Bølger i en slukvirvel: Navier–Stokes likninger, Millenniumprisproblem og Abelprisen

Karsten Trulsen

Seksjon for Mekanikk, Matematisk institutt, UiO

2 november 2023

Først litt reklame . . .

Lektorprogrammet tilbyr:

Master i Fluidmekanikk

Så langt er 6 kandidater uteksaminert

Punktmasser, faste stoffer og fluider

Newton's andre lov (Fysikk på VGS):

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

Newtonsk mekanikk kommer i diverse varianter:

- Anvendt på punktmasser
- Anvendt på faststoffer
- Anvendt på fluider

Punktmasser: få partikler som beveger seg fritt omkring

Faststoff: mange partikler med faste plasser i forhold til hverandre

Fluid: mange partikler som beveger seg fritt omkring

Væske: fluid som vanskelig lar seg komprimere, avgrenset volum

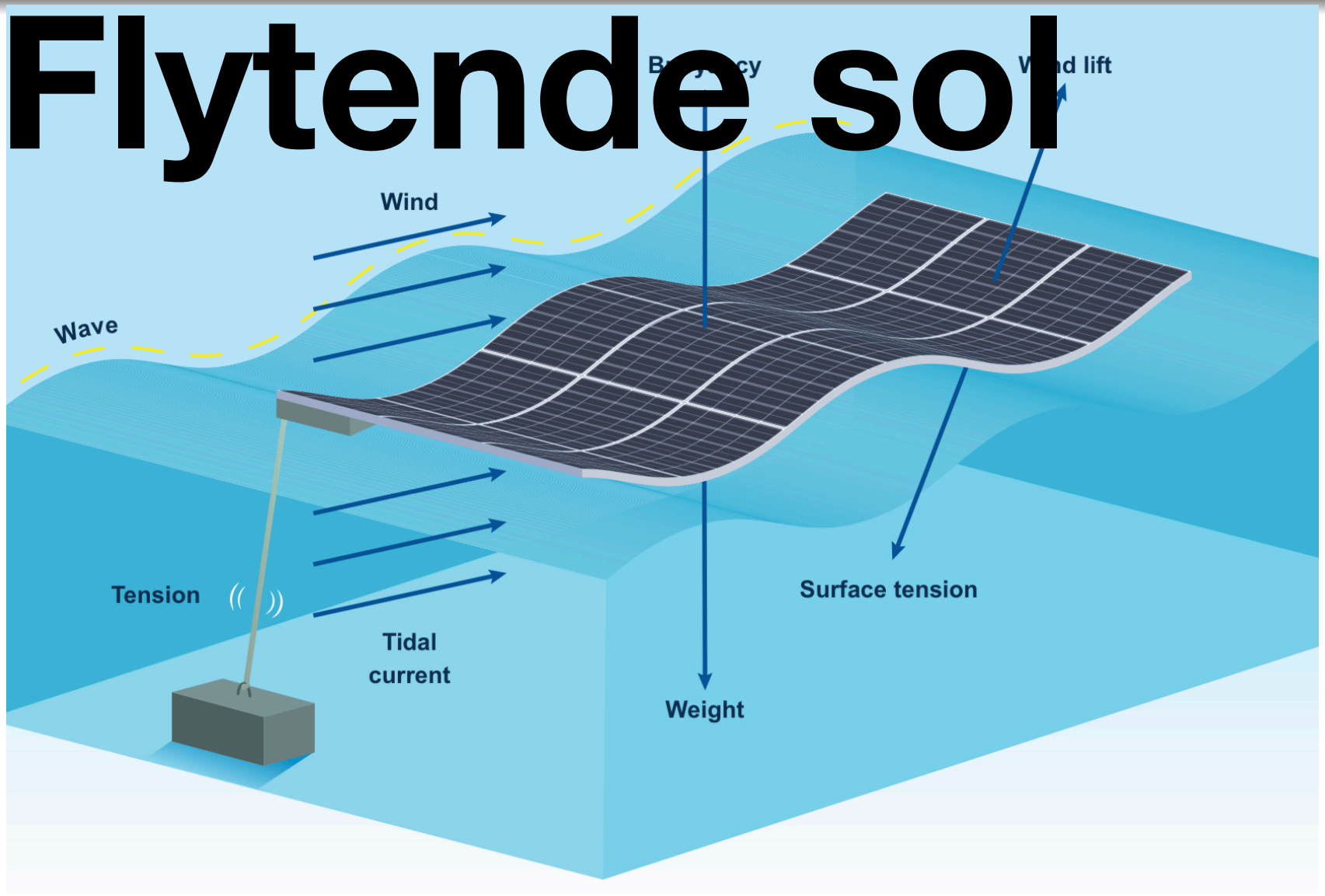
Gass: fluid som lett lar seg komprimere, ikke avgrenset volum

Hva driver vi med i Fluidmekanikk?

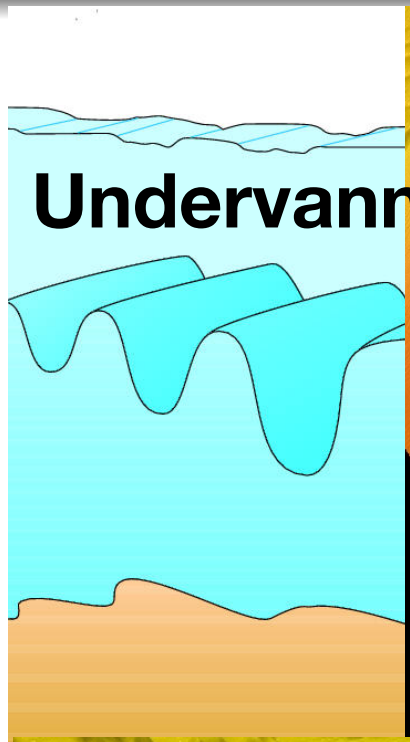
Flytende vindmøller



Flytende sol

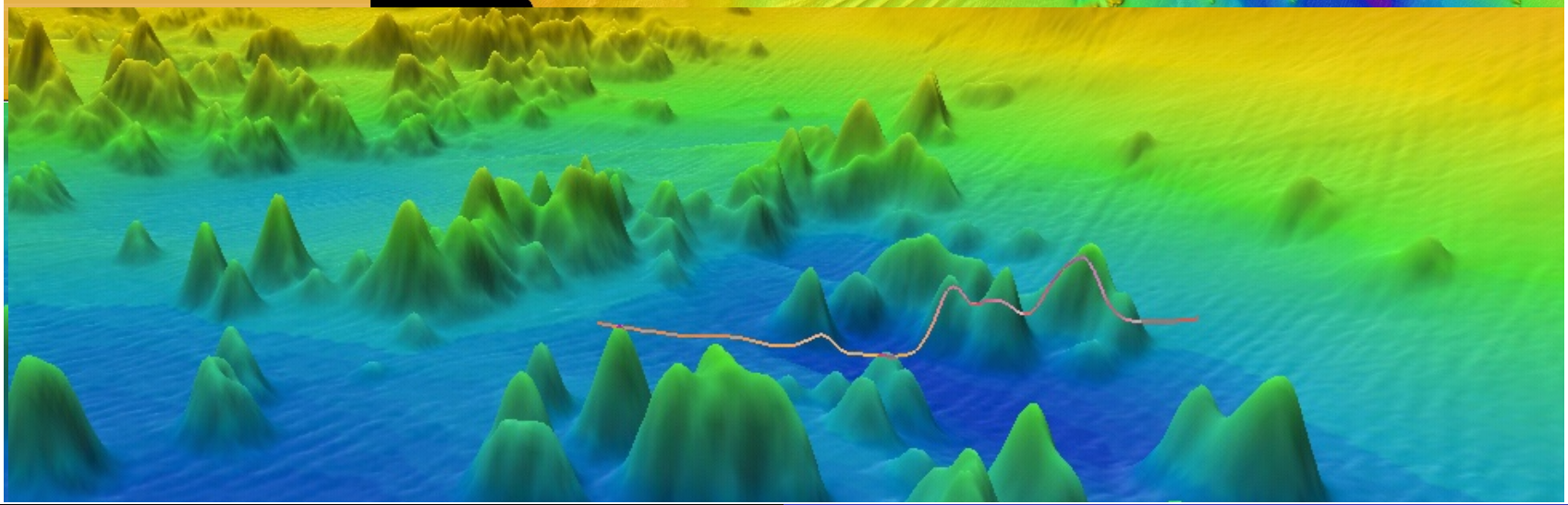


Ill: World Bank Group/ESMAP/SERIS

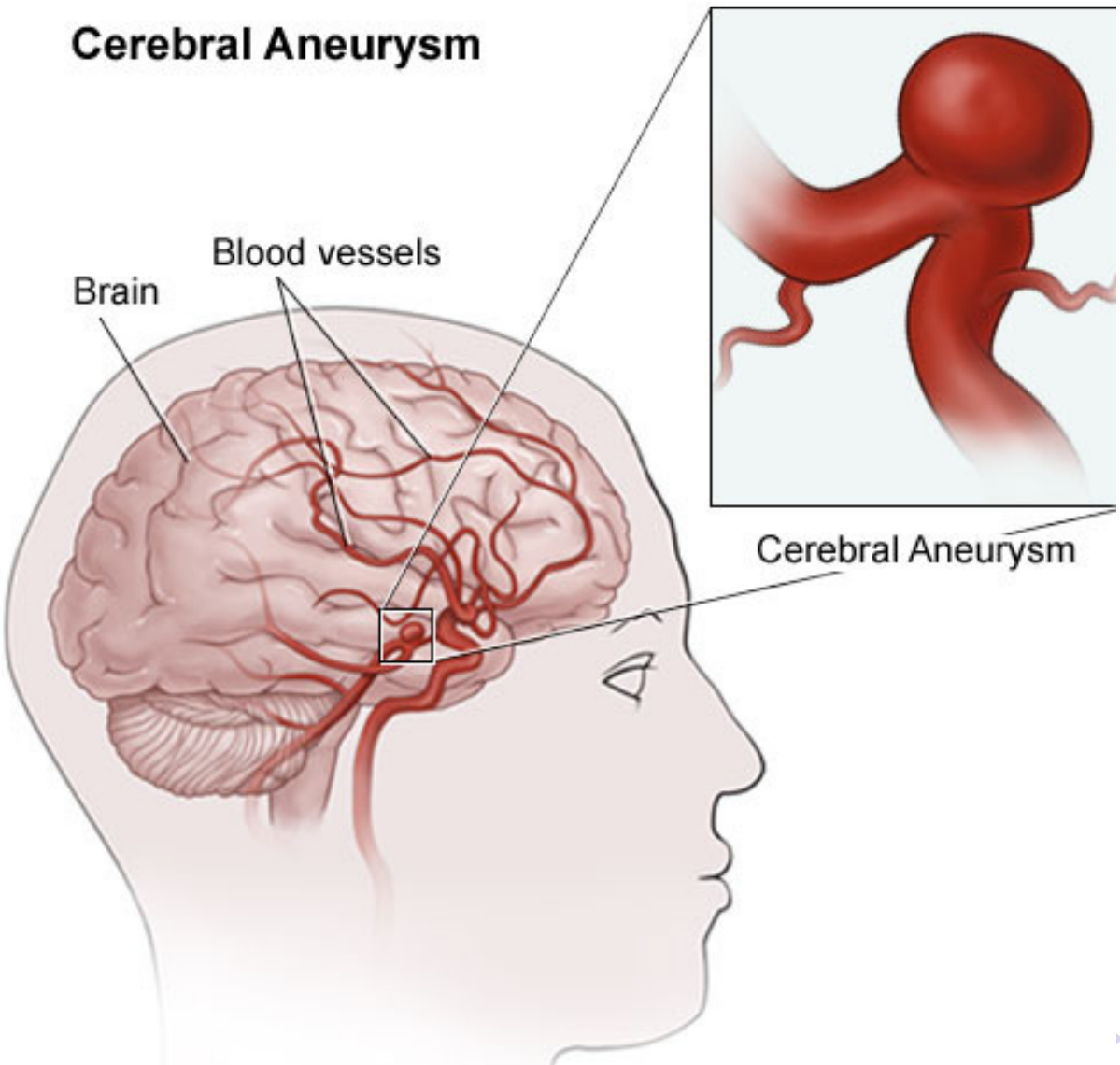


og korallrev





Biomekanikk og medisinsk mekanikk



Mekanikk i idrettens tjeneste



Fluidmekanikk







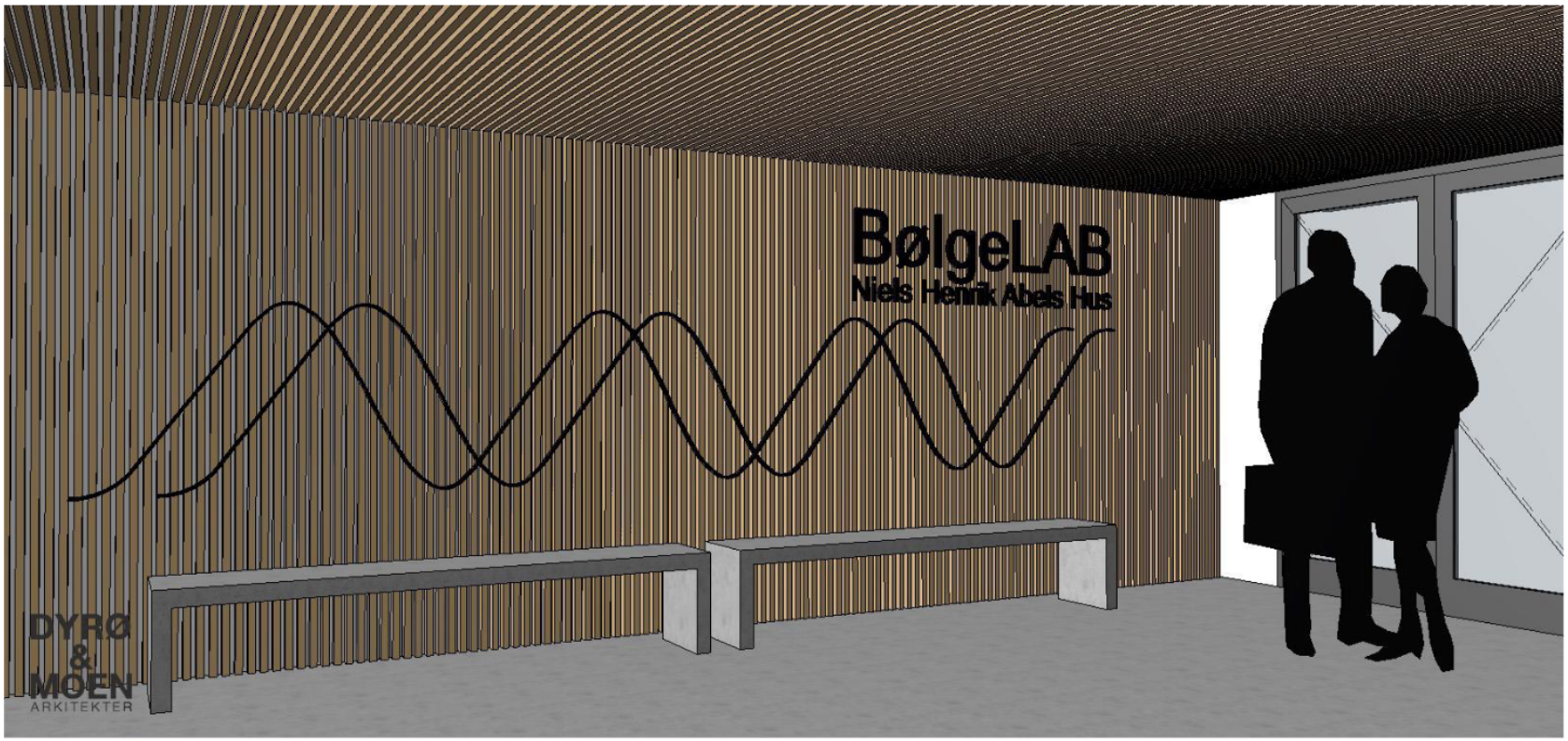
Laboratoriearbeid



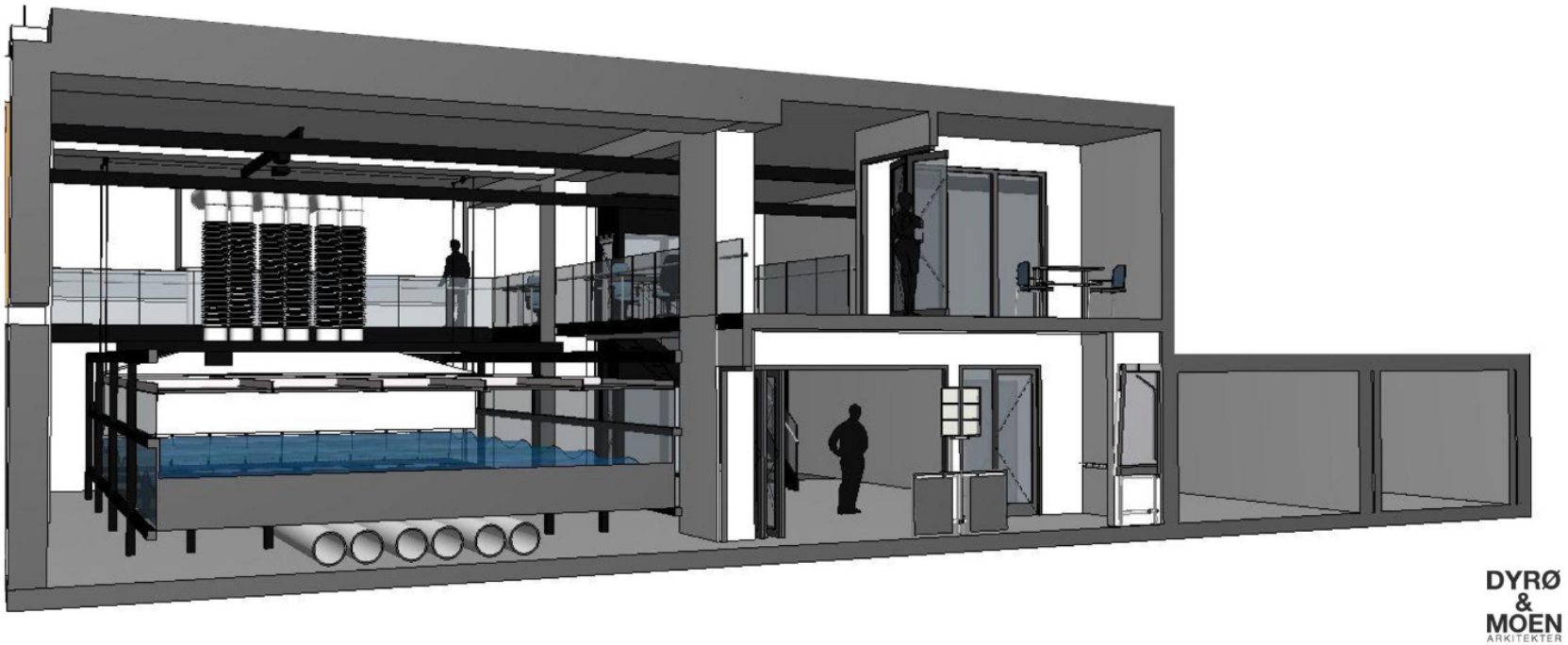
Laboratoriearbeid



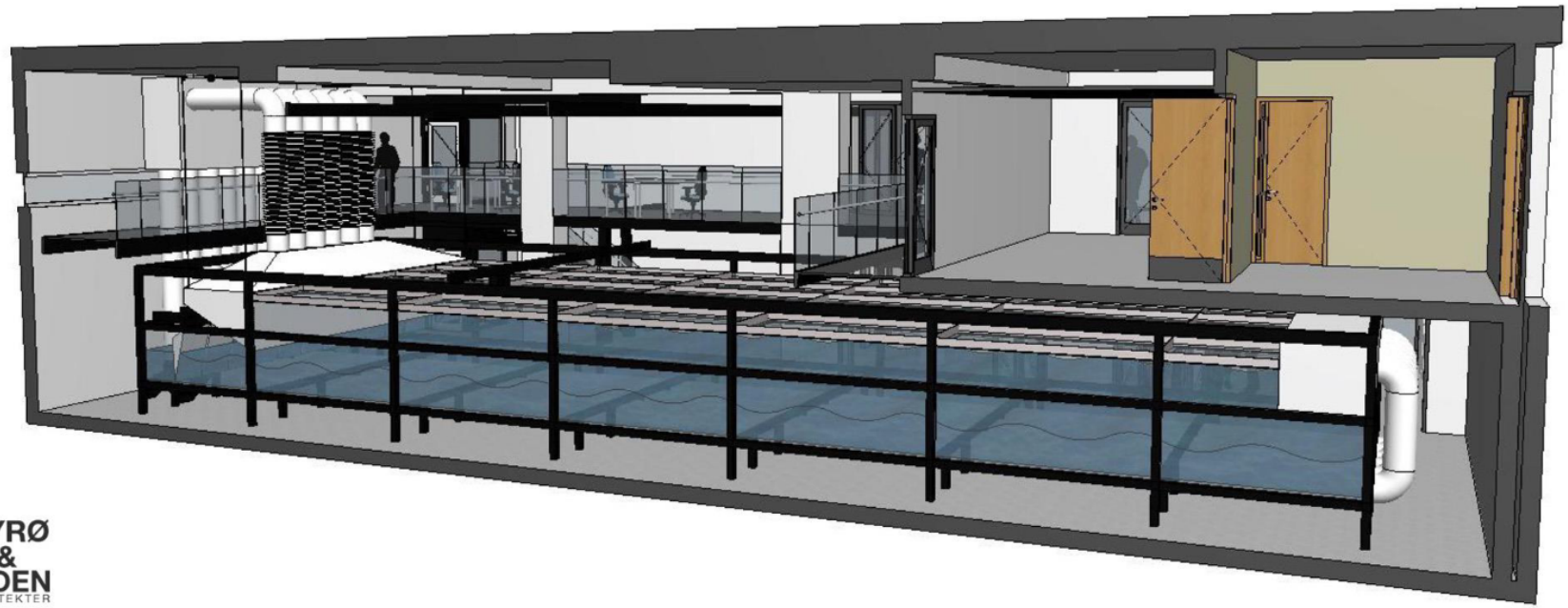
Vi får snart et nytt laboratorium med bølgebasseng



Vi får snart et nytt laboratorium med bølgebasseng



Vi får snart et nytt laboratorium med bølgebasseng



DYRØ & MOEN ARKITEKTER

Bachelor + Master eller Lektor

Bachelor: To programmer med hver sin studieretning i mekanikk:

- Matematikk: Teoretisk og anvendt matematikk: Fluidmekanikk
- Fysikk og astronomi: Fluidmekanikk

Master: To programmer med tre studieretninger i mekankk:

- Programmet Fluidmekanikk
  To studieretninger:
  - BMM Biomekanikk og medisinsk mekanikk
  - EMS Energi, miljø og sikkerhet
- Programmet Computational Science
  Studieretning:
  - CS:Mekanikk

Lektorprogrammet: Integrert 5-årig løp med Master i mekanikk:
Lektorprogrammet studieretning Realfag: Fluidmekanikk

Hvorfor studere Fluidmekanikk?

- Du liker å studere konkrete, synlige og følbare fenomener
- Ideell blanding av matematikk og fysikk
- Skrikende behov for denne typen kompetanse hos norsk industri

. . . ferdig med reklame

Fluidmekanikk for å beskrive bølger i en slukvirvel

Inkompressibelt fluid = væske

Fluid beveger seg med hastighet $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ i ethvert punkt $\boldsymbol{x}$ og tid t.

Inkompressibelt fluid (væske)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

Tetthet = masse per volum

$$\rho = m/V$$

Kraft per volum

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{F}/V$$

Newton's andre lov uttrykkes:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}/\rho$$

Akselerasjon

Newton's andre lov:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}/\rho$$

Lokal akselerasjon

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$$

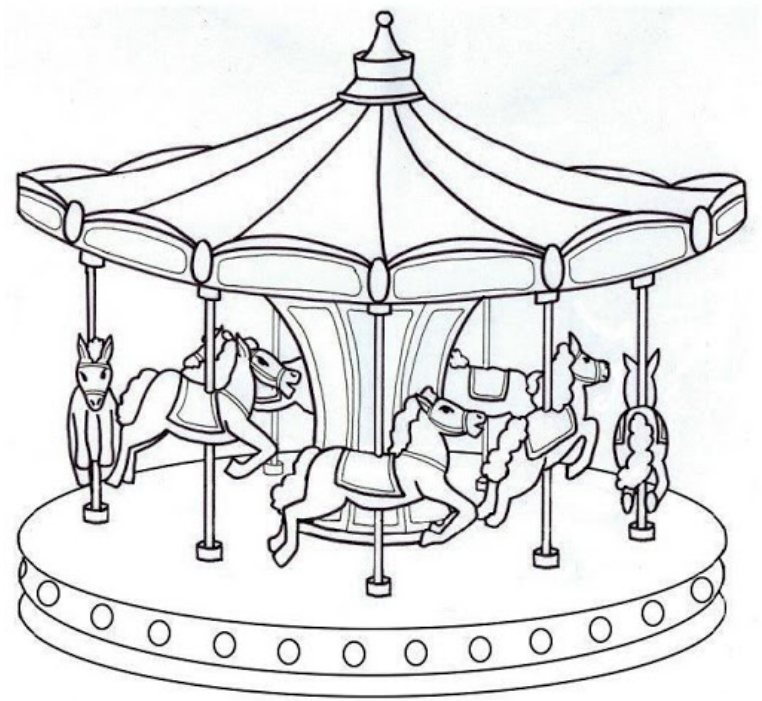
Konvektiv akselerasjon

$$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}$$

Total akselerasjon

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}$$

På en karusell opplever du konvektiv akselerasjon



$$\boldsymbol{u} = U(r)\boldsymbol{i}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{U^2}{r}\boldsymbol{i}_r$$

Krefter

Newton's andre lov:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}/\rho$$

Krefter på grunn av tyngdekraft

$$\boldsymbol{g}$$

Krefter på grunn av trykkforskjeller

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p$$

Krefter på grunn av viskositet

$$\nu\nabla^2\boldsymbol{u}$$

Da har vi formulert Newton's 2.lov som enten Euler's likning eller Navier–Stokes likning

Euler's likning — uten viskositet

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g}$$

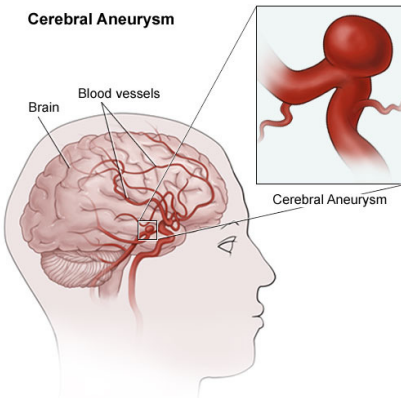
Navier–Stokes likning — med viskositet

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} + \nu\nabla^2\boldsymbol{u}$$

Typiske problemer i fluidmekanikk











Eksempel på fri rand problem:

Finn grenseflaten mellom vann og luft

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}$$

Løsning: Hydrostatisk trykk

$$p(z) = p_0 - \rho g z$$

Dersom trykket i vannet blir mindre enn lufttrykket, så skyver lufta bort vannet!

Sirkulær bevegelse gir sentripetalakselerasjon

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}$$

Eksempel: Konstant sirkulær bevegelse med radius r og vinkel θ

$$\boldsymbol{u} = U(r)\boldsymbol{i}_\theta$$

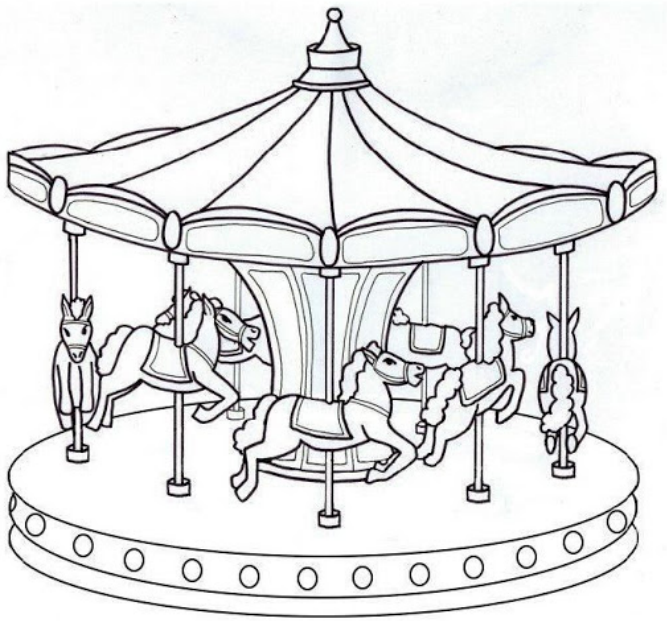
Sentripetalakselerasjon

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{U^2}{r}\boldsymbol{i}_r$$

Denne akselerasjonen kan for eksempel skaffes av en trykk-gradient

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}$$

Hva hindrer deg å bli kastet ut fra en karusell?



Eksempel på nesten fri rand problem: Slukvirvel

Finn grenseflaten mellom vann og luft i en slukvirvel

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{u} = U(r)\boldsymbol{i}_\theta$$

(r horisontal radius, θ horisontal vinkel, tyngdekraft vertikal)

Løsning

$$p(r, z) = \rho \int \frac{U^2(r)}{r}\,\mathrm{d}r - \rho g z + p_0$$

Trykket avtar innover mot sentrum av rotasjonen.

Dersom trykket i vannet blir mindre enn lufttrykket, så skyver lufta bort vannet,

da får vi en slukvirvel!

Kunstinstallasjon på Kistefos — Masteroppgaven til Martine Falch Løfsgaard



Video 1 Video 2 Video 3 Video 4 Video 5 Video 6

Observasjoner fra eksperimentene

1. Slukvirvelen preges av bølgeforstyrrelser
Oppførselen varierer i tid. Ta med tidsderivert (lokalakselerasjon):

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}$$

2. Slukvirvelen forsvinner om den ikke vedlikeholdes
Vannmolekylene gnir mot hverandre. Ta med det viskøse leddet:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}$$

Observasjoner fra eksperimentene

3. Bølgeforstyrrelsene er så korte at vi må ta hensyn til overflatespenning

Overflatespenningen opptrer ikke i Navier–Stokes likning, men derimot i overflatekravet som vi så langt ikke har formulert ...

4. Vannet fordamper

...

Fysisk realitet vs. matematisk idealisme

Modellen er kun så god som den klarer å beskrive den fysiske situasjonen.

Er løsingen av Navier–Stokes likning entydig?

Kan Navier–Stokes likning utvikle singulariteter?

Matematikere snakker om singulariteter på mengder med mål null, et vannmolekyl er uendelig mye større . . .

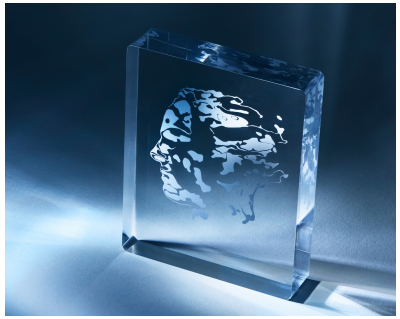
Trenger vi i så fall en kvantemekanisk beskrivelse av vannmolekylene?

Millennium-pris-problemene

Poincaré-formodningen	3-dimensjonale lukkede og enkelt-sammenhengende topologiske mangfoldigheter er homeomorfe med 3-sfæren.	Løst (Perelman)
Birch-Swinnerton-Dyver-formodningen	Om antall rasjonale punkter på elliptiske kurver.	Uløst
Hodge-formodningen	Hodge-sykler er rasjonale lineære kombinasjoner av algebraiske sykler.	Uløst
Navier-Stokes-likningene	Eksistens av glatte løsninger.	Uløst
P versus NP	$P \neq NP$	Uløst
Riemann-hypotesen	Realdelen til ikke-trivielle nullpunkter for Riemanns zeta-funksjon.	Uløst
Yang-Mills-teori	Eksistens i $\mathbb{R}^4$, med positivt massegap	Uløst



Det Norske Videnskaps-Akademi og Abelprisen





1898: Sophus Lie med det første forslaget om en Abelpris

1902: Carl Størmer og Ludvig Sylow utarbeider statutter for prisen, med støtte fra Kong Oscar II

1905: Unionsoppløsningen torpederer planene; Fridtjof Nansen skriver: "*Den af salig Kong Oscar lovede Abelpris for til himmels med unionen*"

2000: Abel-biograf Arild Stubhaug og konsernsjef i Telenor Tormod Hermansen, i et tilfeldig møte, børster støv av de gamle planene. Matematisk institutt ved UiO koples inn.

2001: Statsminister Jens Stoltenberg kunngjøre at Regjeringen vil opprette en Abelpris

2003: Den første Abelprisen deles ut til Jean-Pierre Serre

2003-2023: 25 menn og 1 kvinne er tildelt Abelprisen



Det Norske Videnskaps-Akademi tildelte Abelprisen 2023 til

Luis A. Caffarelli

The University of Texas at Austin, USA

for hans banebrytende bidrag til regularitetsteori for ikke-lineære partielle differensialligninger inkludert fri rand-problemer og Monge-Ampère-ligningen.

- Født i 1948 Buenos Aires i Argentina.
- Suderte matematikk ved Universitetet i Buenos Aires.
- Doktorgrad i 1972: *Om konjugering og summabilitet av Jacobi-serier*.
- Post.dok. ved University of Minnesota, publiserer i 1977: *The regularity of free boundaries in higher dimensions.*
- Flytter til Courant Institute ved New York University i 1980.



Abelprisvinner 2023: Luis Caffarelli

- På spasertur i Chinatown med Robert Kohn og Louis Nirenberg, resulterer i artikkelen *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations* i 1982
- Ansettelser ved University of Chicago, Institute of Advanced Study i Princeton og University of Texas i Austin
- Gift med den argentinske matematikeren, Irene Martìnez Gamba. Tre sønner, Alejandro, Nicolas og Mauro.



Abelprisvinner 2023: Luis Caffarelli

Utsnitt fra Abelkomiteens begrunnelse:

The incompressible Navier-Stokes equations model fluid flow, such as water. The regularity of solutions of these equations in three dimensions is one of the open Clay Millennium Problems. In 1983, based on Scheffer´s previous work, Caffarelli, with Kohn and Nirenberg, showed that sets of singularities of suitable weak solutions cannot contain a curve, that is, they have to be very "small".

Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations (1982)

. . . showed that the one-dimensional Hausdorff measure is zero for the set of the possible space-time singular points, for the suitable weak solution to the Navier-Stokes equations,

. . .

What is more important is their local regularity theorem, which implies that, for any suitable weak solutions u to the Navier-Stokes equations, the smallness of the scaled local L^2-norm of gradient of u implies the local regularity of u.

Hvis Navier-Stokes-likningen utvikler en singularitet i endelig tid, så vil den umiddelbart forsvinne, siden singulariteten kun er et punkt i tid-rommet.

Kongen overrakte Abelprisen til Caffarelli:

23. mai 2023 kl. 1400-1500: Prisutdeling i Universitetets aula



Konklusjon

- Snakk om Fluidmekanikk til elevene i skolen.
- Gjør enkle forsøk som demonstrerer Fluidmekanikk.
- Fluidmekanikk gir anledning til å studere praktiske, konkrete, synlige og følbare fenomener.
- Fluidmekanikk har en ideell blanding av matematikk og fysikk.
- Skrikende behov for denne typen kompetanse hos norsk industri.