

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Ny og utsatt eksamen i: MEK1100 — Feltteori og vektoranalyse

Eksamensdag: torsdag 13. august 2026

Tid for eksamen: 09.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Formelark, 2 sider

Tillatte hjelpemidler: K. Rottmann: Matematiske Formelsamlung.
Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Det er 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1

En karusell har hester som går opp og ned samtidig som karusellen roterer:



De som sitter på hestene beveger seg i et tidsavhengig hastighetsfelt

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{k}a\omega \cos(\omega t)$$

hvor $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$ er vinkelhastigheten til karusellen og $\mathbf{k}$ er en enhetsvektor som peker oppover. Hestenes vertikale bevegelse er karakterisert ved amplituden a og vinkelfarten ω . Posisjonsvektor er angitt ved $\mathbf{r}$, og t er tid.

I horisontal retning kan vi enten bruke kartesiske koordinater $\{x, y\}$ med enhetskoordinatvektorer $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, eller vi kan bruke polare koordinater $\{R, \theta\}$ med enhetskoordinatvektorer $\{\mathbf{i}_R, \mathbf{i}_\theta\}$, hvor $x = R \cos \theta$ og $y = R \sin \theta$. I vertikal retning bruker vi koordinaten z med enhetskoordinatvektor $\mathbf{k}$ som peker oppover.

(Fortsettes på side 2.)

a

Gitt at $\mathbf{v}$ er en hastighet, og at R er en lengde, og at t er en tid, bestem de fysiske dimensjonene til Ω og ω og a .

Gitt at hestene beveger seg framover, hva er fortegnet til Ω ?

b

Regn ut divergensen og virvlinga til $\mathbf{v}$.

c

Undersøk om $\mathbf{v}$ kan representeres ved et skalarpotensial ϕ , og finn i så et mulig skalarpotensial.

Undersøk om $\mathbf{v}$ kan representeres ved en skalar strømfunksjon ψ , og finn i så fall en mulig skalar strømfunksjon.

d

Finn strømlinjene til $\mathbf{v}$ ved tiden $t = 0$. Forklar hva slags kurver dette er og skisser dem i en figur.

e

Finn banen $\mathbf{r}(t)$ til en person som starter i posisjon $\mathbf{r}(0) = b\mathbf{i}$ ved tiden $t = 0$. Forklar hva slags kurve dette er og skisser den i en figur.

f

Finn partikkelakselerasjonen i hastighetsfeltet.

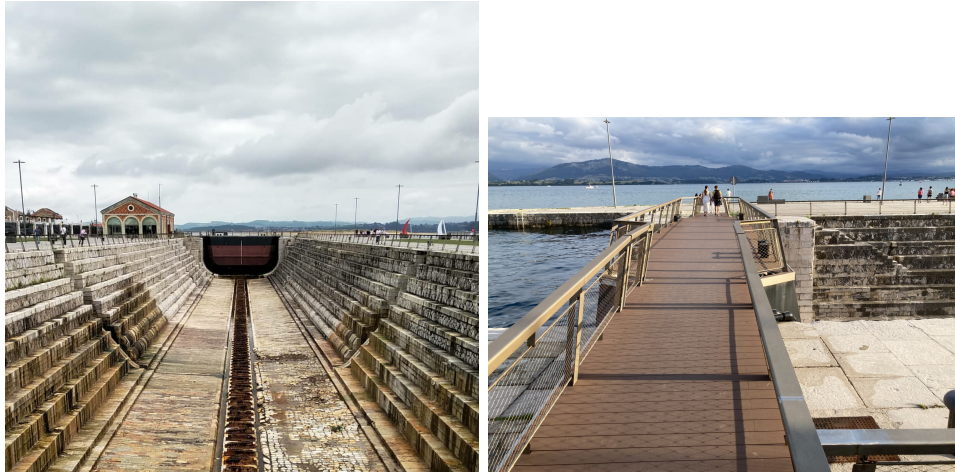
g

Finn sirkulasjonen til $\mathbf{v}$ rundt den lukkede kurven $\{R = b \text{ og } z = 1\}$. Gjør dette både direkte som et kurveintegral og som et flateintegral ved hjelp av en passende integralsats. Hva heter integralsatsen?

Oppgave 2

På bildene ser vi en tørrdokk (en dokk som kan tømmes for vann slik at et skip kan bli liggende tørt og en kan komme til de delene av skipet som vanligvis er under vann). Bildet til venstre er tatt langs tørrdokken og viser porten lengst bort. Bildet til høyre er tatt over porten på tvers av tørrdokken og viser at det er vann på utsiden og luft på innsiden av porten.

(Fortsettes på side 3.)



I denne oppgaven antar vi at både vann og luft står i ro, og at lufttrykket er konstant lik p_0 . Vi lar x -aksen peke langs lengderetningen til tørrdokken, med $x = 0$ ved porten. Vi lar z -aksen peke oppover, med $z = 0$ ved den horisontale likevektsflaten mellom vann og luft. Vi lar y -aksen gå på tvers av tørrdokken. For å gjøre det enkelt tenker vi oss at tørrdokken har lengde L i x -retning, og at porten er rektangulær med høyde H i z -retning og bredde B i y -retning.

a

I denne deloppgaven skal vi utlede formelen for hydrostatisk trykk på to forskjellige måter:

Gjør rede for Eulers likning for friksjonsfritt vann. Vis hvordan du kan utlede formelen for hydrostatisk trykk direkte fra Eulers likning.

Gjør rede for Bernoullis likning for stasjonær og friksjonsfri strømning. Vis hvordan du kan utlede formelen for hydrostatisk trykk direkte fra Bernoullis likning.

b

Regn ut hvor stor trykkraft som virker på porten ved flateintegral av trykket over porten.

c

Gjør rede for Gauss integralsats i sin opprinnelige “vanlige” form.

Gjør rede for hvordan Gauss integralsats kan omformuleres slik at den hydrostatiske trykkraften på et legeme kan beregnes ved et volumintegral av gradienten til det hydrostatiske trykket.

Forklar hvorfor og vis at vi kan regne ut den hydrostatiske trykkraften på porten som et volumintegral over tørrdokken ved hjelp av det fiktive trykkfeltet

$$p = p_0 - \rho g z \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

hvor ρ er tettheten til vann og g er tyngdens akselerasjon.