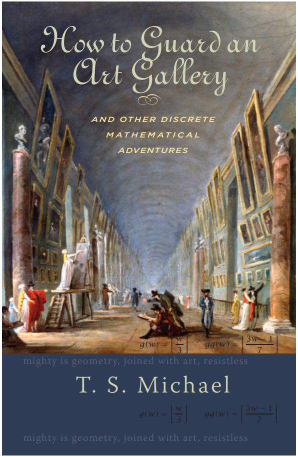
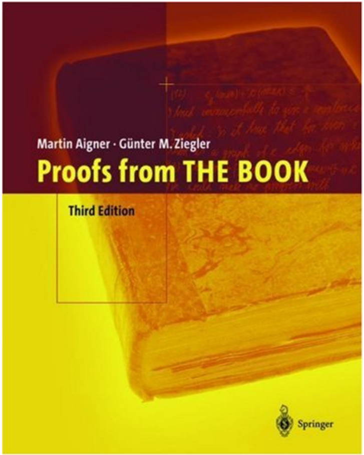
Nytt Munchmuseum: et SKRIK etter kombinatorikk og geometri!!

Geir Dahl

Matematisk inst., Universitetet i Oslo

Faglig-pedagogisk dag, UiO, 2013


How to Guard an Art Gallery
AND OTHER DISCRETE MATHEMATICAL ADVENTURES
$g(w) = \left\lfloor \frac{w}{3} \right\rfloor$ $gg(w) = \left\lfloor \frac{3w-1}{7} \right\rfloor$
mighty is geometry, joined with art, resistless
T. S. Michael
$g(w) = \left\lfloor \frac{w}{3} \right\rfloor$ $gg(w) = \left\lfloor \frac{3w-1}{7} \right\rfloor$
mighty is geometry, joined with art, resistless


Martin Aigner · Günter M. Ziegler
Proofs from THE BOOK
Third Edition
Springer

- arkitektur og geometri

Kombinatorikk

- $$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
- $=$ antall k-kombinasjoner i en mengde med n elementer, uordnet utvalg av k elementer
- Blaise Pascal (1623 - 1662)
- For alle heltall n og k med $1 \leq k \leq n-1$ holder

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Pascal's trekant

Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1653.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

- Binomialteoremet:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

- Fordi:

$$(x+y)(x+y)(x+y)(x+y) = x^4 + 4x^3y + \dots$$

- Sannsynlighet: inklusjon-eksklusjons prinsippet

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\ P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) \\ &\quad + \textstyle\sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots \end{aligned}$$

- Men kombinatorikk er mye mer .....

Munch og kombinatorikk: Og spørsmålet er:

Hvor mange vakter trenger man for å vokte alle veggene?

NB:

- Hver vakt står stille!!
- Men kan snu seg.

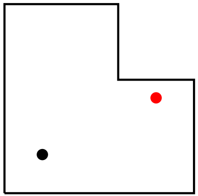


Figure : Typisk L-museum

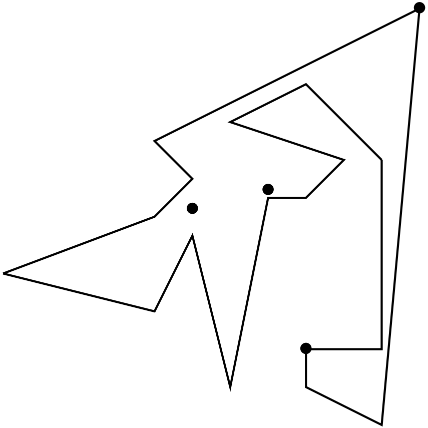


Figure : Kreativt museum

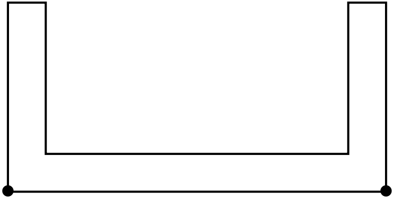


Figure : U-museum

- Hvorfor må vi ha (minst) 2 vakter?

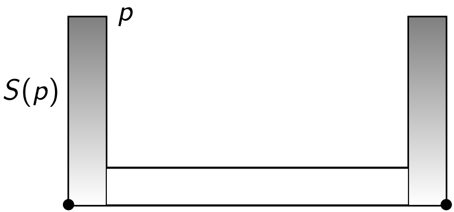


Figure : U-museum

- punkt p, synbarhetsområde $S(p)$

Lavt budsjett!

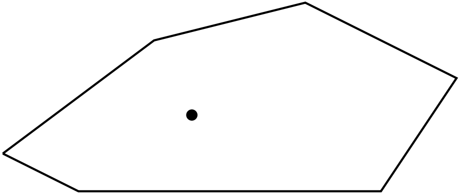


Figure : Konveks-museum

Høyt budsjett!

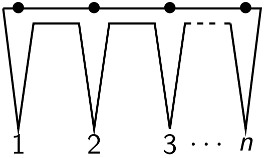


Figure : Kam-museum

- trenger n vakter pga. spissene
- har $3n$ vegger
- vakter/vegger=1/3

Altså: Hvis arkitektene får herje fritt, kan det bli mange vakter!

???????????????

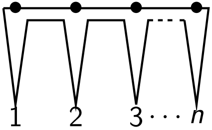


Figure : Kam-museum

- vakter/vegger=1/3
- HVOR ILLE KAN DET BLI????

Theorem

For ethvert museum med n vegger vil man trenge høyst $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ vakter.

Skal bevise dette.

Bevis

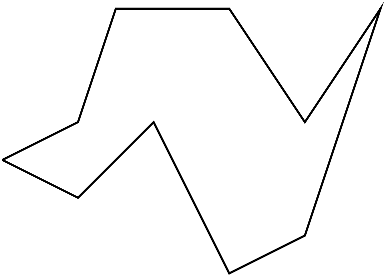


Figure : Munch-museum, $n = 10$.

Bevis I: triangulering

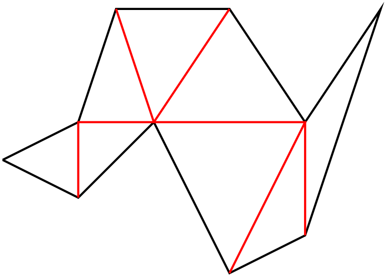
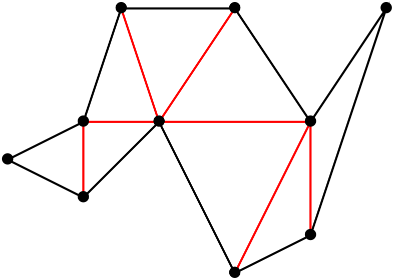


Figure : Munch-museum, $n = 10$.

Bevis II: en graf

Har nå fått en graf fra trianguleringen.



Bevis II: farvelegging

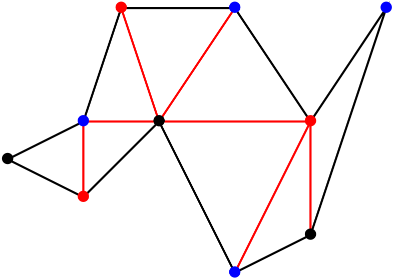


Figure : Munch-museum, $n = 10$.

- Nok med 3 farver
- Fins en farve som er på høyst $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ punkter

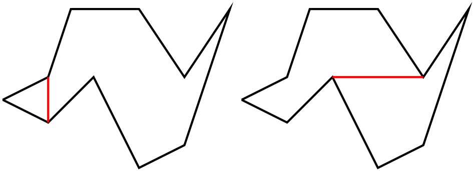
Bevis III: Går dette alltid? Jepp: induksjonsbevis

Triangulering:

- Velg et hjørne med vinkel $< 180^\circ$
- Lag linje mellom nabohjørnene
- Gjenta dette.

3-farvelegging av den triangulerte grafen:

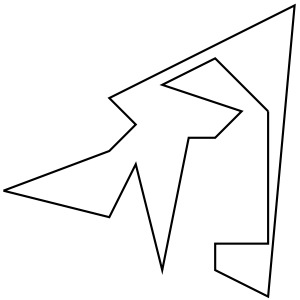
- Velg en diagonal; den deler grafen i to deler
- Ved induksjon kan hver del farves med 3 farver, og ved omdøping av farver stemmer disse overens på diagonalen.



En variant

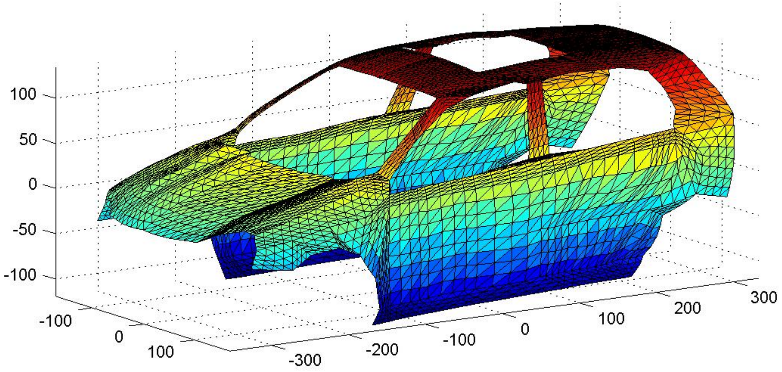
Nye regler: Hvor mange vakter?

- Hver vakt står ved en vegg og kan bevege seg langs denne
- Og kan snu seg.



Uløst problem! Andre varianter finnes også.

Triangulering anvendelse



Kombinatorikk som forskningsfelt

Stor aktivitet. Flere problemstillinger motivert av anvendelser, f.eks. digitale verden, nettverk.

Noen områder:

- grafteori
- farvelegging
- partielt ordnede mengder, latticer, ekstremal mengeteori
- flyt i nettverk, optimering
- enumerativ kombinatorikk, telleproblemer
- $(0,1)$-matriser
- kombinatorisk matriseteori, spektral grafteori
- koder og design
- Latinske kvadrater
- ...

Lese mer?

- M. Aigner, G. Ziegler, Proofs from THE BOOK, Springer, 4.th ed., 2010.
- R.A. Brualdi, *Introductory Combinatorics*, Prentice-Hall, 1999.
- T.S. Michael, *How to Guard an Art Gallery and Other Discrete Mathematical Adventures*, The John Hopkins University Press, 2009.