ og dermed $k = 2$ og $n = 2^2 - 2 + 1 = 3$.

Alternativt punkt 5. For de som datt av under punkt 5 kan vi informere om at argumentet endte opp med at eneste muligheten for å få det hele til å gå opp er at vi har 3 medlemmer av gruppa og alle er venner med 2 andre, noe som jo betyr at alle er venner med alle.

6. Konklusjon: **MOTSIGELSE!!**:

Punkt 5 motsier antakelsen om at ingen skulle være alles venn. Med andre ord, antagelsen om at det ikke finnes noen som er alles venn må være gal.

7. *QUOD ERAT DEMONSTRANDUM*, som betyr: hvilket skulle bevise, og står her fordi punktene 1-6 gir oss et formelt bevis for påstanden vi startet med. Dette beviset ble først gitt av Erdős og medforfattere, og publisert i 1966.

Med vennlig hilsen
Arne B.