

Kompendium for MEK1100 – Feltteori og vektoranalyse

Karsten Trulsen

4. juni 2026

Innhold

Innledning	4
1 Introduksjon	5
1.1 Vektorer, skalarer og felt	5
1.2 Vektor algebra, rettvinklede høyrehånds systemer, rettlinjede og krumlinjede koordinater	7
1.3 Hastighet og partikkelbane	12
1.4 Rotasjon som stivt legeme	13
1.5 Oppgaver	18
2 Fysiske dimensjoner og enheter, skalering	20
2.1 Fysiske dimensjoner og enheter	21
2.2 Skalering, skrive likninger på dimensjonsløs form	22
2.3 Oppgaver	26
3 Bruk av datamaskin	28
3.1 Vektor algebra	28
3.2 Grafisk illustrasjon av felt	30
3.3 Oppgaver	36
4 Gradient, retningsderivert, ekviskalarflater og strømlinjer	37
4.1 Ordinær og partiell derivert	37
4.2 Gradient og retningsderivert	38
4.3 Taylor-utvikling	40
4.4 Å finne skalarfunksjonen når gradienten er kjent	42
4.5 Ekviskalarflater og flatenormalvektor	45
4.6 Strømlinjer/Feltlinjer	46
4.7 Oppgaver	49
5 Kurve-, flate- og volumintegral	51
5.1 Kurveintegral	51
5.1.1 Sirkulasjon	55
5.2 Flateintegral	58
5.2.1 Parametrisering av en generell flate	59
5.2.2 Fluks, flukstetthet og integrert fluks	63
5.2.3 Fluks ut av en lukket flate	65
5.2.4 Beregning av trykkraft	66

5.3	Volumintegral	70
5.3.1	Parametrisering av mer kompliserte legemer	70
5.4	Oppgaver	71
6	Divergens og virvling (curl)	74
6.1	Divergens	74
6.2	Virvling (curl)	77
6.3	Oppgaver	82
7	Mer regning med del operatoren	83
7.1	Laplace operator, Laplace likning, Poisson likning	83
7.2	To viktige spesialtilfeller: Divergensen til ei virvling og virvlinga til en gradient	84
7.3	Å finne vektorpotensialet	85
7.4	Strømfunksjon	86
7.4.1	Strømlinjer og strømfunksjon	87
7.4.2	Strømrør	89
7.5	Helmholtz dekomposisjon	90
7.6	Vektor differensial identiter	91
7.7	Oppgaver	94
8	Integralsatser	95
8.1	Gauss integralsats	95
8.1.1	Anvendelse på tyngdekraft	96
8.2	Stokes integralsats	99
8.2.1	Greens sats er et spesialtilfelle av Stokes sats	103
8.2.2	Konservativt vektorfelt	103
8.3	Oppgaver	107
9	Mer generelle koordinater	109
9.1	Rettlinjede og krumlinjede koordinater	109
9.2	Gradient, virvling og divergens i generelle ortogonale koordinater	114
9.2.1	Gradient	114
9.2.2	Virvling	114
9.2.3	Divergens	116
9.2.4	Laplace operatoren anvendt på en skalar	117
9.3	Kulekoordinater	118
9.4	Sylinderkoordinater	120
9.5	Oppgaver	122
10	Varianter av integralsatsene	123
10.1	Varianter av Gauss sats	123
10.1.1	Anvendelse på trykkraft og oppdrift	124
10.2	Varianter av Stokes sats	126
10.3	Oppgaver	127

11 Divergens- og virvelfrie felt: Laplace-likningen	128
11.1 Oppgaver	135
12 Feltlikninger for fluider	136
12.1 Partikkelderivert. Materiell derivert.	138
12.2 Bevaringslover, kontrollvolumer, kontrollflater og kontrollkurver	142
12.3 Bevaring av masse: Kontinuitetslikninga	142
12.4 Bevaring av bevegelsesmengde: Eulers likning	145
12.5 Dynamisk grensebetingelse for trykk der hvor vann møter luft	148
12.6 Bernoullis likning for stasjonær strøm	153
12.6.1 Eksperiment “Toricelli”: Hvor fort renner vann ut av et kar?	157
12.7 Kelvins sirkulasjonsteorem	161
12.8 Oppgaver	164
13 Varmetransport	170
13.1 Varmelikninga	173
13.2 Oppgaver	178
14 Fasit til noen av oppgavene	179
Bibliografi	192
Indeks	193

Innledning

Dette kompendiet er skrevet for emnet MEK1100 – “Feltteori og vektoranalyse” ved Universitetet i Oslo. Pensum i emnet er todelt, matematikk og fluidmekanikk. Matematikken som dekkes er, som navnet antyder, feltteori og vektoranalyse. Emnet er samtidig en introduksjon til fluidmekanikk forankret i kalkulus, feltteori og vektoranalyse. Således illustreres feltteori og vektoranalyse med anvendelser innen fluidmekanikk.

Feltteori og vektoranalyse er et matematisk språk spesielt godt egnet til å beskrive ulike disipliner innen matematisk fysikk, kanskje spesielt elektromagnetisme og fluidmekanikk. Av alle mulige anvendelser er det utvilsomt fluidmekanikk som er mest iøynefallende og intuitiv ettersom det er bortimot umulig å ikke legge merke til bevegelser i væsker og gasser i dagliglivet.

Kompendiet vil bli brukt sammen med boka “Vector Calculus” av P.D. Matthews [5] som dekker de matematiske delene av pensum ganske grundig. Den boka gir ikke en grunnleggende introduksjon til fluidmekanikk og varmetransport, det forsøker derimot dette kompendiet å gi.

Som alternativ og utfyllende tekst til dette kompendiet, kan boka “Feltteori og vektoranalyse” av Bjørn Gjevik og Morten Wang Fagerland (GF) [2] anbefales, den har tradisjonelt blitt brukt i MEK1100 i senere år.

Som utfyllende tekst til “Vector Calculus” av P.D. Matthews [5] og til de matematiske delene av dette kompendiet, kan boka “Flervariabel analyse med lineær algebra” av T.Lindstrøm & K.Hveberg (LH) [3] som brukes i MAT1110 anbefales.

Forfatteren takker nåværende og tidligere kolleger og studenter på Matematisk institutt ved UiO for inspirasjon til å skrive dette kompendiet. Inspirasjon har også blitt hentet fra bøkene “Div, Grad, Curl, and All That” av H.M.Schey [7] og “Vector Calculus” av Marsden & Tromba [4].

Det er dessuten inspirerende å vite at tilsvarende pensum står beskrevet i boka “Teoretisk Fysikk” av Vilhelm Bjerknes [1] publisert i Oslo 1929. Forelesningene i MEK1100 blir nå gitt i Vilhelm Bjerknes Hus ved UiO.

Kapittel 1

Introduksjon

1.1 Vektorer, skalarer og felt

En god start er å tolke emnets navn:

MEK1100 — FELT-TEORI OG VEKTOR-ANALYSE

De understrekede ordene må tolkes, og vi starter bakerst:

Analyse

Dette ordet antyder at vi kommer til å derivere og integrere.

Vektor

Vi kan like godt utvide til *skalar*, *vektor*, *dyade*, og *tensor* av rang n :

En *skalar* er noe som har en størrelse som kan angis med ett tall. Eksempler er: tid t , lengde l , fart (engelsk “speed”) v , masse m , trykk p , tetthet ρ , temperatur T .

En *vektor* er noe som har både størrelse og retning. Eksempler er: posisjonsvektor $\mathbf{r}$, hastighet (engelsk “velocity”) $\mathbf{v}$, akselerasjon $\mathbf{a}$, kraft $\mathbf{F}$.

Legg spesielt merke til at vi skal angi en posisjon ved en posisjonsvektor $\mathbf{r}$ som har utgangspunkt i et referansepunkt, som vi skal kalle origo, og som peker på den aktuelle posisjonen.

For å angi størrelsen eller lengden til en vektor kan vi bruke et par vertikale streker slik: $v = |\mathbf{v}|$ (fart = størrelsen til hastighetsvektoren), $r = |\mathbf{r}|$ (avstanden fra origo til et punkt = lengden til posisjonsvektor).

En enhetsvektor er en vektor med lengde 1. Vi kan konstruere en enhetsvektor ved å ta en vilkårlig vektor og dele den med sin lengde. En enhetsvektor i posisjonsvektor sin retning er følgelig $\mathbf{i}_r = \mathbf{r}/r$.

Vi skal insistere på forskjellig notasjon for skalarer og vektorer. Dersom v angir en fart (som er en skalar), så kan den korresponderende hastigheten (som er en vektor) angis med fet skrift $\mathbf{v}$ eller med pil over $\vec{v}$ eller med strek under $\underline{v}$, eller med notasjonen $\mathbf{v}$ eller med annen notasjon som tydelig skiller vektor og skalar fra hverandre. I dette kompendiet skal vi bruke fet skrift $\mathbf{v}$.

Vi er helt enig i bemerkningen på side 165 i LH (Lindstrøm & Hveberg) [3] at hastighet (engelsk “velocity”) er vektoren $\mathbf{v}$, mens fart (engelsk “speed”) er skalaren

$v = |\mathbf{v}|$. Vi mener det er uheldig at disse to begrepene blandes, for eksempel ved å si hastighet når vi egentlig mener fart.

En *dyade* kan vi se for oss som to vektorer stilt opp etter hverandre, $\mathbf{ab}$. En alternativ notasjon som ofte brukes er $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, men vi skal foretrekke $\mathbf{ab}$. Dyaden har følgelig to retninger, første retning gitt ved $\mathbf{a}$ og andre retning gitt ved $\mathbf{b}$. Rekkefølgen er vesentlig, $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$. Dersom vi tenker oss at $\mathbf{a}$ har retning mot nord og $\mathbf{b}$ har retning mot vest, og dersom vi i tillegg tenker oss at første vektor angir bevegelsesretning og andre vektor angir synsretning, så er det åpenbart ikke det samme å gå mot nord og se mot vest eller å gå mot vest og se mot nord.

En *tensor* av rang n kan vi se for oss som n vektorer stilt opp etter hverandre. Nok en gang er rekkefølgen vesentlig. Vi innser at en skalar er en tensor av rang 0, en vektor er en tensor av rang 1, en dyade er en tensor av rang 2, etc.

Felt

Vi bruker betegnelsen “felt” (engelsk “field”) om noe som avhenger av posisjon $\mathbf{r}$, og som i tillegg er entydig definert som funksjon av posisjonen.

Vi bruker tilsvarende betegnelsen “prosess” om er noe som avhenger av tid t .

Vi skal ofte studere egenskaper som både avhenger av posisjon $\mathbf{r}$ og tid t , og i så fall skal bruker vi betegnelsen “felt” i betydningen at egenskapen er en entydig funksjon av posisjon $\mathbf{r}$ for hvert tidspunkt t .

Vi har skalarfelt, vektorfelt, og tensorfelt av rang n .

Eksempel på skalarfelt: Trykk $p(\mathbf{r}, t)$, tetthet $\rho(\mathbf{r}, t)$, temperatur $T(\mathbf{r}, t)$.

Eksempler på vektorfelt:

- Posisjonsvektor $\mathbf{r}$ er åpenbart en entydig funksjon av posisjon $\mathbf{r}$.
- Vindhastighet $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ er entydig funksjon av posisjon $\mathbf{r}$ for hvert tidspunkt t .
- Tyngdens akselerasjon $\mathbf{g}(\mathbf{r})$. Vi vet at størrelsen er omtrent $g = |\mathbf{g}| = 9.81$ m/s² på jordas overflate og retningen er inn mot jordas sentrum.
- Tyngdekrafta $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ som virker på en masse m .
- Newtons gravitasjonslov sier at tyngdekrafta fra et legeme med masse M på et legeme med masse m med innbyrdes avstand r er gitt ved $\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{i}_r$ hvor G er den universelle gravitasjonskonstanten og $\mathbf{i}_r$ er en enhetsvektor som peker fra legemet med masse M mot legemet med masse m .

Eksempler på vektorstørrelser som vi ikke skal kalle felt:

Følgende krefter som kan virke på legemer eller partikler skal vi ikke kalle “felt” fordi de ikke oppfyller kravet om å være entydig bestemt av posisjon:

- Friksjonskraft $\mathbf{F} = -\mu \mathbf{v}$
- Coriolis kraft $\mathbf{F} = m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}$
- Lorentz kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + q\mathbf{E}$

Her er $\mathbf{v}$ hastigheten til legemet eller partikkelen, μ er en friksjonskoeffisient, m er massen til partikkelen, $\boldsymbol{\Omega}$ er vinkelhastigheten til jorda (vi skal lære mer om den snart), q er den elektriske ladningen til partikkelen, $\mathbf{B}$ er magnetisk felt, og $\mathbf{E}$ er elektrisk felt. Vi skal ikke jobbe med elektromagnetisme i MEK1100, derfor er det ikke nødvendig for oss å forstå hva Lorentz kraft er.

Vi skal ikke anse disse tre kreftene som “felt” fordi de ikke trenger å være entydig definert som funksjon av posisjon. Når vi jobber med disse tre kreftene ønsker vi nemlig at partikkelens hastighet $\mathbf{v}$ skal kunne være vilkårlig, ikke entydig gitt som funksjon av posisjon. Friksjon er altså ikke en feltstørrelse fordi den avhenger av hvordan bevegelsen skjer og ikke bare av hvor bevegelsen skjer.

Eksempel

Du kjører langs en vei og ser dette skiltet:

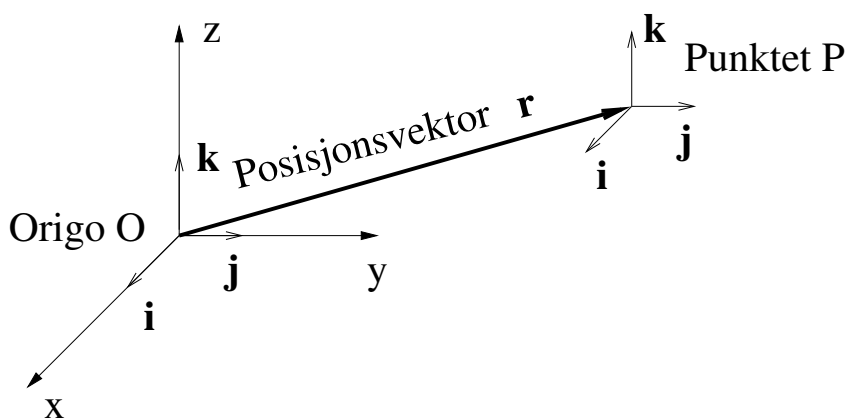


Er dette en angivelse av fart eller hastighet?

Svar: Dette er en fart fordi skiltet ikke sier i hvilken retning man skal kjøre.

1.2 Vektor algebra, rettvinklede høyrehånds systemer, rettlinjede og krumlinjede koordinater

Som tidligere nevnt kan vi angi et punkt P ved en posisjonsvektor $\mathbf{r}$ som starter i et referansepunkt O som vi kaller origo. Denne måten å angi punktet P avhenger ikke av koordinater. Dette er illustrert i figuren.



Alternativt kan vi representere punktet P ved hjelp av koordinater. De kartesiske koordinatene er velkjent, i tredimensjonalt rom kaller vi de ofte for x , y og z . De tilhørende aksene står normalt på hverandre. Et punkt P kan følgelig angis ved sine koordinater (x, y, z) . Origo O er punktet med koordinater $(0, 0, 0)$.

Spørsmålet er hvordan vi kan representere posisjonsvektoren $\mathbf{r}$ ved hjelp av koordinater. Vi skal gjøre dette ved hjelp av enhetsvektorer som peker i koordinatretningene. Disse definerer vi på følgende måte:

Du står i et punkt. Hold alle koordinatene konstant. Øk én av koordinatene litt. Hvilken retning beveger du deg?

Svaret gir en vektor som peker i retningen til den utvalgte koordinaten. Deretter kan vi sørge for at denne vektoren får enhets lengde.

Dersom vi ser tilbake på figuren ovenfor, og gjør denne øvelsen i punktet P , og deretter i origo O , og så i et hvilket som helst annet punkt, så vil vi oppdage at enhetsvektorene i koordinatretningene til de kartesiske koordinatene er de samme overalt, de er ikke funksjoner av posisjon. Da sier vi at det kartesiske koordinatsystemet er **rettlinjet** (engelsk “rectilinear”). Dette er faktisk en av de viktigste egenskapene til de kartesiske koordinatene!

Vi skal la enhetsvektorene til henholdsvis $\{x, y, z\}$ få navn $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, og de har altså enhets lengde $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$.

Vi kan nå skrive posisjonsvektoren fra O til P som $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Vi ser at koordinatene til P er (x, y, z) og komponentene til posisjonsvektoren $\mathbf{r}$ til P også er (x, y, z) . Vi trenger altså ikke ta stilling til om notasjonen (x, y, z) betyr koordinatene til punktet eller komponentene til posisjonsvektor til punktet. Vi skal snart se at dette ikke gjelder for koordinater som ikke er rettlinjet!

Skalarprodukt

La $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ og $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, da er skalarproduktet (som vi skal benytte oss av) følgende

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Lengden til en vektor

Lengden til en vektor uttrykkes som $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

Enhets vektor

Vi kan lage en enhets vektor i $\mathbf{a}$ sin retning ved $\mathbf{i}_a = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$.

Vinkelen mellom to vektorer

Vinkelen θ mellom to vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er gitt ved $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$.

Ortogonale vektorer

Dersom vinkelen er slik at $\cos \theta = 0$, dvs. vinkelen er 90° eller 270° , så sies vektorene å være ortogonale eller å stå “vinkelrett” eller “normalt” på hverandre.

Vi angir ortogonalitet med symbolet $\perp$.

Merk at dersom $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ så er enten $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ eller $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ eller $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Det er meningsløst å snakke om at en null-vektor er ortogonal.

Rettvinklet koordinatsystem

Når enhetsvektorene langs de tre koordinataksene står vinkelrett på hverandre vil multiplikasjonstabellen for skalarproduktet mellom enhetsvektorene se slik ut:

$\cdot$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	1	0	0
$\mathbf{j}$	0	1	0
$\mathbf{k}$	0	0	1

For å finne ut om et koordinatsystem er rettvinklet kan vi undersøke om multiplikasjonstabellen for skalarproduktet mellom enhetsvektorene til koordinatene ser slik ut.

Skalarprodukt mellom dyade og vektor

Skalarproduktet skal gjøres mellom de to vektorene som står nærmest prikken, på hver side av prikken, med mindre noe annet er eksplisitt sagt. Vi har allerede nevnt at det dyadiske produktet ikke kommuterer. Vi kan vise at det ikke spiller noen rolle hvilken av operasjonene vi gjør først

$$\mathbf{ab} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

så det er ikke nødvendig å skrive parentes, men for praktisk regning er det mindre arbeidskrevende å regne ut skalarproduktet først.

Eksempel: La $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ og $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ og $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, da kan vi enten regne ut dyaden først

$$\mathbf{ab} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{ii} - \mathbf{ij} + 2\mathbf{ji} - 2\mathbf{jj}) \cdot (\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$

eller alternativt kan vi regne ut skalarproduktet først

$$\mathbf{ab} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j})(1 - 3) = -2(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$

Vi legger merke til at det siste alternativet medfører mindre arbeid.

Kryssprodukt

Kryssproduktet kan vi skrive symbolsk ved hjelp av en determinant

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \mathbf{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \mathbf{k}(a_x b_y - a_y b_x) \end{aligned}$$

Dette er i samsvar med at $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$.

Lengden til kryssproduktet, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ er lik arealet til parallelogrammet spent ut av de to vektorene $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$. Retningen til kryssproduktet $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ er normalt på parallelogrammet spent ut av de to vektorene.

Parallelle vektorer

Dersom vinkelen er slik at $\sin \theta = 0$, dvs. vinkelen er 0° eller 180° , så sies vektorene å være parallelle. Vi angir parallellitet med symbolet $\parallel$.

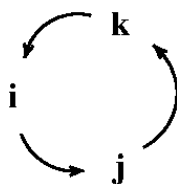
Merk at dersom $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ så er enten $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ eller $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ eller $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Det er meningsløst å snakke om at en null-vektor er parallell.

Høyrehånds rettvinklet koordinatsystem

Dersom vi har et rettvinklet system, så sier vi at det er et rettvinklet høyrehånd system når multiplikasjonstabellen for kryssproduktet mellom enhetsvektorene langs koordinataksene ser slik ut (første faktor fra søylen til venstre, andre faktor fra raden øverst):

$\times$	i	j	k
i	0	k	$-j$
j	$-k$	0	i
k	j	$-i$	0

En alternativ måte å representere dette på er ved hjelp av hjulet:



Høyrehånds eller venstrehånds rettvinklet koordinatsystem

Hjulet vist ovenfor er en huskeregel for hvordan vi kan bruke fingrene på høyre hånd for å finne retningen til et kryssprodukt. Første faktor tilsvarende pekefinger rett fram, andre faktor tilsvarende pekefinger (bøyd innover til venstre), da er resultatet gitt ved tommelen.

Dersom vi hadde snudd pilene i hjulet slik at dette skulle gjøres med venstre hånd, så hadde vi sagt at dette koordinatsystemet var et venstrehånds system.

Vi skal kun benytte oss av høyrehåndssystemer.

Trippel skalar produkt

Trippel skalar produktet mellom tre vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ er lik volumet av parallelepipedet som spennes ut av de tre vektorene, derfor er det ikke overraskende at vi kan permutere syklisk

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

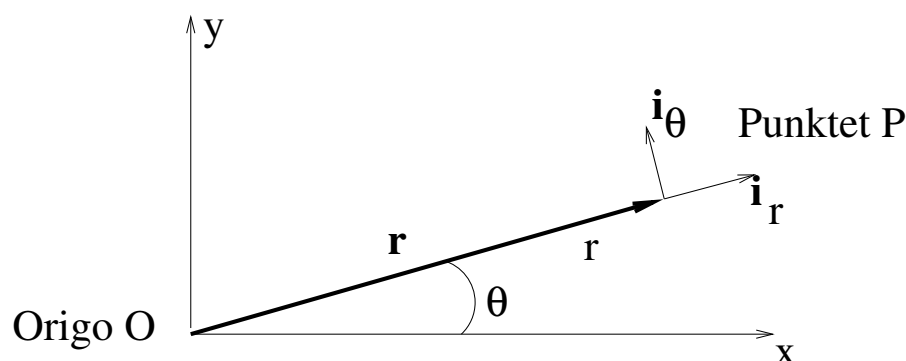
Her er det ikke nødvendig å sette parentes rundt kryssproduktet fordi kryssproduktet må nødvendigvis gjøres først for at uttrykkene skal være meningsfulle.

Polare koordinater, krumlinjede koordinater

Ofte kan det være en fordel å bruke koordinater som ikke er kartesiske eller rettlinjede. Vi skal illustrere dette med polare koordinater i xy -planet.

Vi tar utgangspunkt i xy -planet med kartesiske koordinater x og y , men vi ønsker å bruke avstanden r og vinkelen θ som koordinater istedenfor de kartesiske koordinatene. Disse er relatert med $x = r \cos \theta$ og $y = r \sin \theta$.

Punktet P kan nå beskrives enten med kartesiske koordinater (x, y) eller med polare koordinater (r, θ) .



La oss se på posisjonsvektor $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}$. Dersom vi nå følger oppskriften for å finne enhetsvektorene i koordinatretningene i punktet P , så oppdager vi at enhets-koordinatvektoren i r -retning er $\mathbf{i}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$. Vi kan også finne enhetskoordinatvektoren i θ -retning, for eksempel ved å regne ut kryssproduktet $\mathbf{i}_\theta = \mathbf{k} \times \mathbf{i}_r = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$, men vi trenger ikke uttrykket for den akkurat nå. Legg merke til at koordinatvektorene nå er funksjoner av posisjon, de avhenger av vinkelen θ . Da sier vi at det polare koordinatsystemet er **krumlinjet** (engelsk “curvilinear”).

Vi kan også legge merke til at koordinatvektorene ikke er veldefinert i origo, fordi dersom du står i origo og skal øke radius litt så er det ikke opplagt hvilken retning du skal gå! Dette problemet dukker aldri opp for kartesiske koordinater, men det kan skje for krumlinjede koordinater.

Vi kan nå skrive posisjonsvektor $\mathbf{r}$ fra O til P ved hjelp av de polare enhetskoordinatvektorene i punktet P , og vi legger merke til at vi da kun trenger koordinatvektoren i r -retning, $\mathbf{r} = r\mathbf{i}_r + 0\mathbf{i}_\theta$. Vi ser at de polare koordinatene til P er (r, θ) mens komponentene til posisjonsvektoren til P nå er $(r, 0)$. Nå er det altså ikke likegyldig om notasjonen (α, β) skal bety koordinatene til punktet eller komponentene til posisjonsvektor til punktet. Dette er typisk for krumlinjede koordinater.

Notasjonen (α, β) eller (α, β, γ) er grei for å angi vektorer og punkter i kartesiske koordinater, men er forvirrende for å skrive vektorer i krumlinjede koordinater fordi det da er uklart om den angir koordinater eller vektorkomponenter.

I dette emnet skal vi jobbe mye med krumlinjede koordinater. Derfor liker vi å skrive vektorer med angivelse av enhetsvektorer i koordinatretningene, og derfor prøver vi stort sett å unngå den tvetydige notasjonen (α, β) dersom vi ikke er helt sikre på at det er kartesiske koordinater vi forholder oss til.

Eksempel:

Dersom vi angir punktet P ved hjelp av posisjonsvektor $\mathbf{r} = r\mathbf{i}_r$, hvor har det blitt av vinkelen θ ?

Svar: Enhetsvektoren $\mathbf{i}_r$ er en funksjon av vinkelen, så en tydeligere skrivemåte kunne ha vært $\mathbf{r} = r\mathbf{i}_r(\theta)$.

1.3 Hastighet og partikkelbane

La $\mathbf{r}_p(t)$ være posisjonen til en partikkel ved tid t . Her fungerer tiden t som en parameter. Partikkelen beveger seg i et hastighetsfelt $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Hastigheten til partikkelen er derfor $\mathbf{v}_p(t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_p(t))$. Vi har partikkelen sin hastighet

$$\mathbf{v}_p = \frac{d\mathbf{r}_p}{dt}$$

og partikkelen sin akselerasjon

$$\mathbf{a}_p = \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}_p}{dt^2}$$

Partikkelbane

Dersom $\mathbf{r}_p(t)$ angir posisjonen til en partikkel som beveger seg når parameteren t løper, så kaller vi kurven som beskrives av $\mathbf{r}_p(t)$ for en partikkelbane.

For å gjøre beregninger er det greiest å innføre koordinater. I et rettlinjett koordinatsystem vil dette si å jobbe kun med komponentene, da koordinatvektorene ikke er funksjoner av posisjon, det vil si at koordinatvektorene ikke avhenger av hvor partikkelen befinner seg. For kartesiske koordinater har vi da

$$\mathbf{r}_p = x_p\mathbf{i} + y_p\mathbf{j} + z_p\mathbf{k} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_p = \frac{dx_p}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy_p}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz_p}{dt}\mathbf{k} \quad \text{og} \quad \mathbf{a}_p = \frac{d^2x_p}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y_p}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z_p}{dt^2}\mathbf{k}$$

Eksempel:

Partikler beveger seg i henhold til hastighetsfeltet $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$. Finn banen til en partikkel som starter i posisjon $\mathbf{r}_p(0) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ ved tiden $t = 0$.

Vi må løse følgende første ordens ordinære vektor-differensiallikning

$$\frac{d\mathbf{r}_p}{dt} = \frac{dx_p}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy_p}{dt}\mathbf{j} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_p) = x_p\mathbf{i} - y_p\mathbf{j}$$

Vi kan trekke ut x - og y -komponentene fra denne likninga og får følgende første ordens system av ordinære differensiallikninger

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_p}{dt} = x_p, \\ \frac{dy_p}{dt} = -y_p \end{array} \right\}$$

Disse likningene er ikke koblet med hverandre. Likningene er dessuten separable, det vil si at vi kan samle alle x_p på venstre side og alle t på høyre side, eller alle y_p på venstre side og alle t på høyre side

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_p}{x_p} = dt, \\ \frac{dy_p}{y_p} = -dt \end{array} \right\}$$

Deretter kan vi integrere opp begge sider, og vi får generelle løsninger

$$\{\ln|x_p| = t + A, \quad \ln|y_p| = -t + B\}$$

hvor A og B er vilkårlige konstanter. Om vi eksponentierer begge sider får vi

$$\{x_p(t) = \alpha e^t, \quad y_p(t) = \beta e^{-t}\}$$

hvor α og β er vilkårlige konstanter.

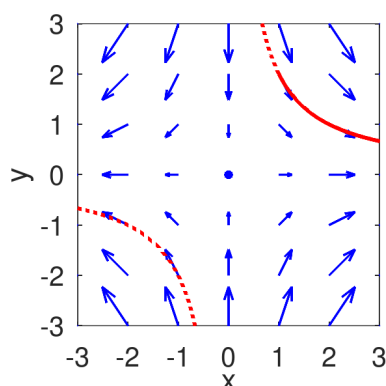
Vi setter deretter inn startkravene og bestemmer $\alpha = a$ og $\beta = b$. Løsningen kan skrives på vektorform parametrisert med tiden t som

$$\mathbf{r}_p(t) = x_p(t)\mathbf{i} + y_p(t)\mathbf{j} = \mathbf{i}ae^t + \mathbf{j}be^{-t}$$

eller vi kan skrive om løsningen uten å referanse til noen parameter

$$x_py_p = ab$$

som vi gjenkjenner som en hyperbel (egentlig bare som en del av en hyperbel fordi $t \geq 0$ medfører $x \geq 1$).



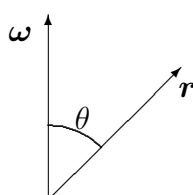
Figuren viser vektorfeltet med blå piler. Origo er et stagnasjonspunkt, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, og er markert med blå prikk. For $a = 1$ og $b = 2$ er hele hyperbelen vist med røde prikker, og partikkelbanen med rød heltrukken linje for $x \geq 1$.

1.4 Rotasjon som stivt legeme

Vi sier at et legeme er stivt dersom innbyrdes avstand mellom materielle punkter forblir uendret. Rotasjon som stivt legeme betyr at de materielle punktene i legemet beholder sine innbyrdes avstander mens legemet som helhet roterer.

Vi lar origo ligge på rotasjonsaksen og vi betrakter et vilkårlig punkt med posisjonsvektor $\mathbf{r}$. Vi lar $\boldsymbol{\omega}$ være vinkelhastighetsvektor for rotasjonsbevegelsen. Det vil si at $\boldsymbol{\omega}$ ligger langs rotasjonsaksen og at vinkelfarten $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ forteller hvor stor vinkel i radianer som tilbakelegges per tid, og at hastigheten til punktet vil være

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$



Et punkt med radiell avstand $R = r \sin \theta$ fra rotasjonsaksen, hvor $r = |\mathbf{r}|$ er lengden til posisjonsvektor og θ er vinkelen mellom $\mathbf{r}$ og $\boldsymbol{\omega}$, skal tilbakelegge omkretsen $2\pi R$ i løpet av tiden T , da blir banefarten $v = \frac{2\pi R}{T}$ og vinkelfarten $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{R}$.

Hastigheten $\mathbf{v}$ står normalt både på posisjonsvektor $\mathbf{r}$ og på vinkelhastighetsvektor $\boldsymbol{\omega}$.

Dersom $\mathbf{r}_p(t)$ er posisjonen til en partikkel ved tid t , så er posisjonsvektor $\mathbf{r}_p(t)$ løsning av differensiallikninga

$$\mathbf{v}_p = \frac{d\mathbf{r}_p}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p$$

Akselerasjonen til partikkelen er

$$\mathbf{a}_p = \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p).$$

Dersom vinkelhastigheten er konstant så er det kun posisjonsvektor som skal deriveres

$$\mathbf{a}_p = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_p}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p) = \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_p - \omega^2 \mathbf{r}_p.$$

Her har vi benyttet vektor-identiteten

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{C} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Dersom $\mathbf{r}_p$ står vinkelrett på $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}_p$, så har vi $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_p = 0$ og

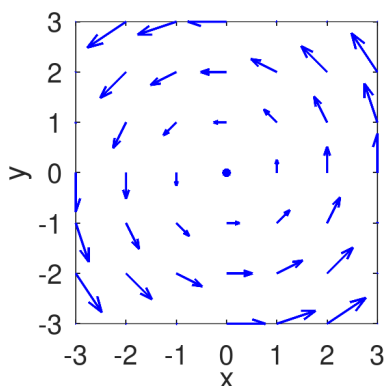
$$\mathbf{a}_p = -\omega^2 \mathbf{r}_p$$

som vi gjenkjenner som det vanlige uttrykket for sentripetalakselerasjon.

Alternativt kan vi jobbe med koordinater. La $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ være posisjonsvektor med utgangspunkt i origo som ligger langs rotasjonsaksen til en karusell. Vi skal la rotasjonsaksen gå langs z -aksen, $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$.

Vi regner ut hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ y & z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ x & z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{vmatrix} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}$$



Figuren viser vektorfeltet med blå piler. Origo er et stagnasjonspunkt, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, og er markert med blå prikk.

Det tilhørende fartsfeltet er

$$v = |\mathbf{v}| = \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega R$$

og vi ser at farten er proporsjonal med avstanden til rotasjonsaksen.

Begrepene nord, sør, øst og vest angir rotasjonsretning

Legg høyre tommel langs vinkelhastighetsvektoren $\boldsymbol{\omega}$, da går rotasjonen i retningen til de fire krummede fingrene på høyre hånd. Eller alternativt:

La de fire fingrene på høyre hånd krumme seg langs rotasjonsbevegelsen, da peker høyre tommel i $\boldsymbol{\omega}$ sin retning og tuppen på tommelen er “nord”.

Et punkt som beskriver en slik rotasjon vil bevege seg fra “vest” mot “øst”.

Eksempel: Hvilken vei beveger vi oss når vi befinner oss på jorda, og hvilken vei er vi akselerert?

Hint: La origo være i jordas sentrum. La $\mathbf{r}$ være vår posisjonsvektor (når vi står oppreist holder vi oss omtrent i retningen til $\mathbf{r}$). Finn retningen til $\boldsymbol{\omega}$ (mot nord), retningen til $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, og retningen til $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$.

Svar: Vi beveger oss mot øst og er akselerert vinkelrett inn mot rotasjonsaksen til jorda. Prøv å se for deg hvilke retninger dette er!

Eksempel: Magnetisk nord for elektromagnet

En elektromagnet lages ved å sende strøm gjennom en kveil av en ledning. En slik kveil av ledning som det går strøm igjennom kalles gjerne for en solenoid. Dersom vi lar de fire fingrene på høyre hånd peke i retningen som strømmen går i ledningen, da vil tuppen på høyre tommel være magnetisk nord.

Eksempel: Hvilken vei roterer jorda rundt seg selv og hvilken vei roterer jorda rundt sola?

I begge tilfeller lar vi høyre tommel peke mot Nordstjerna, også kalt Polarstjerna. De fire fingrene på høyre hånd peker/krummer seg i rotasjonsretning.

Prograd og retrograd bevegelse

Dersom to samtidige rotasjonsbevegelser har samme retning “nord” sier vi de er **prograd**. Dersom de har motsatt retning “nord” sier vi de er **retrograd**.

Eksempel: Planetbevegelse

Alle planetene i solsystemet roterer samme vei rundt seg selv og rundt sola (prograd), med unntak av Venus og Uranus som begge har retrograd rotasjon om sin egen akse, (se https://no.wikipedia.org/wiki/Retrograd_og_prograd_bevegelse)

Eksempel: Prograd og retrograd bevegelse i fornøylesparker

I fornøylesparker, som for eksempel “Jul i vinterland” i Oslo, kan man ofte finne både tradisjonelle nostalgiske karuseller og pariserhjul. I det første tilfellet roterer

man både rundt seg selv og rundt med karusellen: Prograd eller retrograd? I det andre tilfellet roterer man ikke rundt seg selv, kun rundt det store hjulet.

Kanskje du allerede har prøvd både karusellen og pariserhjulet her:

Karusell og pariserhjul i Oslo!

(Søk etter “Ponniekspresen” og “Julestjernen”.)

Eksempel: Prograd og retrograd bevegelse i strømminger

Dersom en person lar seg drive rundt i en strømmvirvel, for eksempel i Saltstraumen, eller et insekt lar seg drive rundt i en slukvirvel i badekaret eller i vasken eller i en kopp kaffe som du rører rundt med en skje, vil det være prograd eller retrograd bevegelse? Gjør eksperimentene selv!

Eksempel: Finn partikkelbanen til rotasjon som stivt legeme

Partikler beveger seg i henhold til hastighetsfeltet for rotasjon som et stivt legeme med vinkelhastighetsvektor $\boldsymbol{\omega}$. Hastigheten til partikkelen er gitt ved følgende første ordens ordinære vektor-differensiallikning

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Finn partikkelbanen til en slik partikkel.

For å komme noen vei introduserer vi koordinater. La oss velge de kartesiske koordinatene. La $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$ peke i z -retning, og la partikkelen befinner seg i posisjon $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ved et vilkårlig tidspunkt t .

Hastigheten til partikkelen er gitt ved følgende første ordens ordinære vektor-differensiallikning

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{r} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}$$

Vi kan trekke ut x -, y - og z -komponentene av denne likninga og får da følgende første ordens system av ordinære differensiallikninger

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega x, \quad \frac{dz}{dt} = 0 \end{array} \right\}$$

Den siste likninga er lett å løse, $z = z_0 = \text{konstant}$.

De to første likningene kan vi enten skrive som et system av første ordens likninger på matriseform

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

eller vi kan kombinere de til ei andre ordens likning for kun x

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Disse likningene er lineære ordinære differensiallikninger med konstante koeffisienter. Den enkleste måten å løse dem er ved å anta at $x(t) = \alpha e^{mt}$ og sette dette inn i andre ordens likninga for x . Dette gir $\alpha(m^2 + \omega^2) = 0$. Vi ønsker ikke å sette $\alpha = 0$, så vi insisterer heller på den karakteristiske likninga $m^2 + \omega^2 = 0$, som gir to

komplekse (imaginære) løsninger for $m = \pm i\omega$. I så fall kan vi skrive løsninga som $x(t) = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}$ hvor α og β er to konstanter, eller vi kan skrive om til formen $x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ hvor a og b er to konstanter. Løsninga for $y(t)$ finner vi ved å derivere $y(t) = -\frac{1}{\omega} \frac{dx}{dt} = a \sin(\omega t) - b \cos(\omega t)$.

Dersom vi ønsker ei løsning som har startpunkt $x(0) = R$ og $y(0) = 0$ og $z(0) = z_0$, så finner vi

$$x(t) = R \cos(\omega t), \quad y(t) = R \sin(\omega t), \quad z(t) = z_0$$

hvor R er avstanden fra rotasjonsaksen.

Skrevet på vektorform

$$\mathbf{r}(t) = R \cos(\omega t) \mathbf{i} + R \sin(\omega t) \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}$$

Alternativt kan vi beskrive partikkelbanen uten referanse til noen parameter

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{og} \quad z = z_0$$

Hastigheten finner vi ved å derivere

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega R \sin(\omega t) \mathbf{i} + \omega R \cos(\omega t) \mathbf{j}$$

Akselerasjonen finner vi ved å derivere en gang til

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2 R \cos(\omega t) \mathbf{i} - \omega^2 R \sin(\omega t) \mathbf{j} = -\omega^2 R (\cos(\omega t) \mathbf{i} + \sin(\omega t) \mathbf{j})$$

Legg merke til at akselerasjonen er rettet inn mot rotasjonsaksen. Dette er en sentripetalakselerasjon som har størrelse $|\mathbf{a}| = \omega^2 R$.

Eksempel: Vis at vektorfeltet $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ er rotasjon som stivt legeme

Vi må vise at innbyrdes avstand mellom to materielle punkter forblir uendret. La de to punktene være $\mathbf{r}_1(t)$ og $\mathbf{r}_2(t)$. Hver av dem oppfyller

$$\frac{d\mathbf{r}_n}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n.$$

Vektor-avstanden mellom dem skal vi angi som $\mathbf{l}(t) = \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)$. Avstanden (uten retning) mellom dem skal vi angi som $l(t) = |\mathbf{l}(t)|$. Vi må vise at $\frac{dl}{dt} = 0$. Vi velger heller å jobbe med kvadratet l^2 som er

$$l^2 = \mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - 2\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2$$

Vi har

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_n) = \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} \cdot \mathbf{r}_n + \mathbf{r}_n \cdot \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_n + \mathbf{r}_n \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n = 2\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_n \times \mathbf{r}_n = 0$$

og

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)) &= \left(\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right) = [(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2)] \\ &= [(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1)] = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1) = 0 \end{aligned}$$

og følgelig innser vi at $\frac{d}{dt}(l^2) = 0$.

1.5 Oppgaver

1.1 La $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ være to vektorer og la α være en skalar.

Med utgangspunkt i skalar- og kryssprodukt som definert i dette kapitlet, sørg for at du vet at følgende relasjoner gjelder:

(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

(b) $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$

(c) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$

(d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

(e) $\alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$

(f) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

(g) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$

(h) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

(i) $\alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$

(j) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

(k) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

(l) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

(m) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

Med utgangspunkt i relasjonene ovenfor, vis at følgende relasjon også gjelder:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})$$

1.2 Vis at for skalarproduktet mellom dyade og vektor gjelder

$$\mathbf{a}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a}\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

Vis at det er mye mindre arbeidskrevende å regne ut skalarproduktet først.

1.3 Skisser følgende vektorfelt $\mathbf{v}$ i xy -planet, med piler som har passende lengde og retning, og indiker eventuelle singulære og stagnasjonspunkt:

(a) $\mathbf{v} = \mathbf{i}$

(b) $\mathbf{v} = \mathbf{j}$

(c) $\mathbf{v} = x\mathbf{i}$

(d) $\mathbf{v} = x\mathbf{j}$

(e) $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

(f) $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

(g) $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

(h) $\mathbf{v} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

$$(i) \mathbf{v} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(j) \mathbf{v} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$$

$$(k) \mathbf{v} = y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$$

Hint: Det er vanlig å indikere singulære punkt med symbolet $\times$. Et singulært punkt er der hvor vektorfeltet ikke er veldefinert, for eksempel fordi størrelsen går mot uendelig eller fordi retningen blir flertydig.

Hint: Det er vanlig å indikere stagnasjonspunkt med en fet prikk $\bullet$. Et stagnasjonspunkt er der hvor vektorfeltet er lik null.

NB! Det er fristende å løse disse oppgavene på datamaskin, men det har en verdi å kunne tegne for hånd og se for seg intuitivt hvordan vektorfeltene ser ut!

- 1.4 Skisser følgende vektorfelt $\mathbf{v}$ i xyz -rommet, med piler som har passende lengde og retning, og indiker eventuelle singulære og stagnasjonspunkt:

$$(a) \mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$(b) \mathbf{v} = -2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

- 1.5 Finn banen til en partikkel som starter i $\mathbf{r}(0) = R\mathbf{i}$ og som beveger seg i henhold til det tidsavhengige hastighetsfeltet

$$\mathbf{v}(t) = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r} + c \sin(\Omega t)\mathbf{k}$$

Her er ω vinkelfarten for en rotasjonsbevegelse rundt z -aksen, Ω er vinkelfarten for en vertikal oscillasjon langs z -aksen, $\mathbf{k}$ er enhetsvektor i z -retning, og c er en konstant.

Hint: Oppgaven er inspirert av å se på "Ponniekspressen" i "Jul i vinterland".

- 1.6 Gitt to vektorer $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ og $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Undersøk om de er ortogonale, enten ved hjelp av prikkprodukt eller ved hjelp av kryssprodukt. Undersøk om de er parallelle, enten ved hjelp av prikkprodukt eller ved hjelp av kryssprodukt. Regn ut vinkelen mellom dem.

- 1.7 Skriv om uten bruk av kryssprodukt $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ og $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$.

- 1.8 En partikkel har posisjon $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$. Partikkelen beveger seg i henhold til hastighetsfeltet $\mathbf{v} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. Ved tiden $t = 0$ starter partikkelen i punktet $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$. Beregn partikkelbanen. Tegn vektorfeltet med et pileplott og tegn inn partikkelbanen i figuren.

- 1.9 En partikkel har posisjon $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ hvor t er tid. Partikkelen beveger seg i henhold til det tidsavhengige vektorfeltet $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} \cos t$. Ved tiden $t = 0$ starter partikkelen i origo. Beregn partikkelbanen. Illustrer hvordan vektorfeltet $\mathbf{v}(t)$ utvikler seg i tid med et utvalg pileplott og tegn inn partikkelbanen i plottene.

- 1.10 En partikkel har posisjon $\mathbf{r}(t)$. Partikkelen beveger seg i henhold til det tidsavhengige hastighetsfeltet $\mathbf{v} = -xt\mathbf{i} + \mathbf{j}y \sin t$. Ved tiden $t = 0$ starter partikkelen i $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Beregn partikkelbanen og illustrer den grafisk.

Kapittel 2

Fysiske dimensjoner og enheter, skalering

Vi skal bruke matematikken til å lage modeller (noen ganger kalt lover eller naturlover) for hvordan et system oppfører seg. Det er et par meget grunnleggende krav som må være oppfylt for at slike modeller skal være fornuftige: Det som står på hver side av symbolene $+$ (pluss) og $-$ (minus) og $=$ (lik) må være av samme type, de må passe sammen:

- Leddene må være tensorer av samme rang: alle må enten være skalarer, eller kompatible vektorer, eller kompatible dyader, etc.
- Leddene må ha samme fysiske dimensjon: alle må enten være tid eller lengde eller masse eller kraft, etc., eller alle må være dimensjonsløse

Det er ikke nødvendig å bruke samme fysiske enheter. Det er for eksempel greit å legge sammen timer og sekunder, men det er ikke greit å legge sammen meter og sekunder. Det er greit å si at to hastigheter er like $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, men det er ikke greit å si at en hastighet $\mathbf{v}$ (med retning) er lik en fart $v = |\mathbf{v}|$ (uten retning).

Eksempel: Fri bevegelse i tyngdefeltet

Vi betrakter en "partikkel" som flytter på seg. Den vil ha en posisjon angitt av en posisjonsvektor som er funksjon av tid $\mathbf{r}(t)$. Hastigheten til partikkelen er den tidsderivate av posisjonen $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Akselerasjonen til partikkelen er den tidsderivate av hastigheten $\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$.

Et enkelt eksempel på en fysisk modell ("lov") er at partikkelen skal bevege seg med akselerasjonen gitt ved tyngdens akselerasjon $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. Vi kan da skrive $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g}$. Dette trenger ikke være helt trivielt å integrere opp fordi tyngdens akselerasjon kan variere både i retning og størrelse.

Innenfor et begrenset område kan vi betrakte tyngdens akselerasjon $\mathbf{g}$ som en konstant, med verdi omtrent lik $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, overalt rettet nedover i et kartesisk koordinatsystem. Vi lar z -aksen peke oppover. Følgelig kan vi skrive tyngdens akselerasjon som $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$, og denne skal altså betraktes som konstant både i verdi og retning.

Ettersom $\mathbf{g}$ er konstant så er det nå trivielt å integrere opp for å finne hastigheten $\mathbf{v} = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0$ hvor $\mathbf{v}_0$ er en integrasjonskonstant som er hastigheten til partikkelen ved tid $t = 0$.

Vi kan videre skrive $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0$, og det er tilsvarende trivielt å integrere opp for å finne posisjonen $\mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + \mathbf{v}_0t + \mathbf{r}_0$ hvor $\mathbf{r}_0$ er en integrasjonskonstant som er posisjonen til partikkelen ved tid $t = 0$.

I det generelle tilfellet har vi altså

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + \mathbf{v}_0t + \mathbf{r}_0 \quad (2.1)$$

og dersom vi kun begrenser oss til bevegelse langs z -aksen så kan resultatet være

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + r_0 \quad (2.2)$$

La oss sjekke om de to grunnleggende kravene er oppfylt: Leddene må være tensorer av samme rang, og leddene må ha samme fysiske dimensjon. Vi ser umiddelbart at i (2.1) er alle ledd vektorer som er kompatible, og i (2.2) er alle ledd skalarer. Vi skal straks se at alle ledd har fysisk dimensjon av lengde. Kravene er oppfylt!

2.1 Fysiske dimensjoner og enheter

I eksemplet ovenfor inngår det størrelser av fire forskjellige fysiske dimensjoner: tid, lengde, hastighet og akselerasjon. Disse kan ha forskjellige fysiske enheter. For at uttrykkene skal være meningsfulle må hvert ledd ha samme fysiske dimensjon, men vi står fritt til å bruke enhetene vi vil. La oss først se på de fire dimensjonene som inngår:

fysiske dimensjoner		fysiske enheter	
navn	symbol	navn	symbol
tid	T	sekund	s
		time	h
		dag, uke, måned, år	
lengde	L	meter	m
		kilometer	km
		engelsk mile = 1609,344 meter	
		amerikansk mile = 1609,347 meter	
		nautisk mil = 1852 meter	
		1 favn = 3 alen, 1 alen = 2 fot	
hastighet, fart	L/T	1 fot = 2 kvart, 1 kvart = 6 tommer	
		1 tomme = 12 linjer, 1 linje = 12 skruppel	
		meter per sekund	m/s
akselerasjon	L/T^2	knop = nautisk mil per time	kn, kt
		meter per sekund i andre	m/s ²

Tabellen etterlater liten tvil om at det er lett å gå seg vill mellom alle enhetene. Vi skal imidlertid fokusere på dimensjon som er mer generell og som ikke tar stilling til hvilke enheter vi ønsker å bruke.

La oss nå sjekke dimensjonene til hvert ledd i likning (2.1) eller (2.2) ovenfor. Vi bruker L for lengde og T for tid:

Venstre side: L

Høyre side, første ledd: $\frac{L}{T^2}T^2 = L$

Høyre side, andre ledd: $\frac{L}{T}T = L$

Høyre side, tredje ledd: L

Vi ser at alle ledd har samme fysiske dimensjon av lengde, slik de burde ha. Dette betyr ikke at vi har vist at likninga er riktig, men vi har heller ikke funnet noen grunn til å hevde at likninga er feil basert på uoverensstemmelse i fysiske dimensjoner.

2.2 Skalering, skrive likninger på dimensjonsløs form

Noen ganger ønsker vi å frigjøre oss fra de fysiske dimensjonene ved å skrive ei likning på dimensjonsløs form. Dette gjør vi ved skalering. Dette kan gi oss noen fordeler: Vi slipper å forholde oss til mangfoldet av mulige enheter. Det kan være gunstig for å identifisere hvilke størrelser som er store og hvilke som er små, med en mer objektiv målestokk enn valget av en bestemt enhet. Det kan hjelpe oss å skrive likninga på en mest mulig gunstig form. Og ikke minst, vi kan få bedre innsikt.

Vi skalerer ved å identifisere karakteristiske størrelser som utgangspunkt for å introdusere de skalerte dimensjonsløse størrelsene. For eksempel, en dimensjonell tid t kan skaleres ved en karakteristisk tid t_c for å omformulere problemet til den dimensjonsløse og skalerte tiden $t^* = t/t_c$.

Eksempel: Skalering av likning for vertikalt kast i tyngdefelt

Se på z -komponenten av likninga for fritt fall i tyngdefeltet, likning (2.2), som vi skriver på ny:

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + r_0$$

La oss bruke en karakteristisk tid t_c og en karakteristisk lengde l_c som utgangspunkt for å introdusere stjernemerkede størrelser som er skalert slik som nettopp forklart:

$$z^* = \frac{z}{l_c} \quad r_0^* = \frac{r_0}{l_c} \quad t^* = \frac{t}{t_c} \quad v_0^* = \frac{v_0}{\left(\frac{l_c}{t_c}\right)} \quad g^* = \frac{g}{\left(\frac{l_c}{t_c^2}\right)} \quad (2.3)$$

Da kommer likninga på formen

$$z^* = -\frac{1}{2}g^*(t^*)^2 + v_0^*t^* + r_0^* \quad (2.4)$$

Likning (2.4) er dimensjonsløs. Dette kan medføre både en ulempe, en fordel, og diverse muligheter:

- Ulempen er at vi ikke lenger kan bruke fysiske dimensjoner for å sjekke om likninga er fornuftig.
- Vi kan frigjøre oss fra spørsmålet om hvilke enheter vi skal velge for å angi de forskjellige størrelsene (sekunder, timer, år, ..., meter, fot, tommer, ..., etc.)
- Kanskje vi kan velge de karakteristiske størrelsene t_c og l_c i (2.3) slik at resultatet (2.4) blir enklere? For eksempel ved at de dimensjonsløse parameterene g^* og v_0^* og r_0^* kan få spesielt gunstige verdier?
- Kanskje vi kan avgjøre om de dimensjonsløse parameterene g^* og v_0^* og r_0^* har omtrent samme størrelse, eller om noen av dem er mye mindre enn andre, og følgelig kan vi vurdere om noen av leddene er viktigere enn andre?

Vi kan nå ta skaleringen ett hakk videre, nemlig ved å insistere på at t_c og l_c skal velges slik at de dimensjonsløse parameterene g^* og v_0^* og r_0^* blir så enkle som mulig. La oss begrense oss til tilfellet $v_0 > 0$ og la oss insistere på å få $g^* = v_0^* = 1$. Dette oppnår vi ved å sette

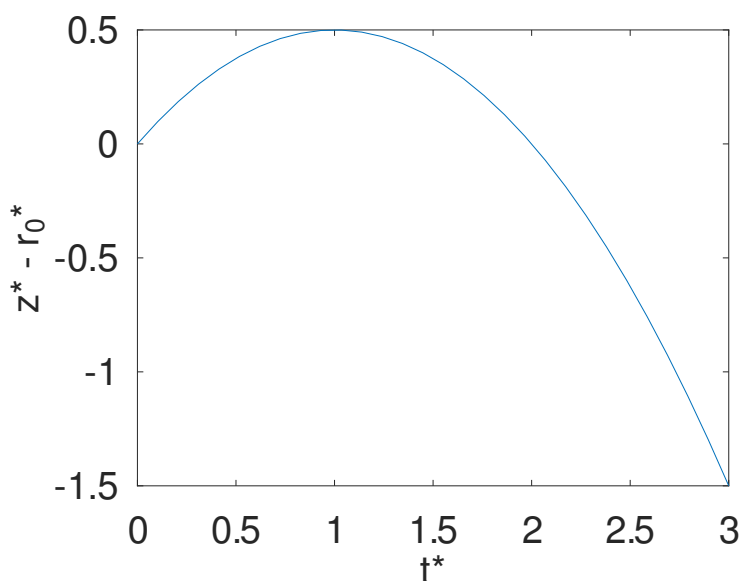
$$t_c = \frac{v_0}{g} \quad \text{og} \quad l_c = \frac{v_0^2}{g} \quad (2.5)$$

og da kommer likninga på formen

$$z^* = -\frac{1}{2}(t^*)^2 + t^* + r_0^* = -\frac{1}{2}t^*(t^* - 2) + r_0^* \quad (2.6)$$

Denne likninga er på en spesielt enkel form, fordi den har kun én dimensjonsløs parameter r_0^* . Faktisk kan vi, ved å flytte r_0^* over på venstre side, begrense oss til å tegne kun én graf som dekker alle tilfellene:

$$z^* - r_0^* = -\frac{1}{2}t^*(t^* - 2) \quad (2.7)$$



Legg merke til at vi har nå redusert alle frie vertikale kast, med utgangshastighet oppover, til én eneste kurve! Vi har ingen frie parametere!

Eksempel: Skalering av likning for skrått kast

Vi ser nok en gang på formelen for fri bevegelse i tyngdefeltet

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \quad (2.8)$$

men denne gangen med en utgangshastighet på skrå med vinkel θ . Dersom vi skriver $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ og $\mathbf{v}_0 = v_0(\mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{k} \sin \theta)$ og $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + z_0\mathbf{k}$ så får vi følgende likninger for horisontal og vertikal bevegelse

$$x = v_0 t \cos \theta + x_0$$

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \theta + z_0$$

Her er det fem parametere: g, v_0, θ, x_0, z_0 . Trenger vi så mange parametere for å karakterisere et vilkårlig skrått kast? La oss redusere ned til kun én parameter!

Framgangsmåten er å skalere alle lengder med en karakteristisk lengde l_c og alle tider med en karakteristisk tid t_c , slik at vi får dimensjonsløse størrelser

$$g^* = \frac{g t_c^2}{l_c}, \quad v_0^* = \frac{v_0 t_c}{l_c}, \quad \theta, \quad x_0^* = \frac{x_0}{l_c}, \quad z_0^* = \frac{z_0}{l_c}, \quad x^* = \frac{x}{l_c}, \quad t^* = \frac{t}{t_c}$$

Legg merke til at vinkelen θ allerede er dimensjonsløs. Det naturlige målet for vinkel, radianer, er nemlig forholdstallet mellom buelengde og radius. Andre mål for vinkel er også dimensjonsløse.

Kanskje den lureste måten vi kan velge l_c og t_c er slik at $g^* = v_0^* = 1$, dette oppnår vi ved å sette $l_c = v_0^2/g$ og $t_c = v_0/g$. Dermed har vi redusert antall parametere til tre: θ, x_0^*, z_0^* .

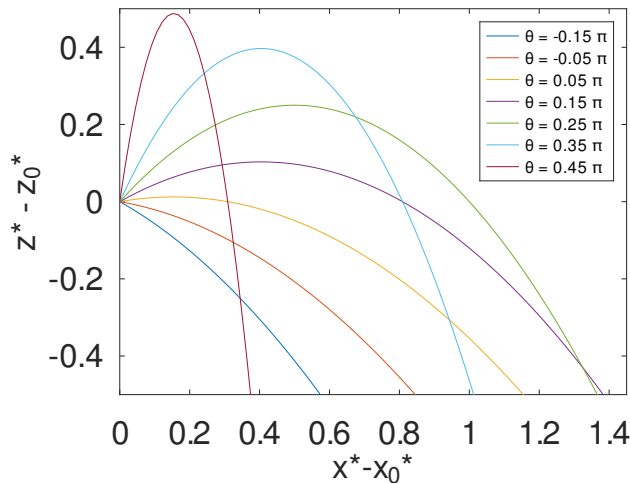
$$x^* = t^* \cos \theta + x_0^*$$

$$z^* = -\frac{1}{2} t^{*2} + t^* \sin \theta + z_0^*$$

Vi kan ta enda et grep, nemlig å eliminere tiden, $t^* = (x^* - x_0^*)/\cos \theta$, slik at vi får kun én likning

$$z^* - z_0^* = -\frac{(x^* - x_0^*)^2}{2 \cos^2 \theta} + (x^* - x_0^*) \tan \theta$$

Resultatet kan vi tegne opp som en én-parameter familie med kurver, de forskjellige kurvene svarer til forskjellige utgangsvinkler θ :



Legg merke til at grepet med å eliminere tiden ikke fungerer dersom utgangshastigheten er vertikal, da er nemlig $\cos \theta = 0$, i så fall må vi tilbake til det forrige eksemplet med vertikalt kast.

Eksempel: Skalering av deriverte

I begge eksemplene ovenfor tok vi utgangspunkt i at løsningene av bevegelseslikninga allerede var kjent. Derfor trengte vi ikke å skalere noen uttrykk med deriverte. Det er imidlertid ofte behov for å skalere derivert også.

Se nå på følgende likning med en derivert:

$$\frac{dx}{dt} = v$$

La oss bruke t_c og l_c for å skalere tid og lengde, og vi introduserer skalerte størrelser

$$v^* = \frac{vt_c}{l_c}, \quad x^* = \frac{x}{l_c}, \quad t^* = \frac{t}{t_c}$$

Vi bruker nå kjerneregelen for derivasjon

$$\frac{d}{dt} = \frac{dt^*}{dt} \frac{d}{dt^*} = \frac{1}{t_c} \frac{d}{dt^*}$$

Til slutt finner vi resultatet

$$\frac{dx^*}{dt^*} = v^*$$

Eksempel: Modell for friksjonskraft med to friksjonskoeffisienter

La oss anta at en friksjonskraft kan modelleres ved likninga

$$\mathbf{F} = -\nu \mathbf{v} - \mu |\mathbf{v}| \mathbf{v}$$

hvor ν og μ er to (positive) friksjonskoeffisienter. Her er ν en koeffisient for den delen av friksjonen som er proporsjonal med hastigheten, og μ er en koeffisient for den delen av friksjonen som er proporsjonal med kvadratet av hastigheten. Hva er de fysiske dimensjonene til friksjonskoeffisientene?

Vi kan se for oss minst to mulige måter å løse denne oppgaven.

La oss først anta at det er kjent at kraft er lik masse ganger akselerasjon, i så fall kan vi utvide tabellen ovenfor med følgende to linjer:

fysiske dimensjoner		fysiske enheter	
navn	symbol	navn	symbol
masse	M	kilogram	kg
kraft	ML/T^2	Newton	$N = \text{kg m/s}^2$

Vi ser fra tabellene ovenfor at kraft har dimensjon ML/T^2 og hastighet har dimensjon L/T . Dersom vi angir de fysiske dimensjonene til koeffisientene som $[\nu]$ og $[\mu]$ så må vi ha

$$ML/T^2 = [\nu]L/T \quad \text{og} \quad ML/T^2 = [\mu](L/T)^2$$

og følgelig får vi

$$[\nu] = \frac{M}{T} \quad \text{og} \quad [\mu] = \frac{M}{L}.$$

Alternativt kunne vi antatt at vi ikke visste at kraft er lik masse ganger akselerasjon. I så fall kunne vi som alternativ utvidet tabellen med følgende ene linje:

fysiske dimensjoner		fysiske enheter	
navn	symbol	navn	symbol
kraft	K	Newton	N

Kraft har nå dimensjon K og hastighet har dimensjon L/T . Dersom vi angir de fysiske dimensjonene til koeffisientene som $[\nu]$ og $[\mu]$ så må vi ha

$$K = [\nu]L/T \quad \text{og} \quad K = [\mu](L/T)^2$$

og følgelig får vi

$$[\nu] = \frac{KT}{L} \quad \text{og} \quad [\mu] = \frac{KT^2}{L^2}.$$

Dimensjonsanalyse og Buckingham's Pi teorem

Det er to viktige spørsmål som passer å stille nå: Hva er det minste antallet dimensjonsløse parametere som er nødvendig for å beskrive et fenomen? Hvordan kan vi vite om et fenomen som skjer på stor skala, for eksempel en flodbølge i en fjord som oppstår på grunn av et ras, kan modelleres på riktig måte i et laboratorieeksperiment på liten skala? Disse spørsmålene besvares av dimensjonsanalyse og Buckingham's Pi teorem. Vi går ikke inn i detaljer her.

2.3 Oppgaver

2.1 Gjør tilsvarende som i eksemplet for fritt vertikalt fall for å beskrive følgende tilfeller:

- (a) Likning (2.2) for tilfellet $v_0 < 0$.
- (b) Likning (2.2) for tilfellet $v_0 = 0$. Nå fungerer ikke (2.5), men anta $r_0 > 0$ og prøv for eksempel $l_c = r_0$ og $t_c = \sqrt{r_0/g}$.

2.2 Dersom en partikkel med masse m beveger seg fritt i tyngdefeltet, men er gjenstand for friksjon som er proporsjonal med hastigheten, så blir den relevante likninga

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \nu \frac{d\mathbf{r}}{dt} - m\mathbf{g} = \mathbf{0}$$

Vi kan legge til startkrav at utgangsposisjon er $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ og utgangshastighet er $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$.

Gjør denne likninga dimensjonsløs for to ulike tilfeller:

- (a) For vertikalt kast, sett $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ og $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{k}$, $\mathbf{r} = z\mathbf{k}$ og $\mathbf{r}_0 = z_0\mathbf{k}$. Betrakt kun den vertikale komponenten av likninga.
- (b) For skrått kast, sett $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ og $\mathbf{v}_0 = v_0(\mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{k} \sin \theta)$ og $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + z_0\mathbf{k}$. Betrakt både vertikal og én horisontal komponent av likninga.

I begge tilfeller, forsøk å presentere resultatet med så få frie parametere som mulig!

Kapittel 3

Bruk av datamaskin

Det er viktig å kunne illustrere felt grafisk. Dette kan gjøres på mange forskjellige måter, og med mange forskjellige verktøy, på datamaskin og for hånd.

I dette kompendiet skal vi stort sett bruke Octave eller Matlab, tilsvarende bøkene til Gjevik og Fagerland (GF) [2] og Lindstrøm og Hveberg (LH) [3]. Forskjellen på Octave og Matlab er hovedsakelig at Matlab er kommersiell og koster penger mens Octave er gratis, for øvrig fungerer de nesten likt.

Som student på UiO har du tilgang til Matlab over Internett. Du får tilgang ved å åpne <http://view.uio.no> i en nettleser, logge inn med din UiO bruker, og deretter velge for eksempel “MatNat Programmering”. Du kan alternativt installere Matlab på din datamaskin, for eksempel ved å følge [denne oppskriften fra MAT1105 H25](#). Det burde også være greit å installere [Octave](#) på din datamaskin.

Vi skal ikke insistere på at grafisk illustrasjon må gjøres med ett spesielt verktøy på datamaskin, fordi mange har sterke meninger som peker i veldig forskjellige retninger. For de som foretrekker Python har vi laget en [oversettelse av GF kapittel 3 og 5 til Python](#) som ligger både på semestersiden V25 og på Leganto V26, og det finnes også en [Python-versjon av MATLAB-appendikset til LH](#). For de som foretrekker Julia har vi laget en [oversettelse av GF kapittel 3 og 5 til Julia](#). Det går også an å benytte [GeoGebra](#). Og det går an å bruke [gnuplot](#). Og ikke minst går det faktisk også an å bruke $\text{\LaTeX}$ med pakken [TikZ](#)! Du velger det verktøyet som er din favoritt!

3.1 Vektor algebra

La $\mathbf{a} = 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ og $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

I Matlab/Octave kan vi skrive

```
a = [1,2,3]
b = [4,5,6]
```

I Python kan vi skrive

```
import numpy as np
a = np.array([1,2,3])
b = np.array([4,5,6])
```

Skalarproduktet eller **indreproduktet** er

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

I Matlab/Octave gjøres dette ved

```
a*b'
```

Her er $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ deklart som radvektorer, mens apostrofen gjør den andre faktoren om fra rad- til søylevektor, og utregningen gjennomføres som en matrisemultiplikasjon mellom en 1×3 radvektor og en 3×1 søylevektor.

I Python kan skalarprodukt utføres med

```
np.inner(a,b)
```

Det dyadiske produktet eller **ytreproduktet** mellom de to vektorene er

$$\mathbf{a}\mathbf{b} \equiv \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = 4\mathbf{i}\mathbf{i} + 5\mathbf{i}\mathbf{j} + 6\mathbf{i}\mathbf{k} + 8\mathbf{j}\mathbf{i} + 10\mathbf{j}\mathbf{j} + 12\mathbf{j}\mathbf{k} + 12\mathbf{k}\mathbf{i} + 15\mathbf{k}\mathbf{j} + 18\mathbf{k}\mathbf{k}$$

I Matlab/Octave gjøres dette ved

```
a'*b
```

Her er $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ deklart som radvektorer, mens apostrofen gjør den første faktoren om fra rad- til søylevektor, og utregningen gjennomføres som en matrisemultiplikasjon mellom en 2×1 søylevektor og en 1×2 radvektor.

I Python kan dyadisk produkt utføres med

```
np.outer(a,b)
```

Kryssproduktet mellom de to vektorene er

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

I Matlab/Octave gjøres dette ved

```
cross(a,b)
```

I Python gjøres dette ved

```
np.cross(a,b)
```

Det komponentvise produktet mellom de to vektorene er

$$1 \cdot 4\mathbf{i} + 2 \cdot 5\mathbf{j} + 3 \cdot 6\mathbf{k} = 4\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 18\mathbf{k}$$

Vi har kanskje ingen standard kompakt notasjon for slike komponentvise produkter når vi skriver for hånd?¹

I Matlab/Octave gjøres dette ved å sette punktum foran operatoren

```
a.*b
```

I Python kan komponentvis produkt utføres med

```
a*b
```

¹Eller kanskje vi har det likevel? Kanskje du kan lage en passende tensor av rang 3 som du kan sette mellom $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, med en prikk på hver side?

3.2 Grafisk illustrasjon av felt

Her begrenser vi oss til Octave/Matlab.

En enkel graf

Vi starter med å plotte grafen $y = x^2$ for $-1 \leq x \leq 1$.

Først deler vi opp intervallet med en passende diskretisering, her med 30 punkter:

```
x = linspace(-1,1,30);
```

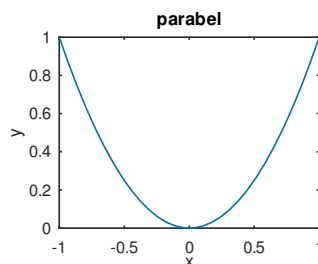
Regn ut funksjonen, tegn kurven, sett navn på aksene og en tittel øverst:

```
y = x.*x;
plot (x, y, 'linewidth', 2) % standard linjetykkelse er litt for tynn?
xlabel ('x')
ylabel ('y')
title ('parabel')
```

Octave har en tendens til å tegne for tynne linjer og for små tall og bokstaver, derfor kan det være lurt å øke størrelsen litt. Ovenfor har grafen allerede blitt tegnet med linjetykkelse 2. Det kan være behov for å øke tilsvarende for koordinatsystemet og dekorasjonen rundt også. Skriv deretter ut på ei fil med passende format:

```
set (gca, 'fontsize', 15, 'linewidth', 2)
print('parabel.pdf','-dpdfcrop') % pdf format, kun selve figuren
% print('parabel.pdf','-dpdf') % plasserer figuren på et helt ark
% print('parabel.png','-dpng') % png format
```

I Octave vil alternativet `-dpdf` sette figuren på et helt ark, noe som ikke er gunstig dersom figuren skal settes inn i et dokument. Alternativet `-dpdfcrop` begrenser resultatet til kun selve figuren:



Illustrasjon av skalarfelt

Vi skal betrakte skalarfeltet $z = x^2 + y^2$ som vi skal illustrere vi på følgende måter:

- kontur for konstant verdi av z
- skjæring i plan for konstant verdi av x eller y

- skygge- eller fargelegging for å skape 3D effekt

Først velger vi intervaller langs x - og y -aksene med passende diskretiseringer. Vi velger $-1 \leq x \leq 1$ og $-2 \leq y \leq 2$ diskretisert med henholdsvis 30 og 40 punkter:

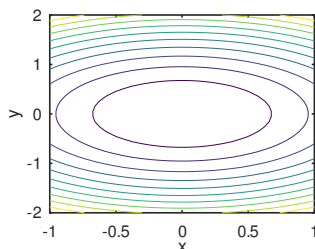
```
x = linspace(-1,1,30);
y = linspace(-2,2,40);
```

Så lager vi et rutenett, dvs. koordinatene til de 30×40 punktene hvor diskretiseringene til x og y krysser hverandre. Og vi regner ut funksjonsverdiene. Ettersom det er 1200 koordinatpar (x, y) , og 1200 funksjonsverdier, så ønsker vi ikke å se alle disse tallene skrevet ut på skjermen! Derfor skjuler vi dette ved å skrive semikolon:

```
[xx,yy] = meshgrid(x,y);
z = xx.^2 + yy.^2;
```

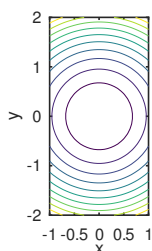
Husk at punktum foran en regneoperasjon betyr at den gjøres komponentvis. Vi kan sjekke størrelsen på disse variablene med `size(x)` og `size(xx)`. Nå er vi klare til å plotte. Først tegner vi konturer for konstante verdier for z :

```
contour(xx,yy,z)
```



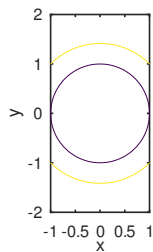
Det er kanskje overraskende at dette ser ut som ellipser og ikke sirkler? For at det skal se ut som sirkler må enhetene langs aksene gjøres like:

```
axis('equal')
```



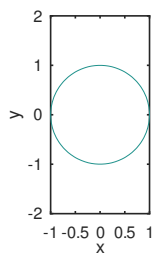
Det kan hende at vi ønsker å spesifisere verdiene til konturene, for eksempel at de skal ha verdier 1 og 2:

```
contour(xx,yy,z,[1,2])
```



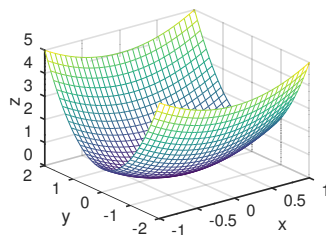
Det kan være greit å vite at dersom vi kun ønsker å tegne konturer med én eneste verdi så må den samme verdien spesifiseres to ganger:

```
contour(xx,yy,z,[1,1])
```



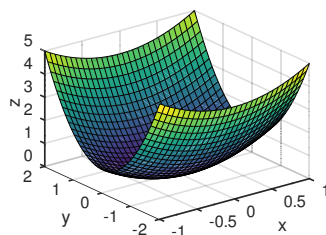
Så lager vi skjæringer for konstante verdier for x og y :

```
mesh(xx,yy,z)
```



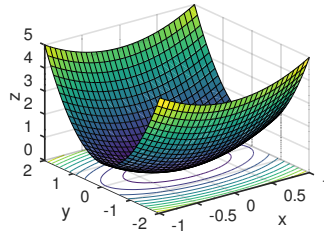
Så lager vi skygge- og fargelegging sammen med skjæringer som ovenfor:

```
surf(xx,yy,z)
```



Og til slutt kombinerer vi dette med konturer nede i xy -planet:

```
surfc(xx,yy,z)
```



Dersom du støter på uforklarlige problemer kan det være greit å vite at kommandoene `rehash` og `rehash toolboxcache` får Matlab til å resette seg, `clear` fjerner alle variabler, og `close` lukker grafikkvinduet.

Illustrasjon av vektorfelt

Ofte ønsker vi å representere et vektorfelt grafisk ved et pileplott. For hvert punkt tegner vi da en pil som har samme retning som vektorfeltet i punktet, og vi lar pilene få riktig innbyrdes lengde sammenliknet med andre piler. Hver pil representerer feltets retning og størrelse i punktet der halen til pila starter.

Vi kan bruke `quiver` for å representere et vektorfelt som pileplott i planet, og `quiver3` for å representere et vektorfelt som pileplott i rommet. Det engelske ordet “quiver” betyr kogger på norsk, altså en kurv hvor man oppbevarer piler.

Eksempel: Vektorfeltet til rotasjon som stivt legeme

Vi skal betrakte vektorfeltet $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \mathbf{r} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ som vi gjenkjenner som rotasjon som stivt legeme. Dette skal vi illustrere ved pileplott.

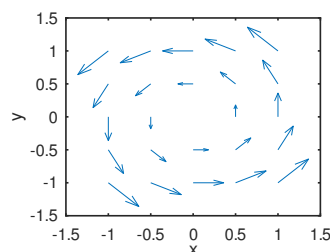
Først velger vi intervaller langs x - og y -aksene med passende diskretiseringer. La oss velge $-1 \leq x \leq 1$ og $-1 \leq y \leq 1$, hver diskretisert med 5 punkter.

NB! I motsetning til visualiseringen av flaten ovenfor, hvor vi brukte et stort antall punkter for at visualiseringen skulle framstå som glatt, ønsker vi nå et pileplott med et relativt lite antall piler for at det skal bli mulig å se hver enkelt pil!

```
x = linspace(-1,1,5);
y = linspace(-1,1,5);
[xx,yy] = meshgrid(x,y);
```

Så bruker vi kommandoen `quiver` som betyr “kogger”:

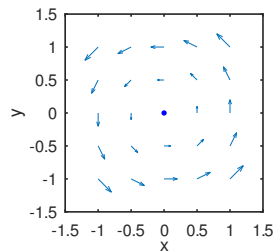
```
quiver (xx, yy, -yy, xx);
```



Til slutt skalerer vi lengden til pilene slik at de blir litt kortere (faktor 0.5), setter navn på aksene, spesifiserer over hvilke intervaller aksene skal gå, ber om at enhetene skal være like lange langs hver akse for at bildet skal bli kvadratisk.

Vi tegner en fet prikk i origo for å indikere at det er et stagnasjonspunkt, med størrelse 20 for at den skal være lett synlig. Standar oppførsel til Octave er å viske ut forrige figur før nest tegnes, men nå ønsker vi å behold pileplottet sammen med prikken, derfor må vi fortelle at grafikken skal “holdes”:

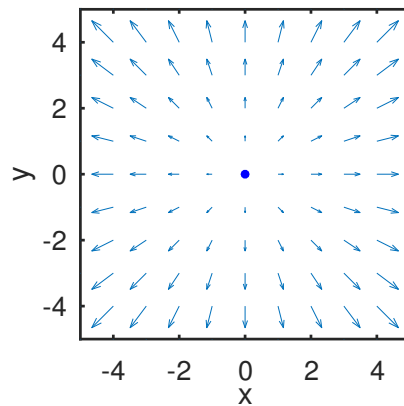
```
quiver (xx, yy, -yy, xx, 0.5);
hold on
plot(0,0,'b.', "MarkerSize", 20)
xlabel('x')
ylabel('y')
axis([-1.5,1.5,-1.5,1.5],'equal')
hold off
```



Eksempel: Visualiser vektorfeltet $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

```
[x,y] = meshgrid(-5:1:5);
vx = x;
vy = y;
quiver(x,y,vx,vy)
% Vi kan indikere stagnasjonspunktet i origo med et kulepunkt.
hold on
plot ([0], [0], 'b.', 'markersize', 20)
% Navn på aksene
xlabel('x')
ylabel('y')
axis([-5,5,-5,5],'equal')
hold off
```

Dette gir følgende plott:

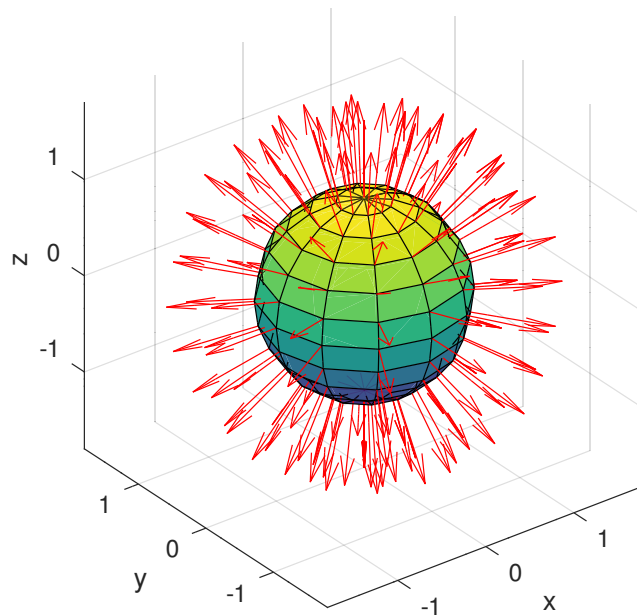


Merk at kommandoen `axis equal` er nødvendig for at innbyrdes vinkel mellom pilene skal se riktig ut.

Eksempel: Følgende program visualiserer et kuleskall og normalvektorer til kuleskallet (vi skal lære om kulekoordinater seinere):

```
% Bruk kulekoordinater for å parametrisere ei kuleflate med radius 1
R = 1 ;
theta = linspace(0,pi,13);
phi = linspace(0,2*pi,13);
% Lag rutenett
[THETA,PHI] = meshgrid(theta,phi);
% Bruk parametriseringen for å regne ut kartesiske koordinater
X = R.*sin(THETA).*cos(PHI);
Y = R.*sin(THETA).*sin(PHI);
Z = R.*cos(THETA);
% Plott kuleoverflata
surf(X,Y,Z)
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
% De kartesiske komponentene til gradienten til skalarfunksjonen
% brukes for å angi retningen til normalvektorene
dX = X ;
dY = Y ;
dZ = Z ;
hold on
% Kommandoen quiver3 tegner piler i 3D rom. Pilene starter i punktene
% gitt ved koordinatene X,Y,Z og peker i retningene gitt ved dX,dY,dZ.
% Vi har angitt en skalering 3 for at pilene skal ta seg bra ut visuelt.
% Dessuten ber vi om at pilene skal være røde.
quiver3 (X,Y,Z,dX,dY,dZ,3,'r')
axis equal
hold off
```

Dette gir følgende plott:



Kommandoen `axis equal` er nødvendig for at kula skal se kulerund ut, uten denne kommandoen vil kula se sammentrykt ut.

Hvor er pilene forankret i et vektor pileplott?

Legg merke til at figur 1.15b i Matthews (1998) [5] er annerledes enn illustrasjonene vi har vist ovenfor: Matthews lar midten av hver pil være forankret i referansepunktet for pila, mens vi har latt halen til hver pil være forankret i referansepunktet for pila. Det er absolutt mest vanlig at halen til hver pil er forankret i referansepunktet.

I Python kan man velge hvor referansepunktet skal plasseres ved parameteren `pivot{'tail', 'mid', 'middle', 'tip'}, default: 'tail'`

i kallet til `quiver`.

3.3 Oppgaver

- 3.1 Visualiser de to-dimensjonale vektorfeltene i oppgave 1.3 på datamaskin.
- 3.2 Visualiser de tre-dimensjonale vektorfeltene i oppgave 1.4 på datamaskin.
- 3.3 Visualiser det tre-dimensjonale vektorfeltet i oppgave 1.5 ved diverse tidspunkter på datamaskin. Visualiser i tillegg partikkelbanen over et tilsvarende tidsintervall.

Kapittel 4

Gradient, retningsderivert, ekkviskalarflater og strømlinjer

4.1 Ordinær og partiell derivert

Ordinær derivert

For en skalar funksjon av én variabel, $f(x)$, definerer vi den deriverte, eller stigningstallet, som grensen

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Om vi tenker oss at Δx ennå ikke har nådd sin grense, men at likninga likevel gir en god tilnærming, så kan vi tilnærme tilveksten til $f(x)$ når vi flytter oss fra x til $x + \Delta x$,

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

Dersom funksjonen er deriverbar, så vil tilnærmingen bli vilkårlig god i grensen at Δx blir vilkårlig liten, da bytter vi ut “ Δ ” med “ d ” for å angi “differensial”

$$df = f'(x) dx$$

hvor df og dx er infinitesimale størrelser.

Det er viktig å poengtere at df og dx ikke bare er symboler, men er faktiske og virkelige størrelser! De kan bære både tensor-rang og fysisk dimensjon!

Partiell derivert

For en skalar funksjon av to variable, $f(x, y)$, definerer vi de partiellderiverte med hensyn på x og y som grensene

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Om vi tenker oss at Δx og Δy ennå ikke har nådd sine grenser, men at likningene likevel gir gode tilnærminger, så kan vi skrive uttrykk for tilveksten til $f(x, y)$ når vi flytter oss fra (x, y) til $(x + \Delta x, y)$, eller fra (x, y) til $(x, y + \Delta y)$, som

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \quad \text{og} \quad f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

NB! Noen ganger ser man notasjonen f_x og f_y som alternativ til $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$. Vi skal ikke bruke slik notasjon! Vi skal oppfatte f_x og f_y som komponentene til vektoren $\mathbf{f} = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j}$.

4.2 Gradient og retningsderivert

Vi fortsetter å betrakte den skalare funksjonen $f(x, y)$ av to variabler x og y .

Tilveksten til $f(x, y)$ når vi flytter oss fra $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ til $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r} = (x + \Delta x)\mathbf{i} + (y + \Delta y)\mathbf{j}$ er

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Dersom vi grupperer leddene sammen parvis ser vi at vi kan gjøre tilnærmingen

$$\Delta f = \{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)\} + \{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)\} \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

I grensen $\Delta x \rightarrow 0$ og $\Delta y \rightarrow 0$ og $\Delta f \rightarrow 0$ skriver vi

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot (\mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy)$$

som kalles et totalt differensial. Det totale differensialet kan vi skrive på kompakt form som

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

hvor

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy$$

er en infinitesimal forflytningsvektor, og hvor

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}$$

kalles gradienten til den skalare funksjonen f .

Vi kan isolere ut ∇ som en vektor-operator. I tre dimensjoner blir den

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

denne kan vi kalle enten “nabla” eller “del”.¹

Nok en gang er det viktig å poengtere at df og $d\mathbf{r}$ ikke bare er symboler, men er faktiske og virkelige størrelser! De kan bære både tensor-rang og fysisk dimensjon!

¹Det matematiske symbolet ∇ ble oppfunnet av William Rowan Hamilton (1805–1865). Ordet “nabla” kommer fra gresk eller arameisk språk og er navnet på en antikk harpe som ser ut som symbolet ∇ .

Retningsderivert = stigningstall langs en retning

La $\mathbf{a}$ være en enhets retningsvektor, $|\mathbf{a}| = 1$. La oss betrakte ei linje som går igjennom punktet $\mathbf{r}_0$ langs retningen til $\mathbf{a}$, og la s være avstanden fra $\mathbf{r}_0$ til $\mathbf{r}$. Vi sier at vi parametriserer posisjonsvektor $\mathbf{r}$ med avstanden s :

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}s$$

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds = \mathbf{a} ds$$

Differensialet til den skalare funksjonen f kan da skrives

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \nabla f \cdot \mathbf{a} ds$$

Den retningsderiverte til f i retning $\mathbf{a}$ er

$$\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \mathbf{a}$$

Vi skal kreve at $|\mathbf{a}| = 1$ for at den retningsderiverte skal ha en intuitivt riktig verdi. Vi ønsker nemlig at s skal måle avstanden som vi beveger oss langs linja.

NB! Legg merke til at noen matematiske tekster tillater $|\mathbf{a}| \neq 1$ (se for eksempel LH 2.4 sin kommentar midt på side 119, legg for øvrig merke til at LH 2.4 har byttet om $\mathbf{a}$ og $\mathbf{r}$ i forhold til presentasjonen her [3]).

Egenskaper til gradienten til en skalar ∇f

For en funksjon $f(\mathbf{r})$ kan den retningsderiverte i retningen til $\mathbf{a}$ skrives som

$$\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \mathbf{a} = |\nabla f| |\mathbf{a}| \cos \theta = |\nabla f| \cos \theta$$

Her tenker vi oss at vi står i et punkt $\mathbf{r}_0$ og beveger oss i retning $\mathbf{a}$ i henhold til en parametrisering $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{a}$ hvor parameteren s angir avstanden fra punktet $\mathbf{r}_0$ i $\mathbf{a}$ sin retning. Vi skal insistere på at $|\mathbf{a}| = 1$ slik at s faktisk måler avstand. Vinkelen mellom ∇f og $\mathbf{a}$ er θ .

Vi ser at den største verdien for den retningsderiverte oppnås for $\theta = 0$, det vil si når $\mathbf{a}$ og ∇f peker i samme retning. Vi kan sette $\mathbf{a} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ og vi ser at den største verdien til den retningsderiverte er $|\nabla f|$.

Vi ser også at dersom $\mathbf{a} \perp \nabla f$ så er den retningsderiverte lik null.

Eksempel: Hvor bratt er et terreng i en bestemt retning?

Et terreng er gitt ved

$$z = h(x, y) = x^2 - y^2$$

hvor x peker mot øst, y peker mot nord, z -aksen peker oppover, og $h(x, y)$ er høyden til terrenget. Undersøk om likninga er gitt på dimensjonell eller dimensjonsløs form. Finn stigningstallet i punktet $\mathbf{r} = \mathbf{i}$ ($x = 1$ og $y = 0$) i retning nordøst.

Først undersøker vi om likninga er dimensjonell eller ikke: Vi innser at x , y og z må representere lengder. Dersom likninga var dimensjonell så ville høyresiden ha dimensjon av areal mens venstresiden vil ha dimensjon av lengde. Dette er en

selvmotsigelse da en lengde ikke kan være lik et areal. Følgelig innser vi at likninga er gitt på dimensjonsløs form.

Retningen nordøst betyr at vi går like mye mot nord og øst, for eksempel $\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Vi insisterer imidlertid på at $|\mathbf{a}| = 1$, så vi må normalisere lengden $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}}$. Gradienten til h er $\nabla h = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$. Den retningsderiverte er $\nabla h \cdot \mathbf{a} = \sqrt{2}(x - y)$. Stigningstallet i punktet $\mathbf{r} = \mathbf{i}$ i retning nordøst er $\nabla h \cdot \mathbf{a}|_{x=1, y=0} = \sqrt{2}$.

Eksempel: I hvilken retning øker temperaturen mest?

Temperaturen i et rom er gitt ved

$$T(x, y, z) = \alpha(x + 2y - 3z).$$

Dersom T har fysisk dimensjon temperatur og x, y, z har fysisk dimensjon lengde, hva er den fysiske dimensjonen til α ? I hvilken retning øker temperaturen mest, og hvor mye?

Først innser vi at den fysiske dimensjonen til α må være $[\alpha] = \frac{\text{temperatur}}{\text{lengde}}$.

Gradienten til temperaturen er $\nabla T = \alpha(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$. Vi vet at temperaturen øker mest i retningen til gradienten. Den retningsderiverte i den retningen er lik $|\nabla T| = \alpha\sqrt{14}$.

Vi kan også regne ut enhets retningsvektor i retningen som temperaturen øker mest $\mathbf{a} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}}{\sqrt{14}}$.

4.3 Taylor-utvikling

Oppkalt etter Brook Taylor (1685–1731) som ble født samme år som komponistene Johann Sebastian Bach, Georg Friedrich Händel og Domenico Scarlatti!

Taylor-utvikling i én variabel

Taylor-utviklingen av en funksjon $f(x)$ rundt et punkt x_0 er

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)(x - x_0)^n + \cdots$$

Ta som eksempel $f(x) = \cos x$ og $x_0 = 0$, da får vi

$$f(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots$$

Følgende program i Matlab/Octave:

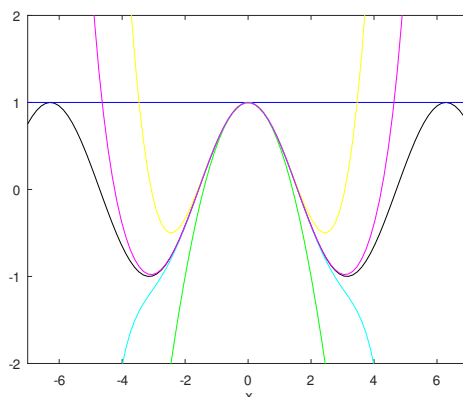
```
% Taylor-utvikling av cos(x) rundt origo
xmax=7;
n=100;
x=linspace(-xmax,xmax,n);
hold off
% funksjonen i svart
plot(x,cos(x),'k');
axis([-xmax xmax -2 2])
```

```

xlabel('x')
hold on
% potens null i blå
plot ([-xmax xmax], [1 1], 'b');
% potens to i grønn
plot (x, 1 - 1/2*x.^2, 'g');

```

produserer kurvene i svart, blå og grønn i følgende plott:



Vis at dersom Taylor-utviklingen fortsettes vil resultatet til fjerde, sjette og åttende potens være gitt ved kurvene tegnet i gul, cyan og magenta!

Konklusjonen ser uansett ut til å være at Taylor-utviklingen er god for $|x|$ liten og svært dårlig for $|x|$ stor.

Taylor-utvikling i flere variable

Taylor-utviklingen av en funksjon $f(x, y)$ rundt et punkt (x_0, y_0) er

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (4.1)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \quad (4.2)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 + \dots \quad (4.3)$$

Vi trenger nå følgende resultat fra matematikken, se LH 2.5.2 [3]:

Dersom $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ eksisterer og er kontinuerlige, så er de like.

Vi skal anta at dette er tilfellet for oss, så vi kan skrive

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (4.4)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \quad (4.5)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 + \dots \quad (4.6)$$

Eksempel: Taylor-utvikling i to variable

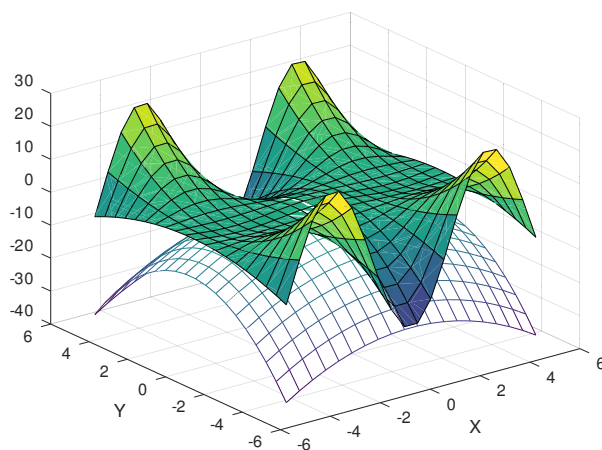
Ta som eksempel $f(x, y) = (1 - y^2) \cos x$ og $x_0 = y_0 = 0$, da får vi

$$f(x, y) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 - y^2 + \dots$$

Følgende program i Matlab/Octave illustrerer funksjonen $f(x, y)$ og Taylor-utviklingen:

```
% Taylor-utvikling av (1-y^2)*cos(x) rundt origo
% over kvadratisk område i xy-planet
maks=5;
n=20;
[x,y]=meshgrid(linspace(-maks,maks,n));
hold off
% funksjonen i solid flate
surf(x,y,cos(x).*(1-y.^2));
hold on
% Taylor-utvikling til potens 2 i nett
mesh(x,y,1-0.5*x.^2 - y.^2);
xlabel('X')
ylabel('Y')
```

produserer de to flatene som er vist i følgende plott:



Inne i Matlab/Octave kan man bruke musa på figuren for å dreie den rundt, for å få et inntrykk av hvordan Taylor-utviklingen tilnærmer funksjonen i x - og y -retning.

4.4 Å finne skalarfunksjonen når gradienten er kjent

Dersom et vektorfeltet kan skrives som gradienten til et skalarfelt, $\mathbf{v} = \nabla \phi$, sier vi at vektorfeltet $\mathbf{v}$ er konservativt og vi kaller skalarfeltet ϕ et skalarpotensial eller bare potensial. Vi skal nå studere hvordan vi kan finne ϕ ved å løse differensiallikninga $\mathbf{v} = \nabla \phi$ direkte.

Eksempel:

Finn ϕ når $\nabla\phi = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Vi har

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

De tre koordinat-retningene står ortogonalt på hverandre, og følgelig ser vi at vi må løse et system av tre likninger som vi skriver på komponentform.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = y \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = x \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = 1$$

Alternativ I:

Likningene er ganske enkle å løse

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = y \quad \implies \quad \phi = xy + f_1(y, z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x \quad \implies \quad \phi = xy + f_2(x, z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 1 \quad \implies \quad \phi = z + f_3(x, y)$$

hvor de tre funksjonene f_1 , f_2 og f_3 er tilfeldige integrasjonskonstanter for hver integrasjon (konstanter med hensyn på variabelen det ble integrert med hensyn på). For at svaret skal bli entydig må vi velge disse tre funksjonene slik at de tre løsningene ovenfor kommer i overensstemmelse. Dette problemet kan vi løse ved å “stirre” på likningene ovenfor, og være tilstrekkelig kreativ for å “komme på” en passende løsning

$$f_1(y, z) = z + c, \quad f_2(x, z) = z + c, \quad f_3(x, y) = xy + c$$

hvor c er en tilfeldig konstant. Svaret blir følgelig

$$\phi(x, y, z) = xy + z + c$$

hvor c er en tilfeldig konstant.

Legg merke til at skalarfunksjonen ϕ ikke er entydig definert fordi vi kan velge c til å ha hvilken som helst verdi!

Alternativ II:

Dersom vi ikke liker å “stirre” kan vi gå forsiktigere til verks. Først ser vi på komponentlikninga i x -retning

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = y \quad \implies \quad \phi = xy + f(y, z)$$

hvor f er en integrasjonskonstant med hensyn på x , og deretter setter vi dette inn i komponentlikninga i y -retning

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x \quad \implies \quad x + \frac{\partial f}{\partial y} = x \quad \implies \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \implies \quad f = g(z)$$

hvor g er en integrasjonskonstant med hensyn på y , og deretter setter vi dette inn i komponentlikninga i z -retning

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 1 \quad \implies \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 1 \quad \implies \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 1 \quad \implies \quad g = z + c$$

hvor c er en integrasjonskonstant. Så substituerer vi tilbake og får samme svar

$$\phi(x, y, z) = xy + z + c.$$

Denne gangen kom vi i mål uten verken å “stirre” eller være kreativ, men skrivearbeidet var mer omstendelig.

Eksempel: Noen ganger eksisterer det ikke en skalarfunksjon

Se på vektorfeltet $y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ og forsøk å finne en skalarfunksjon ϕ slik at gradienten til ϕ gir nevnte vektorfelt

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} \stackrel{?}{=} y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$$

På komponentform får vi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} = y & \implies \phi = xy + f(y) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = xy & \implies \phi = \frac{1}{2}xy^2 + g(x) \end{aligned}$$

hvor f og g er integrasjonskonstanter. Disse to uttrykkene ser ikke ut til å komme overens!

Vi kan få en litt dypere forståelse ved å se på de blandede dobbeltderiverte

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 1 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = y \end{aligned}$$

Disse er forskjellige. Husk LH setning 2.5.2 [3]:

Dersom $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$ og $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$ eksisterer og er kontinuerlige, så er de like.

Det kontrapositive² utsagnet blir

Dersom $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$ og $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$ er ulike så er de enten diskontinuerlige eller så eksisterer de ikke.

I dette tilfellet er de ikke like, og alle uttrykkene er kontinuerlige, så vi må konkludere at de ikke eksisterer! Det er skalarfunksjonen ϕ som ikke eksisterer. Vi har følgelig vist at vektorfeltet $y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ ikke er gradienten til en skalarfunksjon.

²Det logiske utsagnet “Hvis Q, så P” er ekvivalent med det kontrapositive utsagnet “Hvis ikke P, så ikke Q”

4.5 Ekviskalarflater og flatenormalvektor

Vi skal nå se på uttrykk av typen $\beta(x, y, z) = \text{konstant}$. Dette uttrykket er tvetydig, fordi det kan enten bety at $\beta(x, y, z)$ er definert til å være en konstant eller det kan bety at $\beta(x, y, z)$ er en funksjon av x og y og z som tvinges til å holde en konstant verdi. Vi er interessert i det siste tilfellet, og dette vil gi en relasjon mellom verdiene til x og y og z som beskriver en flate. Denne flaten skal vi kalle for en ekviskalarflate fordi skalarfunksjonen β holdes på konstant verdi.

Det er altså viktig at vi sier tydelig ifra hva vi mener med uttrykk av typen $\beta(x, y, z) = \text{konstant}$.

Eksempel: For skalarfunksjonen $\beta(x, y, z) = x$, beskriv ekviskalarflaten $\beta(x, y, z) = 1$. Dette er $x = 1$ som er et plan parallelt med yz -planet.

Eksempel: For skalarfunksjonen $\beta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, beskriv ekviskalarflaten $\beta(x, y, z) = R^2$. Dette er et kuleskall med radius R sentrert rundt origo.

Eksempel: Et terreng er gitt ved høydefunksjonen $z = h(x, y)$ hvor x og y er horisontale koordinater, z -aksen peker oppover, og funksjonen $h(x, y)$ angir høyden til terrenget. Vi definerer skalarfunksjonen $\beta(x, y, z) = z - h(x, y)$. Terrenget kan betraktes som ekviskalarflaten $\beta(x, y, z) = 0$.

Flatenormalvektor til en ekviskalarflate

Vi skal vise at $\nabla\beta$ står normalt på ekviskalarflaten $\beta(\mathbf{r}) = \text{konstant}$.

Alternativ I: Bruk formelen for totalt differensial

Vi står i et punkt $\mathbf{r}_0$ på en ekviskalarflate $\beta(\mathbf{r}) = \text{konstant}$, og vi regner ut gradienten $\nabla\beta$. La oss betrakte en infinitesimal forflytning $d\mathbf{r}$ fra punktet $\mathbf{r}_0$ til et nytt punkt $\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}$ på samme ekviskalarflate $\beta(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}) = \text{konstant}$. Husk formelen for totalt differensial $d\beta = \nabla\beta \cdot d\mathbf{r}$. Dersom $d\mathbf{r}$ er en forflytning til et nytt punkt på samme ekviskalarflate, så kan ikke β endre verdi, det vil si $d\beta = 0$, og følgelig har vi $\nabla\beta \cdot d\mathbf{r} = 0$. Da må enten $\nabla\beta \perp d\mathbf{r}$ eller $\nabla\beta = \mathbf{0}$.

NB! Det spesielle alternativet $\nabla\beta = \mathbf{0}$ opptrer gjerne når det ikke er meningsfullt å snakke om en normalvektor. Et typisk eksempel kommer like nedenfor!

Alternativ II: Bruk formelen for retningsderivert

Se på den retningsderiverte til $\beta(\mathbf{r})$ i en retning $\mathbf{a}$, $\frac{d\beta}{ds} = \nabla\beta \cdot \mathbf{a}$, hvor s er en parameter som måler avstanden vi forflytter oss langs retningen til $\mathbf{a}$. Dersom vi insisterer på at retningen til $\mathbf{a}$ er i tangentplanet til ekviskalarflaten så skal ikke β endre sin verdi når vi flytter oss infinitesimalt, det vil si $\nabla\beta \cdot \mathbf{a} = 0$. Da må enten $\nabla\beta \perp \mathbf{a}$ eller $\nabla\beta = \mathbf{0}$.

Eksempel: Finn enhetsnormalvektor til flaten $x = 0$.

Vi ser umiddelbart at flaten er yz -planet. Vi kan beskrive flaten som en ekviskalarflate til $\beta(x, y, z) = x$, nemlig $\beta = 0$. Derfor regner vi ut $\nabla\beta = \nabla x = \mathbf{i}$. Denne har allerede enhetslengde, men for ordens skyld kan vi skrive enhetsnormalvektor

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla x}{|\nabla x|} = \pm \mathbf{i}$$

Her har vi markert to alternative løsninger, nemlig at normalvektor kan peke i positiv eller negativ x -retning.

Eksempel: Finn enhetsnormalvektor til kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Vi kan beskrive flaten som en ekviskalarflate til $\beta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, nemlig $\beta = R^2$. Derfor regner vi ut $\nabla\beta = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$. For å finne en normalvektor med enhetslengde skriver vi

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|} = \pm \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{R}$$

Igjen har vi markert to løsninger, nemlig at normalvektor kan peke inn mot sentrum eller ut fra sentrum.

NB! For det spesielle tilfellet av radius lik null, $R = 0$, reduseres kuleflaten til kun ett punkt som er sentrum i kula. I dette tilfellet er $\nabla\beta = \mathbf{0}$ og formelen for normalvektor fungerer ikke (den blir et $0/0$ uttrykk og har ikke entydig retning). Det er selvfølgelig ikke meningsfullt å snakke om en normalvektor til en "flate" som ikke har større utstrekning enn ett eneste punkt!

4.6 Strømlinjer/Feltlinjer

Strømlinjene eller feltlinjene til et vektorfelt $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ er kurver som har vektorfeltet som tangent overalt.

Husk: For to vektorer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ har vi $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$ hvor θ er vinkelen mellom $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$. Dersom vektorene $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er parallelle $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$ så er $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$. Motsatt vei har vi at dersom kryssproduktet er null $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ så er de enten parallelle $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$ eller minst en av dem er nullvektor $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ eller $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

La oss tenke oss at strømlinjene har infinitesimale tangentvektorer $d\mathbf{r}$. Vi krever at $d\mathbf{r}$ er parallell med $\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \parallel d\mathbf{r}$. Dette kan vi skrive som

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

Dette er likninga som vi må løse for å finne strømlinjene. Vi forstår at likninga antakelig ikke kommer til å fungere i punkter hvor $\mathbf{v}$ enten er nullvektor eller har en singularitet.

Punkter hvor $\mathbf{v}$ er nullvektor skal vi kalle stagnasjonspunkter. Punkter hvor $\mathbf{v}$ er singulær skal vi kalle singulære punkter.

Eksempel: La $\mathbf{v} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. Finn strømlinjene!

Først legger vi merke til at $\mathbf{v}$ ikke er singulær noe sted, men er nullvektor i origo. Følgelig er origo et stagnasjonspunkt.

Med posisjonsvektor $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ så blir differensialet $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$.

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -y & x & 0 \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = x dz \mathbf{i} + y dz \mathbf{j} + (-y dy - x dx) \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Denne likninga løser vi komponentvis

$$x \, dz = 0 \quad y \, dz = 0 \quad -y \, dy - x \, dx = 0$$

Første likning har løsning $x = 0$ eller $z = \text{konstant}$.

Andre likning har løsning $y = 0$ eller $z = \text{konstant}$.

Tredje likning er ei separabel ordinær differensiallikning, $x \, dx = -y \, dy$, og løses ved å ta integralet på begge sider, $\int x \, dx = -\int y \, dy$, som gir $\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}y^2 + \text{konstant}$.

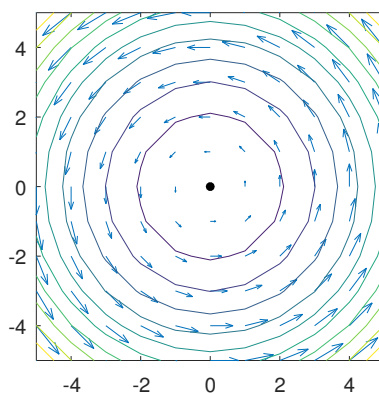
Den fulle løsningen blir da $x^2 + y^2 = \text{konstant}$ og $z = \text{konstant}$, altså sirkler med sentrum i $x = y = 0$ og som ligger i plan parallelle med xy -planet.

Ekviskalarkurver for skalarfunksjonen $f(x, y)$ lager vi med `contour`, og pileplott for vektorfeltet $\mathbf{v}$ lager vi med `quiver`, som forklart i seksjon 3.2.

Følgende program i Matlab/Octave visualiserer strømlinjene sammen med et pilplott for vektorfeltet, og vi spanderer en stor svart prikk i stagnasjonspunktet:

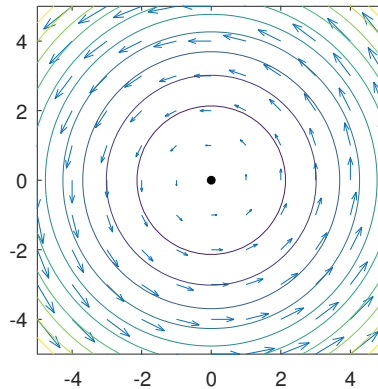
```
[x,y] = meshgrid(-5:1:5);
vx = -y;
vy = x;
quiver(x,y,vx,vy)
% følgende for at sirklene skal se ut som sirkler og ikke ellipser:
axis equal
f = x.^2 + y.^2;
hold on
contour (x, y, f)
% følgende markerer stagnasjonspunktet med et svart kulepunkt:
plot (0, 0, '.k', 'markersize', 20)
hold off
```

og produserer følgende plott:



Dette plottet har i hvert fall ikke for få piler, men sirklene er ikke spesielt pene. Rutenettet er kanskje for fint for pilene, men for grovt for kurvene. Løsningen er i så fall å bruke forskjellig rutenett for `quiver` og `contour`, for eksempel

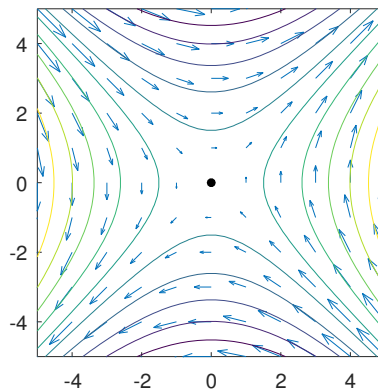
```
[x,y] = meshgrid(linspace(-5,5,40));
f = x.^2 + y.^2;
contour (x, y, f)
```



Eksempel: La $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. Finn strømlinjene!

Vi kan vise at i dette tilfellet er strømlinjene gitt ved $x^2 - y^2 = \text{konstant}$ og $z = \text{konstant}$, altså hyperbler som ligger i plan parallelle med xy -planet.

Vi kan modifisere skriptet ovenfor (det trengs kun å endre to fortegn) og få følgende figur:



Nok en gang er det behov for å bruke forskjellig oppløsning i rutenett for antall piler kan være forholdsvis lite samtidig som kurvene til konturplottet blir tilstrekkelig glatte.

Eksempel: La $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. Finn partikkelbanene!

Vi skal løse $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$. På komponentform blir dette $\frac{dx}{dt} = y$ og $\frac{dy}{dt} = x$. Dette er et system av to koblede likninger. Vi kan eliminere y for å få ei likning for kun x ved å ta den deriverte av den første likninga og substituere inn den andre likninga, $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = x$. Vi står igjen med $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$. Dette er ei lineær ordinær differensiallikning med konstante koeffisienter, som vi løser ved å anta $x(t) = ae^{mt}$ hvor a er en vilkårlig konstant og m må bestemmes. Substitusjon inn i likninga gir $a(m^2 - 1)e^{mt} = 0$. Ettersom eksponentialfunksjonen ikke kan være lik null, og vi ikke ønsker å tvinge a til å være null, så må vi oppfylle den karakteristiske likninga $m^2 - 1 = 0$. Vi finner to karakteristiske røtter, $m = \pm 1$. Dermed kan vi skrive den generelle løsninga $x(t) = ae^t + be^{-t}$ hvor a og b er to vilkårlige konstanter. Vi finner deretter $y(t) = \frac{dx}{dt} = ae^t - be^{-t}$. Vi har nå funnet partikkelbanen parametrisert ved t . Vi kan nå

finne et uttrykk for partikkelbanen uten referanse til parameteren ved å innse at $x^2 - y^2 = 4ab =$ en vilkårlig konstant. Legg merke til at partikkelbanene er identiske med strømlinjene som vi fant i forrige eksempel!

Er strømlinjer og partikkelbaner alltid like?

Dersom vi starter med likninga for en partikkelbane

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

og multipliserer opp dt

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) dt$$

og deretter krysser med $d\mathbf{r}$, så får vi

$$d\mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times d\mathbf{r} dt$$

så ser vi at resultatet blir

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}$$

som er likninga for strømlinjer for hver fastholdt verdi for t .

Vi innser følgelig at partikkelbaner er identiske med strømlinjer dersom vektorfeltet $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ ikke er funksjon av parameteren t .

Dersom vektorfeltet $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ er funksjon av parameteren t så kan strømlinjene for hver fastholdt verdi av t enten være lik eller ulik partikkelbanene (se oppgaver nedenfor).

En partikkelbane er som en reise i tid og rom, som vi kan fange opp i en video som løper over tid. En strømlinje er derimot et øyeblikksbilde som kan fanges opp i et fotografi ved ett bestemt tidspunkt.

4.7 Oppgaver

4.1 Finn gradienten til følgende skalarfunksjoner

(a) $f = x^2 + 2xy + 3z^2$

(b) $f = e^{-y} \cos x$

(c) $f = \frac{xy}{z}$

4.2 Finn den retningsderiverte til skalarfunksjonen $f = e^{-y} \cos x$ i punktet $x = y = 1$ langs linja $y = 2x$.

4.3 Finn Taylor-utviklingen opp til andre ordens (kvadratiske) ledd til skalarfunksjonen $f = e^{-y} \cos x$ rundt punktet $x = y = 1$.

4.4 Undersøk om følgende vektorfelt kan skrives som gradienten til en skalarfunksjon, $\mathbf{v} = \nabla\phi$, og finn i så fall skalarfunksjonen ϕ :

(a) $\mathbf{v} = \mathbf{i}$

(b) $\mathbf{v} = \mathbf{j}$

- (c) $\mathbf{v} = x\mathbf{i}$
- (d) $\mathbf{v} = x\mathbf{j}$
- (e) $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
- (f) $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
- (g) $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
- (h) $\mathbf{v} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
- (i) $\mathbf{v} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/\sqrt{x^2 + y^2}$
- (j) $\mathbf{v} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$
- (k) $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$
- (l) $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
- (m) $\mathbf{v} = -2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

4.5 Finn partikkelbanene (løsning av $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$) med $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$, og finn strømlinjene som går igjennom origo for ulike fastholdte verdier for t , for følgende vektorfelt:

- (a) $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j}t$
- (b) $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} \sin t + \mathbf{j}$

4.6 Vis at for vektorfeltet $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = xt\mathbf{i} + yt\mathbf{j}$, med $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, er strømlinjene for ethvert tidspunkt $t > 0$ lik partikkelbanene gitt ved løsningen av $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$.

Kapittel 5

Kurve-, flate- og volumintegral

5.1 Kurveintegral

Vi skal integrere et skalarfelt f eller et vektorfelt $\mathbf{F}$ langs en kurve γ . Langs kurven tenker vi oss infinitesimale kurveelementer $d\mathbf{r}$, og vi forutsetter at kurven er tilstrekkelig glatt til at det er fornuftig å tenke på kurveelementene $d\mathbf{r}$ som tangenter til kurven. Kurven er orientert, dvs. den går fra ett punkt til et annet i en gitt retning som er indikert ved retningen til $d\mathbf{r}$. Vi kan være interessert i å regne ut kurveintegraler av typen

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad \int_{\gamma} \mathbf{F} \times d\mathbf{r}, \quad \int_{\gamma} \mathbf{F} d\mathbf{r}, \quad \int_{\gamma} f d\mathbf{r}, \quad \int_{\gamma} f dr, \quad \text{etc.}$$

langs kurven γ . Her er $dr = |d\mathbf{r}|$.

I det spesielle tilfellet at kurven starter og slutter på samme sted vil integralet være rundt en lukket kurve, da skriver vi gjerne en sirkel rundt integraltegnet

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad \oint_{\gamma} \mathbf{F} \times d\mathbf{r}, \quad \oint_{\gamma} \mathbf{F} d\mathbf{r}, \quad \oint_{\gamma} f d\mathbf{r}, \quad \oint_{\gamma} f dr, \quad \text{etc.}$$

Noen ganger, for eksempel for å implementere kurveintegraler på datamaskin, kan vi tenke oss at kurven er delt opp i rette kurveelementer av endelig lengde, $\Delta\mathbf{r}_i$, og tilnærme kurveintegralet ved en sum over kurveelementene, for eksempel $\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \Delta\mathbf{r}_i$. I grensen at $|\Delta\mathbf{r}_i| \rightarrow 0$ går $\Delta\mathbf{r}_i$ over til det infinitesimale kurveelementet $d\mathbf{r}$ og summen over til et integral, $\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \Delta\mathbf{r}_i \rightarrow \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Vi kan la kurven være parametrisert med en parameter t . Noen ganger kan vi tenke oss at parameteren er tiden som løper mens vi flytter oss langs kurven, andre ganger kan vi tenke oss at parameteren er avstanden tilbakelagt langs kurven, men parameteren trenger verken å være tid eller avstand. Når parameteren øker fra t til $t + \Delta t$ vil vi forflytte oss langs kurven

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \approx \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Delta t.$$

I grensen at $\Delta t \rightarrow 0$ blir forflytningen infinitesimal og vi skriver $d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$. I det spesielle tilfellet at parameteren kan tolkes som tid, så beveger vi oss langs kurven med hastighet $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

Eksempel: Omkretsen til en sirkel med radius R

La kurven γ (altså sirkelen) være parametrisert med vinkelen θ :

$$\mathbf{r}(\theta) = R \cos \theta \mathbf{i} + R \sin \theta \mathbf{j} \quad \text{med} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Vi har

$$d\mathbf{r} = (-R \sin \theta \mathbf{i} + R \cos \theta \mathbf{j}) d\theta$$

og

$$dr = |d\mathbf{r}| = \sqrt{R^2 \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \theta} d\theta = R d\theta$$

og omkretsen blir

$$\oint_{\gamma} dr = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R.$$

Eksempel fra fysikk: Arbeid = kraft prikket med vei

Dersom en konstant kraft $\mathbf{F}$ virker over en rettlinjett bevegelse $\Delta \mathbf{r}$ så er arbeidet utført av kraften $\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$.

Arbeid er energi og kan måles i Joule ($J = N \cdot m = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$), kraft kan måles i Newton ($N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$) og vei kan måles i meter (m). Vi har $J = N \cdot m$.

Dersom kraften ikke er konstant, eller veien ikke er rett, så tar vi først grensen at forflytningene blir infinitesimale, $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, og integrerer, og vi får arbeidet uttrykt ved kurveintegralet

$$W = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

To spørsmål om kurveintegraler

Dersom vi skal beregne et kurveintegral som starter i et punkt $\mathbf{r}_0$ og ender opp i et annet punkt $\mathbf{r}_1$, så kan det være mange veier for å komme seg fra $\mathbf{r}_0$ til $\mathbf{r}_1$, og det kan være mange måter å parametrisere hver vei. To spørsmål dukker opp:

- Gir forskjellige parametriseringer av samme vei samme svar?
- Gir forskjellige veier mellom samme endepunkter samme svar?

Det første spørsmålet er hva som omhandles av LH setning 3.3.6 for skalarfelt og av LH setning 3.4.5 for vektorfelt [3]. Setningene sier at to parametriseringer av samme kurve skal gi samme svar for kurveintegralet for skalar- eller vektorfelt. Vi skal straks gi et eksempel som viser hvor viktig det er at forutsetningene for å bruke disse setningene må være oppfylt!

Eksempel: Friksjonskraft

Friksjon forsøker å bremse en bevegelse, typisk vil friksjonskraften være rettet motsatt hastigheten. Det er vanlig at friksjonskraften øker med hastigheten. Den enkleste modellen for friksjonskraft er at den er proporsjonal med hastigheten. La oss anta formelen $\mathbf{F} = -\mu \mathbf{v}$ hvor $\mu > 0$ er en friksjonskoeffisient og $\mathbf{v}$ er hastigheten vi beveger oss med.

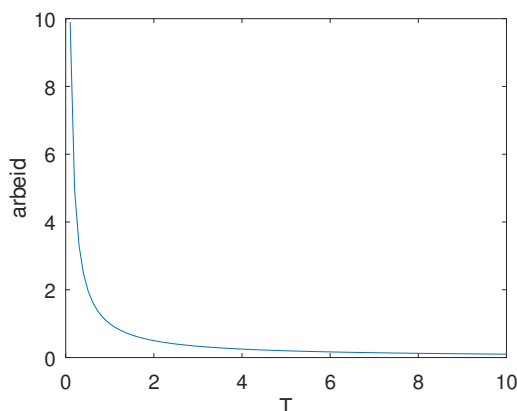
For å studere friksjonskraft kan det være naturlig å velge tiden t som parameter. Vi betrakter $\mathbf{r}(t)$ som representasjon av banen eller kurven γ som vi beveger oss langs. Hastigheten er $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, følgelig har vi $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$.

La oss finne arbeidet som friksjonskraften $\mathbf{F} = -\mu\mathbf{v}$ gjør for rettlinjet bevegelse med konstant hastighet langs x -aksen fra $x = 0$ til $x = L$.

Vi antar at vi forflytter oss en avstand L i løpet av en tid T med konstant hastighet. Farten er $v = L/T$. Hastigheten er $\mathbf{v} = \frac{L}{T}\mathbf{i}$. Vi har $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, og arbeidet blir

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^T -\mu v^2 dt = -\mu \frac{L^2}{T} = -\mu L v$$

Svaret forteller oss at arbeidet avhenger av tiden vi bruker på å flytte oss den gitte avstanden, alternativt kan vi si at arbeidet avhenger av farten vi beveger oss med. Jo forttere vi beveger oss, jo kortere tid bruker vi, og jo større blir arbeidet. Her er en illustrasjon for tilfellet $\mu L^2 = 1$:



Dette har en viktig praktisk konsekvens: Tenk deg at du skal kjøre bil en viss strekning, og at friksjonen oppfører seg slik som modellen over. Dersom du øker farten til det dobbelte, slik at tiden du bruker blir halvert, så kan du forvente å bruke dobbelt så mye drivstoff!

Om du er miljøbevisst bør du tenke på dette: Dersom du reduserer tiden til det halve så kan du forvente å bruke dobbelt så mye drivstoff! Det er fordi arbeidet som gjøres av friksjonskreftene vil øke. Det kan lønne seg å kjøre litt saktere enn fartsgrensen dersom du ønsker å spare penger eller miljøet!

Er eksemplet med arbeidet utført av friksjonskraft i strid med LH sats 3.4.5 [3]? Det ser nemlig ut til at kurveintegralet avhenger av parametriseringen av én og samme kurve?

Svaret er at LH sats 3.4.5 ikke gjelder i dette tilfellet fordi friksjonskraft ikke er et felt. Husk hva vi sa innledningsvis i kompendiet: Friksjonskraft er ikke en entydig funksjon av posisjon fordi den avhenger av hvordan bevegelsen skjer. I dette tilfellet er parametriseringen et uttrykk for hvordan bevegelsen skjer.

Det var for å unngå slike problemer at vi avgrenset definisjonen av et felt til å være en entydig funksjon av posisjon. Vi husker fra side 6 at friksjonskraft, Coriolis-kraft og Lorentz-kraft er ikke-entydige funksjoner av posisjon fordi de avhenger av hvordan bevegelsen skjer.

LH sats 3.3.6 og 3.4.5 gjelder for felt. Friksjonskraft er ikke et felt i henhold til vår avgrensning av begrepet.

Eksempel: kurveintegral av felt, lik verdi med ulik parametrisering av samme vei

Vi betrakter vektorfeltet $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, og lar γ være x -aksen fra $x = 0$ til $x = 2$, regn ut $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Parametrisering 1: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}$ for $0 \leq t \leq 2$

Vi har $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dt$ og $\mathbf{F} = t\mathbf{i}$, og følgelig $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 t dt = 2$.

Parametrisering 2: $\mathbf{r}(t) = 2t^2\mathbf{i}$ for $0 \leq t \leq 1$

Vi har $d\mathbf{r} = 4t\mathbf{i}dt$ og $\mathbf{F} = 2t^2\mathbf{i}$, og følgelig $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 8t^3 dt = 2$.

At vi fikk samme svar er i henhold til LH setning 3.4.5.

Eksempel: kurveintegral av felt, lik verdi for ulik vei

Vi betrakter stadig $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, samme vektorfelt som før, men lar nå γ være halvsirkelen med sentrum i $x = 1$ og $y = 0$, fra origo til $x = 2$ og $y = 0$ i øvre halvplan. Vi har altså samme vektorfelt og samme start- og endepunkt for kurven, men den går langs en annen vei.

Vi velger parametriseringen $\mathbf{r}(\theta) = x(\theta)\mathbf{i} + y(\theta)\mathbf{j} = (1 - \cos \theta)\mathbf{i} + \sin \theta\mathbf{j}$ for $0 \leq \theta \leq \pi$. Det er lett å vise at med denne parametriseringen har vi $(x(\theta) - 1)^2 + (y(\theta))^2 = 1$, som er formelen til en sirkel rundt $x = 1$ og $y = 0$.

Vi har $d\mathbf{r} = (\sin \theta\mathbf{i} + \cos \theta\mathbf{j})d\theta$ og $\mathbf{F} = (1 - \cos \theta)\mathbf{i} + \sin \theta\mathbf{j}$, og følgelig får vi $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 2$.

Det foregående eksemplet viser at et vektorfelt $\mathbf{F}$ kan gi samme verdi for kurveintegralet mellom to endepunkter selv om vi velger forskjellig vei mellom de to endepunktene. Dette er ikke en konsekvens av, og har ikke noe med LH setning 3.4.5 å gjøre!

Vi skal nå se at et vektorfelt også kan gi ulik verdi for kurveintegralet dersom vi velger forskjellige veier mellom start- og endepunkt.

Eksempel: kurveintegral av felt, ulik verdi for ulik vei

Vi betrakter hastighetsfeltet for rotasjon som stivt legeme med vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$$

Vi ønsker å regne ut kurveintegralet $\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ hvor kurven γ går fra $\mathbf{r} = \mathbf{i}$ til $\mathbf{r} = -\mathbf{i}$. Vi gjør dette langs tre forskjellige veier:

Vei 1: Langs x -aksen: La γ_1 være $\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i}$ for $0 \leq t \leq 2$.

Vi har $d\mathbf{r} = -\mathbf{i}dt$ og $\mathbf{v} = (1 - t)\mathbf{j}$, og følgelig $\int_{\gamma_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 0 dt = 0$.

Vei 2: Langs halvsirkel i øvre halvplan: La γ_2 være $\mathbf{r}(\theta) = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta$ for $0 \leq \theta \leq \pi$.

Vi har $d\mathbf{r} = (-\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta) d\theta$ og $\mathbf{v} = \omega(-\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta)$, og derfor får vi $\int_{\gamma_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi} \omega(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \int_0^{\pi} \omega d\theta = \pi\omega$.

Vei 3: Langs halvsirkel i nedre halvplan: La γ_3 være $\mathbf{r}(\theta) = \mathbf{i} \cos \theta - \mathbf{j} \sin \theta$ for $0 \leq \theta \leq \pi$.

Vi har $d\mathbf{r} = (-\mathbf{i} \sin \theta - \mathbf{j} \cos \theta) d\theta$ og $\mathbf{v} = \omega(\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta)$, og derfor får vi $\int_{\gamma_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^\pi \omega(-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) d\theta = -\int_0^\pi \omega d\theta = -\pi\omega$.

Hvert ulikt valg av vei resulterte i ulik verdi for kurveintegralet!

Skalarpotensial uttrykt som kurveintegral av konservativt vektorfelt

I seksjon 4.4 sa vi at vektorfeltet $\mathbf{v}$ er konservativt dersom det kan skrives som gradienten til et skalarfelt, $\mathbf{v} = \nabla\phi$, hvor ϕ kalles for skalarpotensial. Dersom vi tar kurveintegralet av et slikt vektorfelt fra en referanseposisjon $\mathbf{r}_0$ til en vilkårlig posisjon $\mathbf{r}$ får vi

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \nabla\phi(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\phi = \phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}_0)$$

hvor vi har benyttet oss av at integranden er et fullstendig differensial. Vi ender følgelig opp med en løsning for skalarpotensialet

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' + \phi(\mathbf{r}_0)$$

Dette integralet er åpenbart uavhengig av vei takket være det fullstendige differensialet som dukket opp i integranden.

Konservativt felt og konservativ kraft

Etter at vi har lært Stokes sats i etterfølgende seksjon 8.2 skal vi innse at følgende fire egenskaper er ekvivalente for konservative vektorfelt:

- Kurveintegralet er uavhengig av vei.
- Sirkulasjonen er lik null for lukkede kurver.
- Vektorfeltet kan skrives som en gradienten til et skalarpotensial.
- Vektorfeltet er virvelfritt.

Fysikere pleier imidlertid å si at friksjonskraft ikke er konservativ fordi arbeidet avhenger av både vei og hvordan bevegelsen skjer langs veien, selv om friksjonskraft ikke er et felt. Det kan derfor være lurt å velge en definisjon som utgangspunkt for at noe er konservativt uten å begrense det til å være et felt. De to første kulepunktene ovenfor kan brukes uten at det vi snakker om er vektorfelt, de to siste kulepunktene begrenser seg til vektorfelt.

5.1.1 Sirkulasjon

Sirkulasjonen til et vektorfelt $\mathbf{v}$ rundt en lukket kurve γ er gitt ved kurveintegralet

$$C = \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

Sirkelen rundt integraltegnet indikerer at γ er en lukket kurve.

Eksempel: Sirkulasjonen til en karusell rundt en sirkel med radius R rundt sentrum av karusellen.

La hastighetsfeltet være $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ for vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$. La kurven være parametrisert med vinkelen θ slik at $\mathbf{r}(\theta) = R \cos \theta \mathbf{i} + R \sin \theta \mathbf{j}$. Vi får

$$\oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \omega R^2 d\theta = 2\pi\omega R^2$$

Eksempel: Sirkulasjonen til en “kilde” i origo rundt en sirkel med radius R rundt kilden.

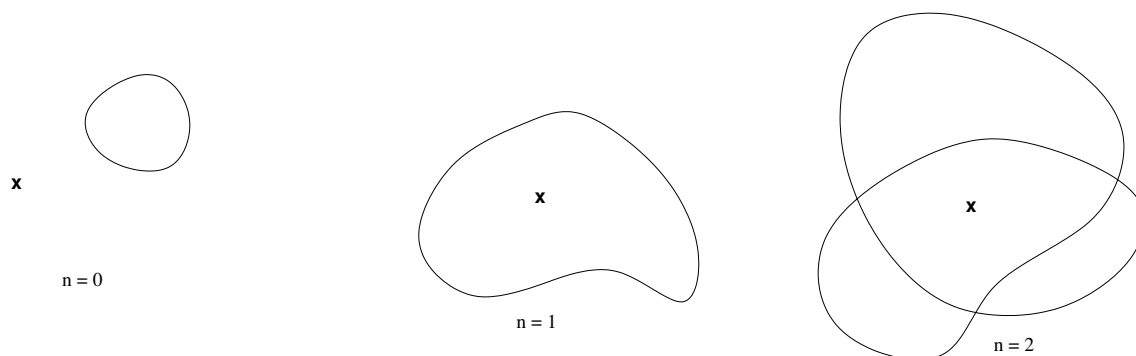
Velg hastighetsfeltet lik posisjonsvektor $\mathbf{v} = \mathbf{r}$. La kurven være parametrisert med vinkelen θ slik at $\mathbf{r}(\theta) = R \cos \theta \mathbf{i} + R \sin \theta \mathbf{j}$. Ettersom $\mathbf{v}$ står vinkelrett på $d\mathbf{r}$ får vi

$$\oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Vi skal nå se et eksempel på at kurveintegralet avhenger av hvor mange ganger vi går rundt et singulært punkt. Først trenger vi å definere hva vi mener med vindingstall som et mål på hvor mange ganger vi går rundt et punkt:

Vindingstall = antall ganger en lukket kurve går rundt et punkt
(slik vi har definert det her passer det best for kurver i planet)

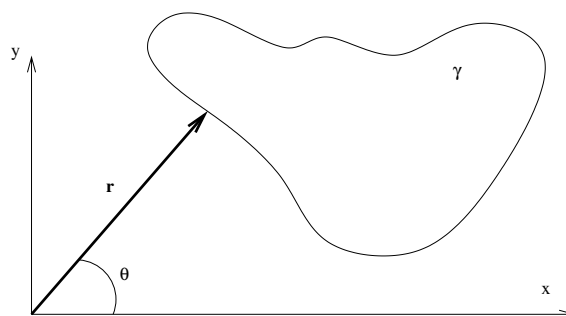
Eksempel: n er vindingstallet rundt punktet $\mathbf{x}$:



Eksempel: Kurveintegral som gir vindingstallet rundt et punkt:

Det er nå enkelt å innse at integralet $\oint_{\gamma} d\theta = 2\pi n$ hvor n er vindingstallet rundt origo til den lukkede kurven γ .

La nå $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ være posisjonsvektor til et vilkårlig punkt på den lukkede kurven γ i xy -planet, og la θ være vinkelen mellom $\mathbf{r}$ og x -aksen. Vi vet at $x = r \cos \theta$ og $y = r \sin \theta$ hvor $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Se figuren:



Vi ønsker nå å skrive om differensialet $d\theta = \nabla\theta \cdot d\mathbf{r}$. Vi må altså finne gradienten til vinkelen, $\nabla\theta = \mathbf{i}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\theta}{\partial y}$.

Sett $\xi = \tan\theta = \frac{y}{x}$. Vi har $\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{x^2+y^2}{x^2}$ og $\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$ og $\frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{1}{x}$. Vinkelen er gitt ved den inverse funksjonen $\theta = \arctan\xi$ og vi har $\frac{d\theta}{d\xi} = 1 = \arctan'\xi \tan'\theta$ slik at $\arctan'\xi = \frac{x^2}{x^2+y^2}$. Vi får dermed $\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial x} \arctan'\xi = \frac{-y}{x^2+y^2}$ og $\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial y} \arctan'\xi = \frac{x}{x^2+y^2}$, og følgelig

$$\nabla\theta = \mathbf{i}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

Vi har tidligere studert dette vektorfeltet i oppgave 1.2j. Det som er interessant med dette vektorfeltet, det er at origo er et singulært punkt.

Eksempel:

I henhold til diskusjonen ovenfor har altså vektorfeltet

$$\mathbf{u} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

egenskapen at kurveintegralet rundt en lukket kurve γ er

$$\oint_{\gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi n$$

hvor n er vindingstallet til γ rundt origo.

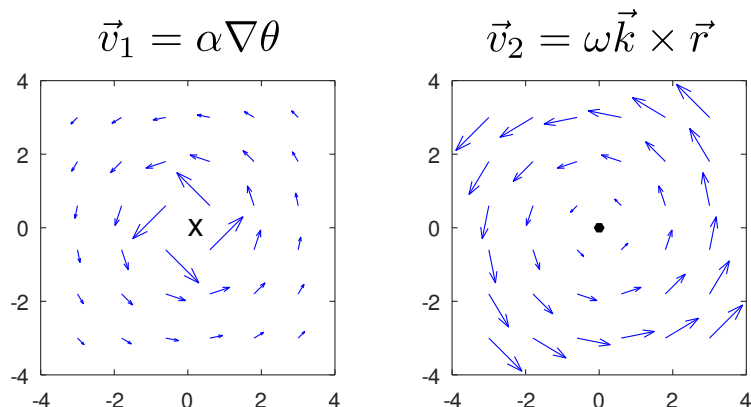
I lys av de foregående eksemplene er det nå interessant å se på vektor-plot av de to hastighetsfeltene

$$\mathbf{v}_1 = \alpha \nabla\theta = \alpha \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

og

$$\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$$

Vi kan tenke oss at $\mathbf{v}_1$ er en mulig representasjon av en sluk-strøm, mens $\mathbf{v}_2$ er hastighetsfeltet til en karusell eller snurrebass som har vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$.



I figurene har vi markert stagnasjonspunktet med $\bullet$ og det singulære punktet med $\times$.

Eksempel:

Integralet av $\mathbf{u} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$ definert ovenfor langs halvellipsen γ gitt ved $x^2 + (y/2)^2 = R^2$ for $x \geq 0$

En mulig parametrisering er $r(\phi) = R(\mathbf{i} \cos \phi + 2\mathbf{j} \sin \phi)$ for $0 \leq \phi \leq \pi$. Vi har $d\mathbf{r} = R(-\mathbf{i} \sin \phi + 2\mathbf{j} \cos \phi)d\phi$.

NB! Parameteren ϕ er ikke vinkelen θ vist ovenfor!

Noen vil kanskje mene at det kan være litt vanskelig å gjennomføre integralet $\int_{\gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi} \frac{2}{1+3\sin^2 \phi} d\phi = \arctan(2 \tan \phi)|_0^{\pi} = \pi$. Det er faktisk mye enklere å bruke vinkelen θ direkte uten eksplisitt parametrisering, dersom vi bare husker at vi har med et fullstendig differensial å gjøre, $\mathbf{v} = \nabla \theta$, og følgelig $\int_{\gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi} d\theta = \pi$.

Eksempel: Sirkulasjonen til $\nabla \theta$ rundt en vilkårlig lukket kurve, hvor θ er vinkelen mellom posisjonsvektor og x -aksen.

Dette har vi jo allerede sett på

$$\oint_{\gamma} \nabla \theta \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\gamma} d\theta = 2\pi n$$

hvor n er vindingstallet til den lukkede kurven rundt origo.

5.2 Flateintegral

Vi skal integrere et skalarfelt f eller et vektorfelt $\mathbf{F}$ over en flate S . Vi tenker oss at flaten består av infinitesimale flatelementer $d\sigma$ og tilhørende enhetsnormalvektorer $\mathbf{n}$. Vi forutsetter at flaten er tilstrekkelig glatt til at det er fornuftig å tenke på flatenormalvektoren $\mathbf{n}$ som normalt på flaten og flatelementet $d\sigma$ som tangent til flaten. Vi forutsetter også at flatenormalvektoren er orientert i henhold til problemstillingen vi betrakter, dette krever at flaten er orienterbar. En flate er orienterbar dersom det går an å male hver side av flaten med forskjellige farger. Noen flater

er ikke orienterbare, for eksempel Möbius båndet og Klein flasken, se for eksempel matematikk.org om “Möbiusbånd og kleinflaske” eller Wikipedia om “Möbius-bånd” eller M.C.Escher sin illustrasjon [her](#).

Vi skal være interessert i å regne ut flateintegraler av typen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad \int_S \mathbf{F} \times \mathbf{n} d\sigma, \quad \int_S f \mathbf{n} d\sigma, \quad \int_S f d\sigma, \quad \text{etc.}$$

over flaten S .

Noen ganger kan det være greit å tenke seg at flaten er delt opp i plane flatelementer med areal $\Delta\sigma_i$ med tilhørende normalvektorer $\mathbf{n}_i$, og at vi kan tilnærme flateintegralet ved en sum over flateelementene, for eksempel $\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta\sigma_i$. I grensen at $|\Delta\sigma_i| \rightarrow 0$ går $\Delta\sigma_i$ over til det infinitesimale flateelementet $d\sigma$ og summen gå over til et integral, $\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta\sigma_i \rightarrow \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$.

Eksempel: Arealet av et rektangel med sidekanter a og b

La rektanglet være orientert med sidekant a langs x -aksen og sidekant b langs y -aksen. La oss betrakte det infinitesimale flateelementet i kartesiske koordinater $d\sigma = dx dy$, og la oss ta x -integralet først:

$$\int_S d\sigma = \int_0^b \int_0^a dx dy = \int_0^b [x]_{x=0}^a dy = \int_0^b a dy = [ay]_0^b = ab$$

I dette tilfellet hadde det vært like enkelt å bytte om på rekkefølgen:

$$\int_S d\sigma = \int_0^a \int_0^b dy dx = \int_0^a [y]_{y=0}^b dx = \int_0^a b dx = [bx]_0^a = ab$$

Eksempel: Arealet mellom x -aksen og kurven $y = \sin x$ for $0 \leq x \leq \pi$

La oss betrakte det infinitesimale flateelementet i kartesiske koordinater $d\sigma = dx dy$, og la oss ta y -integralet først:

$$\int_S d\sigma = \int_0^\pi \int_0^{\sin x} dy dx = \int_0^\pi [y]_{y=0}^{\sin x} dx = \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$$

Det er mye vanskeligere å bytte på rekkefølgen:

$$\begin{aligned} \int_S d\sigma &= \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} dx dy = \int_0^1 [x]_{x=\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} dy = \int_0^1 \pi - 2 \arcsin y dy \\ &= \left[\pi y - 2y \arcsin y - 2\sqrt{1-y^2} \right]_0^1 = 2 \end{aligned}$$

Vi ser at det virkelig lønner seg å velge en rekkefølge som er enkel å håndtere!

5.2.1 Parametrisering av en generell flate

Husk at arealet av et parallelogram som spennes ut av to vektorer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er gitt ved størrelsen til kryssproduktet $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$. Retningen til kryssproduktet står normalt på flaten. Vi kan skaffe oss enhetsnormalvektor ved $\mathbf{n} = \pm \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}$.

Vi skal se for oss en flate S i rommet. Rommet er tredimensjonalt, mens flaten er todimensjonal, derfor forventer vi at vi kan parametrisere flaten med to skalarer v og w . Hvert punkt på flaten vil da være gitt ved en 3D posisjonsvektor $\mathbf{r}(v, w)$ hvor (v, w) befinner seg i et 2D parameterrom.

Vi kan konstruere infinitesimale tangentvektorer til overflaten ved å se på endringen i posisjonsvektor på flaten når kun én av parametrene endrer seg om gangen

$$\Delta \mathbf{r}_v = \mathbf{r}(v + \Delta v, w) - \mathbf{r}(v, w) \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v$$

$$\Delta \mathbf{r}_w = \mathbf{r}(v, w + \Delta w) - \mathbf{r}(v, w) \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \Delta w$$

Når vi lar endringene i parametrene bli vilkårlig små, $\Delta v \rightarrow 0$ og $\Delta w \rightarrow 0$, bytter vi om fra Δ til infinitesimalt differensial “d” og vi har eksakt

$$d\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv$$

$$d\mathbf{r}_w = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw$$

Nå kan vi beregne flatenormalvektor og det infinitesimale flatelementet ved å ta kryssproduktet

$$\mathbf{n} d\sigma = \pm d\mathbf{r}_v \times d\mathbf{r}_w = \pm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dv dw$$

Legg merke til at vi kan finne normalvektor og flateelement hver for seg

$$d\sigma = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right| dv dw$$

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right|}$$

Husk at vi har allerede lært en alternativ måte å finne flatenormalvektoren, nemlig dersom vi kan uttrykke flaten som en ekviskalarflate, ved hjelp av en skalarfunksjon $\beta(x, y, z) = \text{konstant}$, så kan enhetsflatenormalvektoren skrives

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla \beta}{|\nabla \beta|},$$

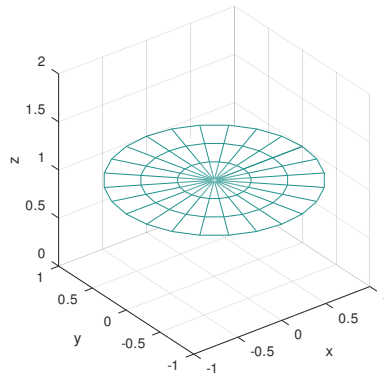
men dersom vi bruker dette alternativet har vi ingen oppskrift for å finne $d\sigma$.

Eksempel: Sirkelskive med radius R i høyde h over xy -planet og med sentrum i z -aksen

La parameterrommet være $0 \leq r \leq R$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Posisjonsvektor til et vilkårlig punkt på sirkelskiven kan skrives

$$\mathbf{r}(r, \theta) = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + h \mathbf{k}$$

Dette er illustrert i figuren for $R = h = 1$



Så regner vi ut

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -r \sin \theta \mathbf{i} + r \cos \theta \mathbf{j}$$

$$\mathbf{n} d\sigma = \pm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} dr d\theta = \pm \mathbf{k} r dr d\theta$$

og herfra kan vi se at $\mathbf{n} = \pm \mathbf{k}$ og $d\sigma = r dr d\theta$.

Vi kunne også ha skrevet skiven som en ekviskalarflate $\beta(x, y, z) = z = h$ og utledet $\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla \beta}{|\nabla \beta|}$, men da hadde vi ikke funnet et uttrykk for $d\sigma$.

Arealet til sirkelskiven er lett å regne ut

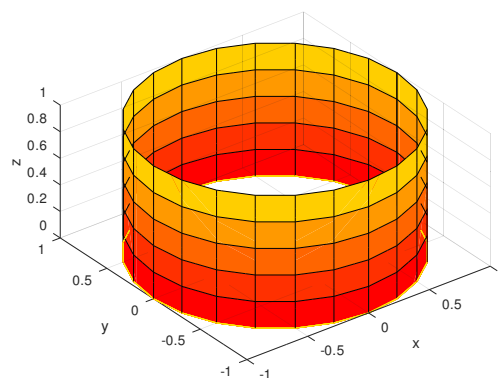
$$A = \int_S d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = \pi R^2$$

Eksempel: Sylinder med radius R fra xy -planet og opp en høyde h med z -aksen som senterakse

La parameterrommet være $0 \leq \theta \leq 2\pi$ og $0 \leq z \leq h$. Posisjonsvektor til et vilkårlig punkt på sylindringen kan skrives

$$\mathbf{r}(\theta, z) = R \cos \theta \mathbf{i} + R \sin \theta \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

Dette er illustrert i figuren for $R = h = 1$



Vi regner ut

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -R \sin \theta \mathbf{i} + R \cos \theta \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{n} d\sigma = \pm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} d\theta dz = \pm R(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) d\theta dz$$

og herfra kan vi se at $\mathbf{n} = \pm(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j})$ og $d\sigma = R d\theta dz$.

Vi kunne også ha skrevet sylindren som en ekviskalarflate $\beta(x, y, z) = x^2 + y^2 = R^2$ og utledet $\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla \beta}{|\nabla \beta|}$. For å innse at vi får samme svar identifiserer vi $x = R \cos \theta$ og $y = R \sin \theta$. Nok en gang hadde dette ikke gitt et uttrykk for $d\sigma$.

Arealet til sylindren er lett å regne ut

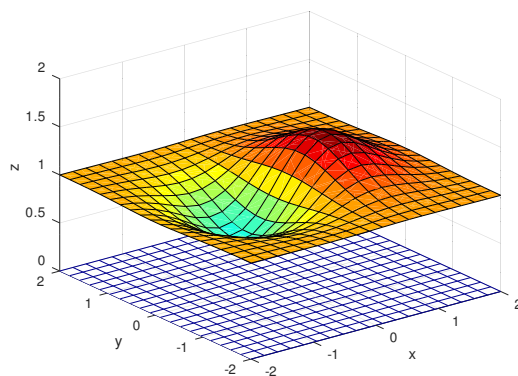
$$A = \int_S d\sigma = \int_0^h \int_0^{2\pi} R d\theta dz = 2\pi Rh$$

Eksempel: Et terreng med høyde $z = h(x, y)$ over xy -planet

La parameterrommet være xy -planet. Posisjonsvektor til et vilkårlig punkt i terrenget kan skrives

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + h(x, y)\mathbf{k}$$

Et eksempel er vist i figuren hvor parametriseringen i xy -planet er vist under selve terrenget



Vi regner ut

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i} + \frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{n} d\sigma = \pm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dx dy = \pm \left(\mathbf{k} - \frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{j} \right) dx dy$$

og herfra kan vi se at $d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2} dx dy$.

Vi kunne ha skrevet terrenget som en ekviskalarflate $\beta(x, y, z) = z - h(x, y) = 0$, og herfra kunne vi ha funnet flatenormalvektoren, men vi hadde i så fall ikke hatt noen oppskrift for å finne flateelementet $d\sigma$.

5.2.2 Fluks, flukstetthet og integrert fluks

Generelt sier vi at integraler av typen

$$Q = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad \text{og} \quad q = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

er fluks-integraler. Det første er fluksen gjennom en flate S og det andre er fluksen gjennom en kurve γ (som ligger på en flate som vi også kan kalle S). Her er $d\sigma$ et flateelement til flaten S , mens ds er et kurveelement til kurven γ . I det første tilfellet er vektoren $\mathbf{n}$ enhets normalvektor til flaten S . I det andre tilfellet er vektoren $\mathbf{n}$ enhets normalvektor til kurven γ samtidig som $\mathbf{n}$ er tangent til flaten S .

Ordet “fluks” kommer fra latin og betyr “strømning”. Vi skal bruke dette som et mål på strømning gjennom flaten S eller gjennom kurven γ (tangent til den flaten som kurven ligger på). Størrelsene Q og q kan vi kalle “integrert fluks”, og størrelsen $\mathbf{F}$ kan vi kalle “flukstetthet”. Her er flukstettheten en vektor-størrelse mens den integrerte fluksen er en skalar.

La oss sjekke de fysiske dimensjonene: Vanligvis er det infinitesimale flateelementet $d\sigma$ et areal, og det infinitesimale kurveelementet ds er en lengde. Enhets normalvektor $\mathbf{n}$ er dimensjonsløs. Følgelig må den fysiske dimensjonen til den integrerte fluksen Q eller q være lik den fysiske dimensjonen til flukstettheten multiplisert med henholdsvis areal eller lengde.

NB! Ulike tradisjoner for hva begrepet “fluks” skal bety!

Hva slags størrelse skal vi assosiere med kun ordet “fluks”? Skal det bety integrert fluks eller skal det bety flukstetthet? Dessverre har forskjellige fagområder hver sine tradisjoner. I elektromagnetisme er det vel etablert at ordet “fluks” referer til “integrert fluks”. For anvendelser innen transportfenomener, for eksempel fluidmekanikk, er det mer vanlig at ordet “fluks” refererer til “flukstetthet”.

For å gjøre forvirringen komplett finner vi dessuten lett tekster som bruker begrepet “fluks” uten å gjøre en slik distinksjon i det hele tatt. Se for eksempel LH (2. utgave 2015) [3]: I kapittel 6.12 står det i avsnittet midt på side 678 først at $\mathbf{F}$ er en fluks, og like etterpå står det at $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} R$ er en fluks, hvor R er arealet til en flate som $\mathbf{F}$ strømmer igjennom. Definisjon 6.12.1 på side 680 [3] sier at integralet $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ (oversatt til vår notasjon) er en fluks. LH benytter altså begrepet “fluks” som fellesbegrep for de to ulike begrepene “integrert fluks” og “flukstetthet”!

Kanskje opphavsmannen til denne forvirringen er James Clerk Maxwell som skrev i sin bok “Treatise on Electricity and Magnetism” i 1892:

In the case of fluxes, we have to take the integral, over a surface, of the flux through every element of the surface. The result of this operation is called the surface integral of the flux. It represents the quantity which passes through the surface.

Her referer ordet “fluks” til “flukstetthet”, men det er merkelig ettersom Maxwell bidro betydelig til å etablere elektromagnetisme som fag hvor man som nevnt har en vel etablert tradisjon for å la “fluks” bety integrert fluks. Se forøvrig utmerket diskusjon om denne terminologien på [Wikipedia: Flux](#).

For å unngå forvirring skal vi forsøke å være nøye på å bruke de lengre betegnelserne “integrert fluks” eller “flukstetthet” når det er viktig å skille mellom begrepene, og vi begrenser bruken av kun ordet “fluks” til situasjoner det ikke spiller noen rolle hvilket av begrepene vi refererer til.

Eksempel: Fluks gjennom en kurve i xy -planet

Se på vektorfeltet $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ som skal strømme gjennom en kurve γ med lengde l som står normalt på x -aksen i xy -planet. Finn den integrerte fluksen $q = \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds$.

En mulig kurve, normalt på x -aksen og i xy -planet, er $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{j}$ for $0 \leq t \leq l$. Vi får $d\mathbf{r} = \mathbf{j}dt$. Generelt har vi $\mathbf{n}ds = \pm d\mathbf{r} \times \mathbf{k} = \pm \mathbf{i}dt$. Dersom vi ønsker at $\mathbf{n}$ skal være orientert i positiv x -retning kan vi skrive $\mathbf{n}ds = \mathbf{i}dt$. Deretter regner vi ut

$$q = \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = v \int_0^l \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} \, dt = vl$$

hvor vi benyttet at v er konstant så den kunne settes utenfor integralet.

Eksempel: Fluks gjennom en kurve i xz -planet

Se på det samme vektorfeltet $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$, men som nå skal strømme gjennom en kurve γ med lengde l som står normalt på x -aksen i xz -planet. Finn den integrerte fluksen $q = \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds$.

En mulig kurve, normalt på x -aksen og i xz -planet, er $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{k}$ for $0 \leq t \leq l$. Vi får $d\mathbf{r} = \mathbf{k}dt$. Generelt har vi $\mathbf{n}ds = \pm d\mathbf{r} \times \mathbf{j} = \mp \mathbf{i}dt$. Dersom vi ønsker at $\mathbf{n}$ skal være orientert i positiv x -retning kan vi skrive $\mathbf{n}ds = \mathbf{i}dt$. Deretter regner vi ut

$$q = \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = v \int_0^l \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} \, dt = vl$$

hvor vi benyttet at v er konstant så den kunne settes utenfor integralet.

Eksempel: Volumfluks — strømmingen i ei elv gjennom snitt på tvers

Ei elv har konstant hastighet $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ i x -retning, og tverrsnitt S normalt på x -aksen med konstant areal A . Finn volumfluksen $Q = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$.

Først bestemmer vi at flatenormalvektoren skal være orientert i positiv x -retning, $\mathbf{n} = \mathbf{i}$. Vi kan for eksempel sette $d\sigma = dy \, dz$. Deretter regner vi ut

$$Q = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_S v\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} \, d\sigma = v \int_S d\sigma = vA$$

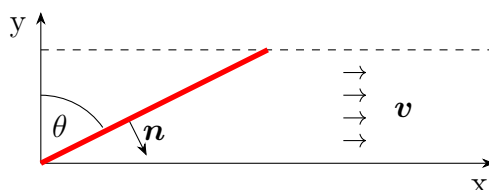
hvor vi benyttet at v er konstant så den kunne settes utenfor integralet.

Grunnen til at dette kalles volumfluks innser vi ved å skjekke de fysiske dimensjonene: $[v] = \text{lengde/tid}$, $[d\sigma] = \text{lengde}^2$, enhets normalvektor $\mathbf{n}$ er dimensjonsløs $[\mathbf{n}] = 1$, og følgelig $[Q] = \text{lengde}^3/\text{tid}$, hvor vi lar notasjonen $[\cdot]$ bety “dimensjonen til”. Dette er en fornuftig fysisk dimensjon for volumfluks.

Vi kan spørre om det går an å få mere vann ut av elva dersom vi benytter et skrått tverrsnitt istedenfor et rett tverrsnitt? Et skrått tverrsnitt vil jo ha større areal.

Eksempel: Volumfluks — strømmingen i ei elv gjennom snitt på skrå

Vi fortsetter å betrakte samme elv med samme konstante hastighet $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ i x -retning, men nå lar vi tverrsnittet S stå på skrå over elva med vinkel θ i forhold til y -aksen. Finn volumfluksen $Q = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma$.



Først må vi bestemme flatenormalvektoren $\mathbf{n}$, som vi ønsker skal ha positiv komponent i x -retning. Det er flere måter å gjøre dette, her skisserer vi to alternativer:

Alternativ 1: Vi kan beskrive tverrsnittet som en ekviskalarflate. Vi har $\tan \theta = \frac{x}{y}$ og derfor kan tverrsnittet beskrives som ekviskalarflaten $\beta(x, y, z) = x \cos \theta - y \sin \theta = 0$. Gradienten til skalarfunksjonen β er en normalvektor, og normalisert blir dette $\mathbf{n} = \frac{\nabla \beta}{|\nabla \beta|} = \cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j}$.

Alternativ 2: Vi kan introdusere en tangentvektor på skrå over elva $\mathbf{t} = \cos \theta \mathbf{j} + \sin \theta \mathbf{i}$, og introdusere en annen tangenvektor tvers over elva ved z -retningen $\mathbf{k}$, og ta kryssproduktet mellom disse to tangentvektorene $\mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{k} = \cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j}$.

Vi ser at arealet til det skrå tverrsnittet er $A/\cos \theta$. Vi kan tenke oss det skrå tverrsnittet som en hypotenus og snittet rett på tvers som en katet.

Til slutt regner vi ut volumfluksen gjennom det skrå tverrsnittet

$$Q = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_S v\mathbf{i} \cdot (\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j}) d\sigma = v \cos \theta \int_S d\sigma = (v \cos \theta) \frac{A}{\cos \theta} = vA$$

hvor vi har benyttet at v og $\cos \theta$ er konstant så de kan settes utenfor integralet.

Vi fikk samme svar som tidligere! Det burde ikke være overraskende at det ikke renner mer vann gjennom et skrått tverrsnitt enn gjennom et snitt rett på tvers. Dette understreker et viktig prinsipp: Det er normalkomponenten til strømmingen gjennom en flate som gir bidrag til gjennomstrømmingen, det viser betydningen av å prikke med $\mathbf{n}$.

5.2.3 Fluks ut av en lukket flate

Vi sier at en flate er lukket dersom den avgrenser et volum. For en lukket flate rundt et avgrenset volum har vi en konvensjon som sier at flatenormalvektoren $\mathbf{n}$ peker ut av det avgrensede volumet.

Eksempel: Integrert fluks av $\mathbf{v} = x\mathbf{i}$ ut av overflaten til enhetsterning

La terningen ha utstrekning $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ og $0 \leq z \leq 1$. Den lukkede flaten S splittes opp i seks sider, S_m , og vi nummererer sidene som en vestlig terning (høyrehånds terning med sum 7 på motstående sider).

1. Flaten S_1 er $x = 1$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 1$, den integrerte fluksen ut av flaten er 1.

2. Flaten S_2 er $y = 1$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = \mathbf{j}$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, den integrerte fluksen ut av flaten er 0.
3. Flaten S_3 er $z = 1$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, den integrerte fluksen ut av flaten er 0.
4. Flaten S_4 er $z = 0$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, den integrerte fluksen ut av flaten er 0.
5. Flaten S_5 er $y = 0$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, den integrerte fluksen ut av flaten er 0.
6. Flaten S_6 er $x = 0$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, den integrerte fluksen ut av flaten er 0.

Total integrert fluks blir

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \sum_{m=1}^6 \int_{S_m} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 1.$$

5.2.4 Beregning av trykkraft

Trykk p er kraft per areal. En vanlig enhet for trykk er Pascal (Pa), vanlig enhet for kraft er Newton (N), og vi har $\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$.

Hydrostatisk trykk

Formelen for hydrostatisk trykk skal vi utlede senere, nå bare skriver vi den opp og aksepterer den inntil videre

$$p = p_0 - \rho g z$$

Her er p trykket, p_0 er referansetrykket ved $z = 0$, ρ er tettheten til mediet, $g = |\mathbf{g}| > 0$ er tyngdens akselerasjon og z er høyden langs en vertikal akse. Minustegnet i denne formelen viser at z -aksen er orientert slik at den peker oppover.

Denne formelen for hydrostatisk trykk kan brukes dersom fluidet står i ro og tettheten er konstant.

Merk: Det er alltid lurt å ta “dykkertesten” når vi jobber med hydrostatisk trykk, for å sjekke at vi har fått fortegnene riktig: Vi vet at når vi dykker ned på dypere vann så skal trykket øke. Dersom dypere vann befinner seg et sted i negativ z -retning, så kan vi sette inn stadig større negative verdier for z og se at trykket øker slik det skal.

Trykkraft på en flate

Det hydrostatiske trykket er *isotrop*. Det betyr at det virker likt i alle retninger. Trykkraften på et infinitesimalt flateelement $d\sigma$ vil da være vinkelrett på flaten.

Vi har en konvensjon som sier at normalvektoren $\mathbf{n}$ til et flateelement skal peke ut fra den flaten vi betrakter. Det betyr at trykkraften på flateelementet må peke i retning $-\mathbf{n}$.

Trykkraften som virker på et infinitesimalt flateelement $d\sigma$ blir således

$$d\mathbf{F} = -p\mathbf{n} d\sigma$$

og trykkraft integrert over en flate S blir

$$\mathbf{F} = - \int_S p\mathbf{n} d\sigma$$

hvor $\mathbf{n}$ er enhets normalvektor til flaten S . Minustegnet er en konsekvens av konvensjonen, normalvektoren til flaten peker ut av flaten mens trykkraften vil virke inn mot flaten, og følgelig minustegn.

Eksempel: Bruk en kjøkkenvekt til å måle et volum vann ved å veie vannet: Vis at tyngden til vannet kan måles ved kraften som virker på bunnen av vektskåla

Dette eksemplet viser en overgang fra et volumintegral til et flateintegral, vi skal snakke mer om det senere!

La vannet i vektskåla ha horisontalt tverrsnitt med areal A og vertikal høyde h . Tyngden til vannet er gitt ved tettheten ganget med volumet ganget med tyngdens akselerasjon ρAhg .

Det hydrostatiske trykket i vannet er $p = p_0 - \rho gz$ hvor vi lar z -aksen peke oppover og ha referanseposisjon $z = 0$ i vannoverflaten. Trykket der vannet er i kontakt med bunnen vektskåla er $p = p_0 + \rho gh$. Trykkraften som virker fra vannet på vektskåla er $\mathbf{F} = \int -\mathbf{k}p d\sigma = -(p_0 + \rho gh)A\mathbf{k}$. Legg merke til at dersom det ikke hadde vært noe vann i vektskåla så hadde lufttrykket utøvd en trykkraft $\mathbf{F}_0 = \int -\mathbf{k}p_0 d\sigma = -p_0A\mathbf{k}$. Differansen mellom disse to trykkraftene er $\mathbf{F} - \mathbf{F}_0 = \int -\mathbf{k}p_0 d\sigma = -\rho ghA\mathbf{k} = \rho Ahg$ som er lik tyngden til vannet!

Vi kan altså beregne et volumintegral over alt vannet ved hjelp av et flateintegral over yttergrensen til vannet!

Eksempel: Trykkraft på sylinder med horisontal radius a og vertikal høyde h , med øvre flate i dybde d under vannoverflaten

Vi lar z -aksen peke oppover. Tyngdens akselerasjon er $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ og formelen for hydrostatisk trykk er $p = p_0 - \rho gz$ hvor ρ er massetettheten til vann.

Ta "dykkertesten" for å sjekke at trykket øker når vi går dypere ned i vannet.

Husk konvensjonen at enhets normalvektor $\mathbf{n}$ skal peke ut av sylindere.

I så fall er den hydrostatiske trykkraften på sylindere

$$\mathbf{F} = - \int_S p\mathbf{n} d\sigma$$

La oss først integrere over sidekanten til sylindere, nemlig over et sylinder skall med radius a og høyde h . Vi kan parametrisere denne flaten med vinkelen θ og vertikal koordinat z slik:

$$\mathbf{r}(\theta, z) = i a \cos \theta + j a \sin \theta + \mathbf{k} z$$

for $0 \leq \theta \leq 2\pi$ og $-d \geq z \geq -d - h$.

Små forflytninger på sylinderoverflaten kan beskrives ved differensialet

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} dz$$

hvor vi har to tangentvektorer til sylinderoverflaten

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -\mathbf{i}a \sin \theta + \mathbf{j}a \cos \theta$$

og

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}$$

Vi kan da finne overflateelementet med enhets normalvektor

$$\mathbf{n} d\sigma = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} d\theta \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} dz = a(\mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta) d\theta dz$$

Den integrerte trykkraften over sideflaten blir da

$$\mathbf{F}_{\text{side}} = - \int_{-d}^{-d-h} \int_0^{2\pi} (p_0 + \rho g z) a(\mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta) d\theta dz = \mathbf{0}$$

Legg merke til at det er integralet over θ som gjør at det ikke er netto trykkraft i horisontal retning.

Integralet over toppflaten er

$$\mathbf{F}_{\text{topp}} = - \int p \mathbf{n} d\sigma = -(p_0 + \rho g d) \mathbf{k} \pi a^2$$

Integralet over bunnflaten er

$$\mathbf{F}_{\text{bunn}} = - \int p \mathbf{n} d\sigma = (p_0 + \rho g(d + h)) \mathbf{k} \pi a^2$$

Summen av alle kreftene er

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{topp}} + \mathbf{F}_{\text{bunn}} + \mathbf{F}_{\text{side}} = \rho g l \mathbf{k} \pi a^2 = \rho V g \mathbf{k} = -M \mathbf{g}$$

hvor V er volumet av sylinderen og hvor M er massen av det fortrenge vannet. Legg merke til at svaret er en oppdrift, motsatt lik vekten av det fortrenge vannet. Dette er igjen Arkimedes prinsipp.

Legg også merke til at vår anstrengelse for å regne ut et overflateintegral har gitt oss et svar som har med volumet å gjøre!

Eksempel: Trykkraft på kule med radius a fullstendig neddykket i vann

Ei kule med radius a er plassert i vann. Vi lar z -aksen peke oppover. Tyngdens akselerasjon er $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ og formelen for hydrostatisk trykk er $p = p_0 - \rho g z$ hvor ρ er massetettheten til vannet. Det er likegyldig hva vi velger som referansetrykk p_0 .

Ta “dykkertesten”: Dersom vi går dypere ned i vannet slik at z avtar da vil det hydrostatiske trykket øke fordi det står et minus-tegn i formelen.

Husk konvensjonen for enhets normalvektor: Den skal peke ut av kula.

I så fall er den hydrostatiske trykkraften

$$\mathbf{F} = - \int_S p \mathbf{n} d\sigma$$

Vi skal integrere over kuleflaten. Vi kan parametrisere denne flaten med to vinkler, den polare vinkelen θ og den asimutale vinkelen φ slik:

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = \mathbf{i}a \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{j}a \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{k}a \cos \theta$$

for $0 \leq \theta \leq \pi$ og $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Små forflytninger på kuleoverflaten kan beskrives ved differensialet

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} d\varphi$$

hvor vi har to tangentvektorer til kuleoverflaten

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \mathbf{i}a \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{j}a \cos \theta \sin \varphi - \mathbf{k}a \sin \theta$$

og

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\mathbf{i}a \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{j}a \sin \theta \cos \varphi$$

Vi kan da finne overflateelementet med enhets normalvektor

$$\mathbf{n} d\sigma = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} d\theta \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} d\varphi = a^2 (\mathbf{i} \sin^2 \theta \cos \varphi + \mathbf{j} \sin^2 \theta \sin \varphi + \mathbf{k} \cos \theta \sin \theta) d\theta d\varphi$$

Den integrerte trykkraften over sideflaten blir da

$$\mathbf{F} = - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (p_0 - \rho g a \cos \theta) a^2 (\mathbf{i} \sin^2 \theta \cos \varphi + \mathbf{j} \sin^2 \theta \sin \varphi + \mathbf{k} \cos \theta \sin \theta) d\theta d\varphi$$

La oss gjøre integralet over φ først. Vi finner da

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0 \quad \text{og} \quad \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0 \quad \text{og} \quad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

Derfor vet vi at det er ikke noe bidrag i horisontal xy -retning.

Så tar vi integralet over θ .

$$\int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = 0 \quad \text{og} \quad \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3}$$

Vi finner derfor at netto kraft er

$$\mathbf{F} = -2\pi \int_0^\pi (p_0 - \rho g a \cos \theta) \mathbf{k} a^2 \cos \theta \sin \theta d\theta = 2\pi \frac{2}{3} \rho g a^3 \mathbf{k} = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho g \mathbf{k} = V \rho g \mathbf{k} = -M \mathbf{g}$$

hvor V er volumet av kula og hvor M er massen av det fortrenkte vannet. Legg merke til at svaret er en oppdrift, som er lik vekten av det fortrenkte vannet. Dette er igjen Arkimedes prinsipp.

Legg også merke til at vår anstrengelse for å regne ut et overflateintegral har nok en gang gitt oss et svar som har med volumet å gjøre!

5.3 Volumintegral

Vi har behov for å integrere skalarfelt $f(\mathbf{r})$ og vektorfelt $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ over et volum V . Vi kan tenke oss at volumet er delt opp i infinitesimale volumelementer $d\tau$. Integralene kan være av typen

$$\int_V \mathbf{F} d\tau, \quad \int_V f d\tau, \quad \text{etc.}$$

over volumet V .

To typiske eksempler på volumintegraler er massen m til et legeme som har volum V og massetetthet ρ ,

$$m = \int_V \rho d\tau,$$

og tyngden $\mathbf{T}$ til det samme legemet,

$$\mathbf{T} = \int_V \rho \mathbf{g} d\tau,$$

hvor $\mathbf{g}$ er tyngdens akselerasjon. Legg merke til at massen til et legeme er en skalar, mens tyngden til et legeme er en vektor.

Eksempel: Volumet av en rettvinklet boks med sidekanter a , b og c

La boksen (et rettvinklet parallellepiped) være orientert med sidekant a langs x -aksen, sidekant b langs y -aksen, og sidekant c langs z -aksen. La oss betrakte det infinitesimale volumelementet i kartesiske koordinater $d\tau = dx dy dz$, og la oss ta x -integralet først og z -integralet sist:

$$\begin{aligned} \int_V d\tau &= \int_0^c \int_0^b \int_0^a dx dy dz = \int_0^c \int_0^b [x]_{x=0}^a dy dz = \int_0^c \int_0^b a dy dz \\ &= \int_0^c [ay]_0^b dz = \int_0^c ab dz = [abz]_0^c = abc \end{aligned}$$

Eksemplet ovenfor var enkelt å regne ut fordi det var enkelt å angi integrasjonsgrensene for et rettvinklet parallellepiped. Dersom vi ønsker å integrere over et mer komplisert legeme så kan det lønne seg å finne en parametrisering slik at parameterområdet stadig er et rettvinklet parallellepiped:

5.3.1 Parametrisering av mer kompliserte legemer

Anta at vi har parametrisert et legeme med (α, β, γ) og at legemet kan representeres ved avbildningen

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta, \gamma)$$

Et rettvinklet parallellepiped i (α, β, γ) -rommet med motstående hjørner (α, β, γ) og $(\alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta, \gamma + \Delta\gamma)$ vil avbildes til et ikke-rettvinklet parallellepiped i (x, y, z) -rommet med motstående hjørner $\mathbf{r}(\alpha, \beta, \gamma)$ og $\mathbf{r}(\alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta, \gamma + \Delta\gamma)$. Det avbildede parallellepipedet spennes ut av de tre vektorene $\mathbf{a} = \mathbf{r}(\alpha + \Delta\alpha, \beta, \gamma) - \mathbf{r}(\alpha, \beta, \gamma) \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \Delta\alpha$ og $\mathbf{b} = \mathbf{r}(\alpha, \beta + \Delta\beta, \gamma) - \mathbf{r}(\alpha, \beta, \gamma) \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \Delta\beta$ og $\mathbf{c} = \mathbf{r}(\alpha, \beta, \gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{r}(\alpha, \beta, \gamma) \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma} \Delta\gamma$.

$\Delta\gamma) - \mathbf{r}(\alpha, \beta, \gamma) \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma} \Delta\gamma$. Volumet av parallelepipedet i (x, y, z) -rommet blir følgende $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \cdot (\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma}) \Delta\alpha \Delta\beta \Delta\gamma = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \Delta\alpha \Delta\beta \Delta\gamma$ hvor vi har Jacobi-determinanten

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial x}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{vmatrix}$$

I grensen at alle intervaller blir uendelig små skriver vi $d\tau = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} d\alpha d\beta d\gamma$.

Eksempel: Volumet av en sylinder med radius R og høyde h

Vi benytter parametriseringen

$$\mathbf{r}(r, \theta, z) = \mathbf{i}r \cos \theta + \mathbf{j}r \sin \theta + \mathbf{k}z$$

med $0 \leq r \leq R$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$ og $0 \leq z \leq h$. Med avbildningen $x(r, \theta, z) = r \cos \theta$ og $y(r, \theta, z) = r \sin \theta$ og $z(r, \theta, z) = z$ har vi Jacobideterminanten $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r$. Følgelig finner vi volumet

$$\int_V d\tau = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta dz = \pi R^2 h$$

Eksempel: Volumet av ei kule med radius a

Vi parametriserer med to vinkler, den polare vinkelen θ og den asimutale vinkelen φ ,

$$\mathbf{r}(r, \theta, \varphi) = \mathbf{i}r \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{j}r \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{k}r \cos \theta$$

for $0 \leq r \leq a$ og $0 \leq \theta \leq \pi$ og $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Med avbildningen $x(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi$ og $y(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \sin \varphi$ og $z(r, \theta, \varphi) = r \cos \theta$ har vi Jacobideterminanten $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta$. Følgelig finner vi volumet

$$\int_V d\tau = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi a^3$$

5.4 Oppgaver

5.1 Regn ut sirkulasjonen $\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$, rundt sirkelen $\gamma : x^2 + y^2 = R^2$ med sentrum i origo og med radius R , for hvert av vektorfeltene

- (a) $\mathbf{v} = \mathbf{i}$
- (b) $\mathbf{v} = \mathbf{j}$
- (c) $\mathbf{v} = x\mathbf{i}$
- (d) $\mathbf{v} = x\mathbf{j}$
- (e) $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
- (f) $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
- (g) $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
- (h) $\mathbf{v} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

$$(i) \mathbf{v} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(j) \mathbf{v} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$$

$$(k) \mathbf{v} = y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$$

5.2 Regn ut integrert fluks i xy -planet $\oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$, gjennom sirkelen $\gamma : x^2 + y^2 = R^2$ med sentrum i origo og med radius R , for hvert av vektorfeltene i forrige oppgave. Her er $\mathbf{n}$ enhetsvektor normalt på sirkelen γ i xy -planet og ds er infinitesimalt bueelement langs sirkelen. Legg merke til at $\mathbf{n} ds = d\mathbf{r} \times \mathbf{k}$ hvor $\mathbf{k}$ er enhetsvektor i z -retning normalt på xy -planet.

5.3 Regn ut integrert fluks $\oint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ ut gjennom en sylinderflate S som avgrensar sylindere $x^2 + y^2 \leq R^2$ og $0 \leq z \leq h$, hvor $\mathbf{n}$ enhetsvektor normalt på sylinderflaten og $d\sigma$ er infinitesimalt flateelement på sylinderflaten, for hvert av vektorfeltene

$$(a) \mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$(b) \mathbf{v} = -2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

5.4 Betrakt en strømning av ei væske med massetetthet ρ i et rør orientert langs z -aksen, med rektangulært tverrsnitt S i xy -planet for $0 < x < a$ og $0 < y < b$. Strømningen er gitt ved vektorfeltet $\mathbf{v} = \alpha x(a-x)y(b-y)\mathbf{k}$, hvor $\mathbf{k}$ er enhetsvektor i z -retningen. Vi skal også betrakte en seksjon D av røret over tverrsnittet S som strekker seg i en lengde c langs z -retningen.

(a) Hva er den fysiske dimensjonen til konstanten α ?

(b) Plott et vektor pileplott for å illustrere vektorfeltet $\mathbf{v}$.

(c) Finn strømlinjene til vektorfeltet $\mathbf{v}$ og plott dem.

(d) Regn ut den integrerte volumfluksen gjennom tverrsnittet S , $\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma$, som et dobbeltintegral, hvor $\mathbf{n}$ er enhetsvektor normalt på tverrsnittet S og $d\sigma$ er et infinitesimalt flateelement.

(e) Regn ut massefluksen gjennom tverrsnittet S , $\int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma$.

(f) Regn ut volumet av væske i seksjonen D , $\int_D d\tau$, som et volum trippelintegral, hvor $d\tau$ er et infinitesimalt volumelement.

(g) Regn ut massen av væske i seksjonen D , $\int_D \rho d\tau$.

(h) Regn ut bevegelsesmengden til væsken i seksjonen D , $\int_D \rho \mathbf{v} d\tau$.

(i) Regn ut bevegelsesmengdefluksen gjennom tverrsnittet S , $\int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma$.

5.5 Betrakt en strømning av ei væske i et rør orientert langs z -aksen, med sirkulært tverrsnitt S i xy -planet for $R < a$ hvor R er radiell avstand fra z -aksen. Strømningen er gitt ved vektorfeltet $\mathbf{v} = \beta(a-R)\mathbf{k}$, hvor $\mathbf{k}$ er enhetsvektor i z -retning.

(a) Hva er den fysiske dimensjonen til konstanten β ?

(b) Plott et vektor pileplott for å illustrere vektorfeltet $\mathbf{v}$.

- (c) Finn strømlinjene til vektorfeltet $\mathbf{v}$ og plott dem.
 - (d) Regn ut volumfluksen gjennom tverrsnittet S , $\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$.
- 5.6 Et tetraeder er et legeme avgrenset av fire trekanten. Trekantene har hjørner i origo og langs de tre kartesiske koordinataksene i $x = a$ og $y = b$ og $z = c$. Regn ut arealet til overflaten og volumet av tetraederet.

Kapittel 6

Divergens og virvling (curl)

6.1 Divergens

Den enkleste måten å definere divergens er å oppgi formelen i kartesiske koordinater (slik som for eksempel gitt i LH kap. 6.13 [3]):

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (6.1)$$

hvor vi kan tenke oss at del-operatoren er

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

og vektorfeltet er

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

Dersom vi kun er ute etter å regne ut divergensen i kartesiske koordinater så er definisjonen ovenfor grei nok. Vi kunne imidlertid ønske oss en definisjon av divergens som bedre hjelper oss å forstå hva divergens faktisk er, uavhengig av valg av koordinater. En slik definisjon finner vi hos M kap. 3.3 [5]. Denne definisjonen hjelper oss dessuten å forstå hvordan divergens generaliseres til krumlinjede koordinater senere:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (6.2)$$

Her er S en lukket flate som omslutter et volum V . Integralet gir den integrerte fluksen ut av den lukkede flaten. Grenseoppgangen forteller om feltet har netto utstrømning gjennom en lukket flate i grensen at flaten skrumper inn til et punkt.

Vi skal nå vise at dersom vi starter med integral-definisjonen (6.2) så følger differensial-uttrykket (6.1) som en konsekvens.

For å regne dette ut lar vi kontrollvolumet ha en form som det er spesielt enkelt å regne på i kartesiske koordinater: En terning med hjørne (x_0, y_0, z_0) nærmest origo og med sidekanter $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. La oss nummerere sidene som en vestlig terning (høyrehånds terning med sum 7 på motstående sider).

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \sum_{j=1}^6 \int_{S_j} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

1. Flaten er $x = x_0 + \Delta x$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_x(x_0 + \Delta x, y, z)$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $v_x(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)\Delta y\Delta z$.
2. Flaten er $y = y_0 + \Delta y$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = \mathbf{j}$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_y(x_0, y_0 + \Delta y, z_0)$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $v_y(x_0, y_0 + \Delta y, z_0)\Delta x\Delta z$.
3. Flaten er $z = z_0 + \Delta z$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_z(x_0, y_0, z_0 + \Delta z)$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $v_z(x_0, y_0, z_0 + \Delta z)\Delta x\Delta y$.
4. Flaten er $z = z_0$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -v_z(x_0, y_0, z_0)$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $-v_z(x_0, y_0, z_0)\Delta x\Delta y$.
5. Flaten er $y = y_0$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -v_y(x_0, y_0, z_0)$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $-v_y(x_0, y_0, z_0)\Delta x\Delta z$.
6. Flaten er $x = x_0$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -v_x(x_0, y_0, z_0)$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $-v_x(x_0, y_0, z_0)\Delta y\Delta z$.

Så summerer vi motstående flater

Side 1 og 6: $v_x(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)\Delta y\Delta z - v_x(x_0, y_0, z_0)\Delta y\Delta z \approx \frac{\partial v_x}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\Delta x\Delta y\Delta z$.

Side 2 og 5: $v_y(x_0, y_0 + \Delta y, z_0)\Delta x\Delta z - v_y(x_0, y_0, z_0)\Delta x\Delta z \approx \frac{\partial v_y}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\Delta x\Delta y\Delta z$.

Side 3 og 4: $v_z(x_0, y_0, z_0 + \Delta z)\Delta x\Delta y - v_z(x_0, y_0, z_0)\Delta x\Delta y \approx \frac{\partial v_z}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\Delta x\Delta y\Delta z$.

Vi har følgelig fluksintegralet

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \approx (\nabla \cdot \mathbf{v}) (\Delta x\Delta y\Delta z)$$

Legg merke til at i grensen $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ og $\Delta z \rightarrow 0$ så vil alle tilnærminger bli eksakt, og vi har at definisjonen (6.2) impliserer (6.1).

Ekspansjon, kontraksjon og divergensfritt felt

- Dersom $\nabla \cdot \mathbf{v} > 0$ sier vi feltet er en ekspansjon, eller har netto utstrømning.
- Dersom $\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$ sier vi feltet er en kontraksjon, eller har netto innstrømning.
- Dersom $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ sier vi feltet er divergensfritt. Noen ganger kalles dette et inkompressibelt felt med inspirasjon fra fluidmekanikk (væsker lar seg i praksis ikke komprimere), andre ganger kalles dette et solenoid-felt med inspirasjon fra elektromagnetisme ([Wikipedia:Solenoid](#); et magnetfelt er divergensfritt).

Eksempel: Posisjonsvektor i 3D

For $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ har vi

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$$

som viser at posisjonsvektor er en ekspansjon.

Eksempel: Posisjonsvektor i 2D

For $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ har vi

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 2$$

som viser at posisjonsvektor er en ekspansjon.

Eksempel: Posisjonsvektor i 1D

For $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$ har vi

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 1$$

som viser at posisjonsvektor er en ekspansjon.

De tre eksemplene ovenfor viser at divergensen til posisjonsvektor faktisk forteller oss hvor mange dimensjoner rommet har!

Eksempel: Rotasjon som stivt legeme

For $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ hvor $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$ og $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ har vi

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

Rotasjon som et stivt legeme er altså inkompressibel, det vil si at en slik rotasjon hverken utvider eller komprimerer et volum.

(Og det er jammen bra, for det betyr at dersom vi sitter på en karusell i en fornøyelsespark så vil vi ikke presses sammen eller strekkes ut!)

Eksempel: Mer generell rotasjon, ikke nødvendigvis som stivt legeme

Vi ser på hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^n}$$

hvor n er et vilkårlig tall. Dersom $n \geq 1/2$ er origo et singulært punkt, dersom $n < 1/2$ er origo et stagnasjonspunkt, og dersom $n = 0$ er dette rotasjon som et stivt legeme.

Divergensen er

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-y}{(x^2 + y^2)^n} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^n} \right) = 0$$

Følgelig vet vi at feltet er divergensfritt. Dette betyr at feltet kan egne seg som en beskrivelse av hastigheten til ei væske, for eksempel for bevegelse av vann. Væsker har den egenskapen at de i praksis ikke lar seg komprimere.

6.2 Virvling (curl)

Den enkleste måten å definere virvling er å oppgi formelen i kartesiske koordinater (slik som for eksempel gitt i LH kap. 6.13 [3]):

$$\text{curl } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (6.3)$$

hvor vi kan tenke oss at del-operatoren er

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

og vektorfeltet er

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

Vi kunne imidlertid ønske oss en definisjon av virvling som bedre hjelper oss å forstå hva virvling faktisk er. En slik definisjon finner vi hos M kap. 3.4 [5]. Denne definisjonen hjelper oss dessuten å forstå hvordan virvling generaliseres til krumlinjede koordinater senere:

$$\mathbf{n} \cdot \text{curl } \mathbf{v} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (6.4)$$

Her er γ en lukket kurve som omslutter en flate S med areal A . Flaten S har enhetsnormalvektor $\mathbf{n}$. Kurven γ og flatenormalvektoren $\mathbf{n}$ er orientert i henhold til høyrehåndsregelen. Integralet gir sirkulasjonen rundt den lukkede kurven γ . Grenseoppgangen forteller om feltet har netto sirkulasjon rundt et punkt når flaten skrumper inn til punktet.

Vi skal nå vise at dersom vi starter med integral-definisjonen (6.4) så følger differensial-uttrykket (6.3) i kartesiske koordinater som en konsekvens.

Vi lar γ være et rektangel orientert langs de kartesiske aksene slik at det blir lett å regne på i kartesiske koordinater: Et rektangel med ett hjørne i (x_0, y_0, z_0) og motsatt hjørne $(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ orientert parallelt med yz -planet og med sidekanter Δy og Δz . Vi har normalvektoren $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ i positiv x -retning, og orienterer kurven γ i henhold til høyrehåndsregelen.

1. Siden er $x = x_0, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y$ og $z = z_0$. En passende parameterisering kan være $\mathbf{r}(t) = x_0 \mathbf{i} + (y_0 + t) \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}$ for $0 \leq t \leq \Delta y$. Differensialet av posisjonsvektor er $d\mathbf{r} = \mathbf{j} dt$. Langs siden har vi $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = v_y(\mathbf{r}(t)) dt$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $v_y(x_0, y_0, z_0) \Delta y$.
2. Siden er $x = x_0, y = y_0 + \Delta y$ og $z_0 \leq z \leq z_0 + \Delta z$. En passende parameterisering kan være $\mathbf{r}(t) = x_0 \mathbf{i} + (y_0 + \Delta y) \mathbf{j} + (z_0 + t) \mathbf{k}$ for $0 \leq t \leq \Delta z$. Differensialet av posisjonsvektor er $d\mathbf{r} = \mathbf{k} dt$. Langs siden har vi $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = v_z(\mathbf{r}(t)) dt$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $v_z(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) \Delta z$.

3. Siden er $x = x_0$, $y_0 + \Delta y \geq y \geq y_0$ og $z = z_0 + \Delta z$. En passende parameterisering kan være $\mathbf{r}(t) = x_0 \mathbf{i} + (y_0 + \Delta y - t) \mathbf{j} + (z_0 + \Delta z) \mathbf{k}$ for $0 \leq t \leq \Delta y$. Differensialet av posisjonsvektor er $d\mathbf{r} = -\mathbf{j} dt$. Langs siden har vi $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -v_y(\mathbf{r}(t)) dt$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $-v_y(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) \Delta y$.
4. Siden er $x = x_0$, $y = y_0$ og $z_0 + \Delta z \geq z \geq z_0$. En passende parameterisering kan være $\mathbf{r}(t) = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + (z_0 + \Delta z - t) \mathbf{k}$ for $0 \leq t \leq \Delta z$. Differensialet av posisjonsvektor er $d\mathbf{r} = -\mathbf{k} dt$. Langs siden har vi $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -v_z(\mathbf{r}(t)) dt$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $-v_z(x_0, y_0, z_0) \Delta z$.

Dersom vi summerer motstående sider får vi

$$\text{Side 1 og 3: } v_y(x_0, y_0, z_0) \Delta y - v_y(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) \Delta y \approx -\frac{\partial v_y}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \Delta y \Delta z.$$

$$\text{Side 2 og 4: } v_z(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) \Delta z - v_z(x_0, y_0, z_0) \Delta z \approx \frac{\partial v_z}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \Delta y \Delta z.$$

Vi har følgelig sirkulasjonsintegralet

$$\oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \approx \mathbf{i} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \Delta y \Delta z$$

Legg merke til at i grensen $\Delta y \rightarrow 0$ og $\Delta z \rightarrow 0$ så krymper kurven γ inn til et punkt, alle tilnærmingene vil bli eksakt, og vi har at definisjonen (6.4) impliserer (6.3), dog har vi egentlig kun vist det for vårt spesielle valg $\mathbf{n} = \mathbf{i}$.

Vi må egentlig gjenta utregningen ovenfor for to andre valg av normalvektor $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ og $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ for å bestemme alle komponentene av virvlinga. Vi nøyer oss imidlertid med å bare slå fast

$$\mathbf{n} \cdot \text{curl } \mathbf{v} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{n} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

for vilkårlig $\mathbf{n}$.

Eksempel: Virvling av posisjonsvektor

Posisjonsvektor $\mathbf{r}$ er virvelfri, $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$, uansett om den er én-dimensjonal $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$, to-dimensjonal $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ eller tre-dimensjonal $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Eksempel: Rotasjon som stivt legeme, vinkelhastighet langs z -aksen

La $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$. Hastighetsfeltet $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}$ er inkompressibelt $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, og har virvling

$$\nabla \times \mathbf{v} = 2\omega \mathbf{k} = 2\boldsymbol{\omega}$$

Vi kan regne ut sirkulasjonen av dette hastighetsfeltet rundt en sirkel γ med radius r og med sentrum i origo, orientert i samme retning som feltet,

$$C = \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi r^2 \omega = 2A\omega > 0$$

Vi legger altså merke til at både sirkulasjonen og virvlingas komponent i z -retning har samme fortegn.

Dette har en viktig praktisk tolkning: Dersom vi står på en karusell så opplever vi egentlig to typer rotasjon samtidig: På den ene siden den globale bevegelsen rundt rotasjonsaksen til karusellen. På den andre siden den lokale rotasjonen rundt oss selv. Begge rotasjonsbevegelsene er orientert samme vei, og følgelig sier vi at rotasjonene er prograd.

Eksempel: Mer generell rotasjon, ikke nødvendigvis som stivt legeme

La hastighetsfeltet være

$$\mathbf{v} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^n}$$

hvor n er et vilkårlig tall. Dersom $n \geq 1/2$ er origo et singulært punkt, dersom $n < 1/2$ er origo et stagnasjonspunkt, og dersom $n = 0$ er dette rotasjon som et stivt legeme.

Vi kan nå regne ut virvlinga

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \mathbf{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-y}{(x^2 + y^2)^n} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^n} \right) \right] = \frac{2(1-n)}{(x^2 + y^2)^n} \mathbf{k}$$

Spesielt ser vi at virvlinga kan være rettet i både positiv og negativ z -retning, og kan også være lik null.

Virvlinga peker i negativ z -retning for $n > 1$, feltet er virvelfritt for $n = 1$, og virvlinga peker i positiv z -retning for $n < 1$.

La oss illustrere feltet med et vektor pileplott. For å gjøre det skal vi først undersøke om feltet har stagnasjonspunkter $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ eller singulære punkter hvor enten $|\mathbf{v}| \rightarrow \infty$ eller $\mathbf{v}$ ikke er entydig definert. Vi innser at det er kun origo som kan være enten stagnasjonspunkt eller singulært punkt. La oss introdusere polare koordinater

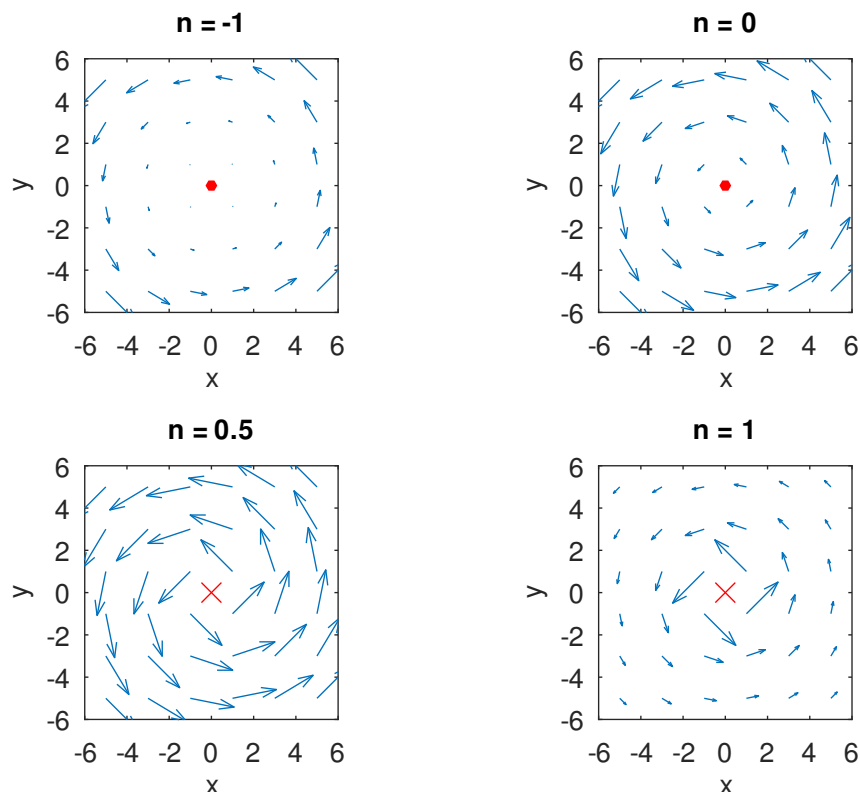
$$x = r \cos \theta \quad \text{og} \quad y = r \sin \theta$$

hvor $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ er avstand til origo. Hastighetsfeltet blir da

$$\mathbf{v} = r^{1-2n}(-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j})$$

Nå ser vi at origo ($r = 0$) er et stagnasjonspunkt for $n < 1/2$ og et singulært punkt for $n \geq 1/2$. Spesielt ser vi at for $n = 1/2$ så er feltet ikke entydig definert i origo, og for $n > 1/2$ er feltet uendelig i origo.

I figurene nedenfor har vi markert stagnasjonspunkt med rød $\bullet$, og vi har markert singulære punkt med rød $\times$:



Disse figurene viser at det er en global rotasjonsbevegelse rundt origo. Vi kan karakterisere denne globale rotasjonsbevegelsen ved å regne ut sirkulasjonen rundt en sirkel med radius r med sentrum i origo. Sirkelen kan parametriseres som

$$\mathbf{r}(\theta) = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} \quad \text{for } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Differensialet av posisjonsvektor er

$$d\mathbf{r}(\theta) = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} d\theta = r(-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) d\theta$$

Vi har fra tidligere

$$\mathbf{v} = r^{1-2n}(-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j})$$

og kan regne ut

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = r^{2-2n} d\theta$$

Nå er det enkelt å finne sirkulasjonen

$$C = \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} r^{2-2n} d\theta = 2\pi r^{2-2n} > 0$$

Vi legger altså merke til at sirkulasjonen alltid har samme fortegn, og er aldri lik null, uansett verdien til n .

Fra dette resultatet kan vi konkludere at det alltid er en global bevegelse i samme retning.

Retrograd og prograd bevegelse

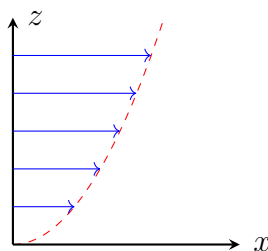
Denne terminologien er mest vanlig brukt i astronomi om planetbevegelse, se [Wikipedia: Retrograd og prograd bevegelse](#), men vi kan låne terminologien for å angi om en global rotasjonsbevegelse er lik eller motsatt den lokale rotasjonen rundt seg selv:

- Dersom virvlinga er orientert likt med sirkulasjonen sier vi rotasjonsbevegelsen er prograd — for vårt eksempel skjer dette for $n < 1$.
- Dersom virvlinga er orientert motsatt av sirkulasjonen sier vi rotasjonsbevegelsen er retrograd — for vårt eksempel skjer dette for $n > 1$.

Nå burde det være ganske klart at den globale bevegelsen man har i en rotasjonsbevegelse ikke trenger å være den samme som den lokale rotasjonen man opplever rundt seg selv!

Eksempel: Vindprofil nær bakken

La xy -planet være bakken, la z -aksen peke oppover, og la vinden blåse i x -retning $\mathbf{v} = v_x(z)\mathbf{i}$. I figuren er $v_x(z)$ angitt med stiplet rød linje og $\mathbf{v}$ angitt med blå piler. Legg spesielt merke til at $\frac{\partial v_x}{\partial z} > 0$, den horisontale hastigheten øker med økende avstand fra bakken.



Dette kalles en “skjærstrøm” (engelsk “shear current”) fordi fluid-partikler som ligger ved siden av hverandre (i z -retning) beveger seg i x -retning med forskjellig hastighet og vil derfor gni mot hverandre.

Det er fornuftig å anta at vinden oppfører seg slik nær bakken fordi den vil bremses på grunn av friksjon mot bakken.

Skjærstrømmen er divergensfri

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x(z)}{\partial x} = 0$$

følgelig er den inkompressibel, modellen kunne ha passet like godt for både væske og gass (vann og luft).

Skjærstrømmen har virvling

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z} \mathbf{j}$$

og ettersom vi vet at $\frac{\partial v_x}{\partial z} > 0$ så ser vi at virvlinga er orientert i positiv y -retning.

Anta at en bevisstløs mygg lar seg frakte med denne vinden. Vil myggen ha en tendens til å rotere rundt seg selv?

Om vi kan betrakte hastighetsfeltet lokalt som en rotasjon som et stivt legeme, og om vi i tillegg kan anta at myggen vil bevege seg som en naturlig del av denne rotasjonen som et stivt legeme, så har vi resultatet fra forrige eksempel at vinkelhastighetsvektoren vil være $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial z} \mathbf{j}$ som er orientert i positiv y -retning. Dersom denne betraktningen er fornuftig så kan det se ut til at myggen vil rotere rundt seg selv som om den skulle rulle bortover langs bakken, selv om den ikke er i kontakt med bakken.

For at dette eksemplet skal gi mening så er det kanskje viktig at myggen er bevisstløs, fordi ellers kunne den ha flakset med vingene for å opprettholde en viss orientering?

Praktisk oppgave:

Er strømning nær sluket i en vask prograd eller retrograd?

Er strømning når vi rører rundt i en kopp prograd eller retrograd?

Oppgaven består i å fylle vann i en vask eller et badekar eller en kopp eller en balje. Ta litt støv fra gulvet, eller noen små papirbiter, og strø dem over vannoverflaten. Rør om. Trekk eventuelt ut proppen.

Studer hvordan støvkornene roterer rundt seg selv i forhold til deres globale rotasjonsbevegelse. Er dette prograd eller retrograd bevegelse?

Bestem hva som kunne ha vært en passende verdi for parameteren n for at vår modell skal beskrive bevegelsen!

Er det forskjell på strømningene i de to tilfellene?

6.3 Oppgaver

6.1 Regn ut divergensen til vektorfeltene

(a) $\mathbf{v} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{v} = \frac{yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$

(c) $\mathbf{v} = e^{xyz}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

6.2 Regn ut virvlinga til vektorfeltene i forrige oppgave.

6.3 La $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ og $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Regn ut divergensen til vektorfeltet $\mathbf{v} = r^n \mathbf{r}$.

6.4 Regn ut virvlinga til vektorfeltet i forrige oppgave.

6.5 La $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ og $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Regn ut divergensen til vektorfeltet $\mathbf{v} = r^n \mathbf{r}$.

6.6 Regn ut virvlinga til vektorfeltet i forrige oppgave.

Kapittel 7

Mer regning med del operatoren

7.1 Laplace operator, Laplace likning, Poisson likning

Divergensen til en gradient kaller vi for Laplace operatoren, $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$. I tredimensjonale kartesiske koordinater gir dette uttrykket

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Som alternativ til å anvende Laplace operatoren på et vektorfelt kan vi omskrive ved identiteten

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

eller

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

Eksempel:

$$\begin{aligned}\nabla^2(x^2 + xy) &= 2 \\ \nabla^2(x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}) &= 2\mathbf{i}\end{aligned}$$

Laplace likning

Laplace likning sier at Laplace operatoren anvendt på et eller annet er lik null, for eksempel $\nabla^2\phi = 0$ eller $\nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{0}$ hvor ϕ er et skalarfelt og $\mathbf{A}$ er et vektorfelt.

Poisson likning

Poisson likning sier at Laplace operatoren anvendt på et eller annet er lik noe som ikke er null, for eksempel $\nabla^2\phi = \rho$ eller $\nabla^2\mathbf{A} = \boldsymbol{\rho}$ hvor ϕ og ρ er skalarfelt og $\mathbf{A}$ og $\boldsymbol{\rho}$ er vektorfelt.

Eksempel:

$\phi = xy$ er en mulig løsning av Laplace likning $\nabla^2\phi = 0$.

$\mathbf{A} = xy\mathbf{j}$ er en mulig løsning av Laplace likning $\nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

$\phi = x^2$ er en mulig løsning av Poisson likning $\nabla^2\phi = 2$.

$\mathbf{A} = x^2\mathbf{i}$ er en mulig løsning av Poisson likning $\nabla^2\mathbf{A} = 2\mathbf{i}$.

7.2 To viktige spesialtilfeller: Divergensen til ei virvling og virvlinga til en gradient

Divergensen til ei virvling er null

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} \right) = 0\end{aligned}$$

Dette er lik null på betingelse av at det ikke spiller noen rolle hvilken rekkefølge vi utfører partiellderivasjonene. LH setning 2.5.2 [3] sier at dersom de blandete deriverte eksisterer og er kontinuerlige så er de like. Her antar vi at dette er oppfylt.

Dette resultatet kan vi tolke slik: Dersom et vektorfelt kan uttrykkes som en virvling, $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}$, så er vektorfeltet divergensfritt, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Vektorfeltet $\mathbf{A}$ kaller vi et vektorpotensial. Vi skal straks vise at implikasjonen også går motsatt vei: Dersom et vektorfelt er divergensfritt, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, så eksisterer det et vektorpotensial $\mathbf{A}$ slik at $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Virvlinga til en gradient er null

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \phi &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Dette er lik null på betingelse av at det ikke spiller noen rolle hvilken rekkefølge vi utfører partiellderivasjonene. LH setning 2.5.2 [3] sier at dersom de blandete deriverte eksisterer og er kontinuerlige så er de like. Her antar vi at dette er oppfylt.

Dette resultatet kan vi tolke slik: Dersom et vektorfelt kan uttrykkes som en gradient, $\mathbf{v} = \nabla \phi$, så er vektorfeltet virvelfritt, $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Vi skal snart vise at implikasjonen også går motsatt vei, dersom et vektorfelt er virvelfritt, $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, så eksisterer det et skalarpotensial ϕ slik at $\mathbf{v} = \nabla \phi$. Dette skal vi etablere etter at vi har introdusert Stokes sats i seksjon 8.2.

Vi sa tidligere i seksjon 4.4 at vektorfeltet $\mathbf{v}$ er konservativt dersom det kan skrives som gradienten til et skalarpotensial ϕ . Vi så i seksjon 5.1 at skalarpotensialet kan skrives som et kurveintegral

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' + c$$

Her er $\mathbf{r}_0$ et vilkårlig startpunkt for en vilkårlig kurve som går til punktet $\mathbf{r}$, og c er en vilkårlig konstant.

7.3 Å finne vektorpotensialet

Vi skal nå vise at dersom et vektorfelt $\mathbf{v}$ er divergensfritt, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, så finnes det et vektorpotensial $\mathbf{A}$ slik at $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}$. Vi viser dette ved å presentere en eksplisitt løsning.

Først regner vi ut virvlinga til $\mathbf{A}$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

Betingelsen $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ medfører én føring blant de tre ukjente (A_x, A_y, A_z) . Derfor kan vi eliminere én av dem. La oss eliminere $A_x = 0$. Da gjenstår det å løse følgende tre likninger

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = v_x, \quad -\frac{\partial A_z}{\partial x} = v_y, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} = v_z$$

Den tredje likninga har løsning

$$A_y = \int_{x_0}^x v_z(x', y, z) dx' + f(y, z)$$

hvor $f(y, z)$ er en vilkårlig funksjon. Den andre likninga har løsning

$$A_z = - \int_{x_0}^x v_y(x', y, z) dx' + g(y, z)$$

hvor $g(y, z)$ er en vilkårlig funksjon. Den første likninga vil nå gi en føring på de to vilkårlige funksjonene f og g . Ved innsetting får vi

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = - \int_{x_0}^x \frac{\partial v_y}{\partial y}(x', y, z) dx' + \frac{\partial g}{\partial y} - \int_{x_0}^x \frac{\partial v_z}{\partial z}(x', y, z) dx' - \frac{\partial f}{\partial z} = v_x$$

Nå benytter vi oss av at $\mathbf{v}$ er divergensfri

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial v_x}{\partial x'}(x', y, z) dx' + \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} = v_x$$

som gir

$$\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} = v_x(x_0, y, z)$$

Vi kan for eksempel kreve at $f = 0$ og løse for g

$$g(y, z) = \int_{y_0}^y v_x(x_0, y', z) dy'$$

Følgelig har vi funnet en eksplisitt løsning for vektorpotensialet

$$\mathbf{A} = \mathbf{j} \int_{x_0}^x v_z(x', y, z) dx' + \mathbf{k} \left(- \int_{x_0}^x v_y(x', y, z) dx' + \int_{y_0}^y v_x(x_0, y', z) dy' \right) \quad (7.1)$$

Det er åpenbart at løsningen vi presenterer i (7.1) ikke er den eneste mulige løsningen for $\mathbf{A}$. Vi valgte, ganske vilkårlig, at $A_x = 0$ og $f = 0$. Vi kunne ha gjort andre valg, for eksempel $A_y = 0$ eller $A_z = 0$ eller $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, etc. Slike føringer kalles på engelsk “gauge” som kanskje kan oversettes til “mål” eller “føring” på norsk, men vi skal bruke ordet “gauge”. Den spesielle føringen $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ kalles “Coulomb gauge”.

Dersom $\mathbf{A}$ er et vektorpotensial for $\mathbf{v}$, det vil si $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}$, så kan vi introdusere en såkalt “gauge transform”, $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \nabla f$. Vi ser at $\mathbf{B}$ også er et vektorpotensial for $\mathbf{v}$, fordi $\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla f = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{v}$. Dette kalles “gauge invarians”.

Eksempel:

Det divergensfrie vektorfeltet $\mathbf{v} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ har vektorpotensial $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ som ikke oppfyller Coulomb gauge fordi $\nabla \cdot \mathbf{A} = 2$. Vi kan finne et annet vektorpotensial $\mathbf{B}$ som oppfyller Coulomb gauge ved gauge transformen $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \nabla f$. Ved å ta divergensen $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 f = 2 + \nabla^2 f = 0$ innser vi at f må tilfredsstille Poisson likning $\nabla^2 f = -2$. En mulig løsning er $f = -x^2$. Dette gir $\mathbf{B} = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ som er vektorpotensial for $\mathbf{v}$ og som oppfyller Coulomb gauge.

7.4 Strømfunksjon

Dersom et vektorfelt er 2D og divergensfritt kan vi representere det med et vektorpotensial med kun én komponent orientert i den ortogonale retningen. For eksempel, dersom $\mathbf{v}$ er todimensjonal i xy -planet, slik at $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$, og $\mathbf{v}$ er divergensfri, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, så reduserer (7.1) seg til kun én komponent i z -retning. Vi kan da skrive vektorpotensialet som $\mathbf{A} = -\mathbf{k}\psi$. Funksjonen ψ skal vi kalle for strømfunksjon.

Vi antar altså at $\mathbf{v}$ er et 2D divergensfritt vektorfelt i xy -planet,

$$\mathbf{v} = v_x(x, y)\mathbf{i} + v_y(x, y)\mathbf{j},$$

og at vi kan representere $\mathbf{v}$ ved en strømfunksjon $\psi(x, y)$ assosiert med et vektorpotensial $\mathbf{A} = -\mathbf{k}\psi$ slik at $\mathbf{v} = \nabla \times (-\mathbf{k}\psi) = \mathbf{k} \times \nabla \psi$. Dette gir

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Det er enkelt å vise at $\mathbf{v}$ i så fall er divergensfri

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0.$$

I henhold til LH setning 2.5.2 [3] vet vi at dersom de blandete deriverte eksisterer og er kontinuerlige så er de like. Vi skal anta at dette er oppfylt slik at det ikke spiller noen rolle hvilken rekkefølge vi utfører derivasjonene.

Vi innser at at dersom et vektorfelt ikke er divergensfritt så har det ikke en strømfunksjon.

Eksempel:

Dersom $\mathbf{v} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ kan vi finne strømfunksjon fra likningene $v_x = x = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$ og $v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$. Den første likninga har løsning $\psi = -xy + f(x)$ hvor $f(x)$ er en vilkårlig funksjon av x . Den andre likninga har løsning $\psi = -xy + g(y)$ hvor $g(y)$ er en vilkårlig funksjon av y . For at disse løsningene skal passe sammen må vi ha $f(x) = g(y) = c$ hvor c er en vilkårlig konstant. Løsningen er altså $\psi = -xy + c$.

Eksempel:

La oss vise at dersom vektorfeltet $\mathbf{v}$ er divergensfritt og 2D i xy -planet så kan vi konstruere en strømfunksjonen ved kurveintegralet

$$\psi(x, y) = \int_0^r (\mathbf{v}(\mathbf{r}') \times \mathbf{k}) \cdot d\mathbf{r}' \quad (7.2)$$

En måte å gjøre dette er å først regne ut gradienten $\nabla\psi = \mathbf{v} \times \mathbf{k}$, og deretter regne ut $\mathbf{k} \times \nabla\psi = \mathbf{k} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{k}) = \mathbf{v}$. En annen framgangsmåte er å gjenkjenne integralet som z -komponenten i likning (7.1).

Legg merke til at representasjonen (7.2) kun er veldefinert dersom integralet er uavhengig av veien, det vil si at integranden er et konservativt felt. For å vise at dette er tilfelle kan vi vise at integranden $\mathbf{v} \times \mathbf{k}$ er virvelfri

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{k}) = (\mathbf{k} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \mathbf{k}(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z} - \mathbf{k}(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

hvor vi har benyttet identiteten $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{C}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ og det faktum at $\mathbf{k}$ er konstant, og at $\mathbf{v}$ verken er funksjon av z eller har divergens.

Nå som vi vet at integralet er uavhengig av vei kan vi velge veien slik vi måtte ønske, for eksempel fra origo til $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$ og deretter videre til $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, langs to rette linjestykker. Dette gir

$$\psi(x, y) = \int_0^x v_y(x', 0) dx' - \int_0^y v_x(x, y') dy' \quad (7.3)$$

Vi kan nå vise at $\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_y$ og $\frac{\partial\psi}{\partial y} = -v_x$, se oppgave nedenfor.

7.4.1 Strømlinjer og strømfunksjon

Vi forstår hvorfor strømfunksjonen har fått sitt navn når vi innser relasjonen til strømlinjene. Vi har tidligere definert strømlinjene som kurver som er overalt tangent til vektorfeltet, uttrykt ved $\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}$. For 2D felt i xy -planet har vi

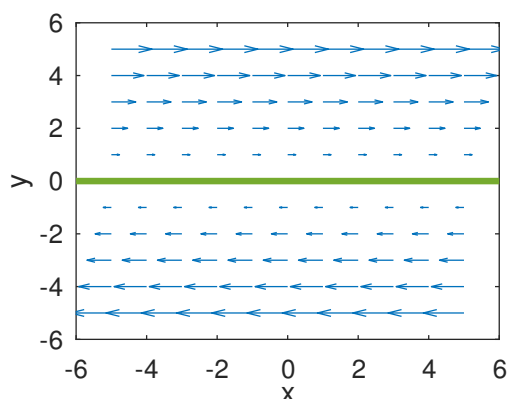
$$\mathbf{0} = \mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial x} & 0 \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \mathbf{i} \frac{\partial\psi}{\partial x} dz + \mathbf{j} \frac{\partial\psi}{\partial y} dz - \mathbf{k} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial x} dx \right)$$

Vi gjenkjenner $\nabla\psi \cdot d\mathbf{r} = d\psi$ som et fullstendig differensial. Likninga er oppfylt dersom $dz = 0$ og $d\psi = 0$. Strømlinjene er gitt ved $\psi = \text{konstant}$ i plan med $z = \text{konstant}$.

Dersom strømfunksjonen ψ eksisterer så er strømlinjene gitt ved ekviskalarkurvene $\psi = \text{konstant}$. Dette kan for eksempel plottes på datamaskin ved hjelp av en `contour`-kommando.

Husk at strømfunksjonen ikke alltid eksisterer! I så fall må vi gå tilbake til den opprinnelige differensiallikninga for strømlinjer $\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

Eksempel: Finn strømfunksjonen og strømlinjene til feltet $\mathbf{v} = y\mathbf{i}$



Vi ser at dette er en skjærstrøm, og at alle punkter langs x -aksen ($y = 0$) er stagnasjonspunkter.

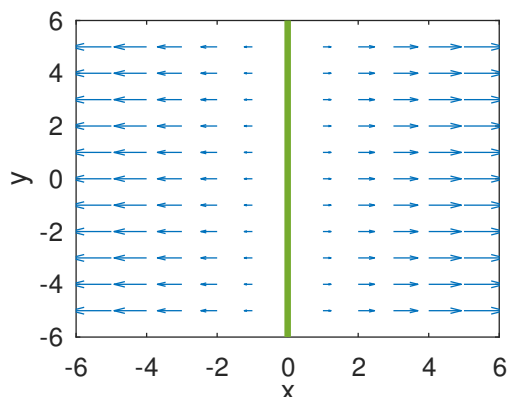
Alternativ 1:

$\mathbf{v}$ er divergensfritt og 2D, derfor vet vi at en strømfunksjon eksisterer. Vi finner $\psi = -\frac{1}{2}y^2 + c$ hvor c er en vilkårlig konstant. Strømlinjene er $\psi = \text{konstant}$, det vil si linjer parallelle med x -aksen.

Alternativ 2:

Vi kan løse $\mathbf{0} = \mathbf{v} \times d\mathbf{r} = -jydz + kydy$. Dette gir to skalare likninger $ydz = 0$ og $ydy = 0$. Vi ser at $y = 0$ er en triviell løsning som gir alle stagnasjonspunktene, men vi ønsker også løsning for $y \neq 0$. Vi har da at $dz = 0$ og $dy = 0$ som gir $z = \text{konstant}$ og $y = \text{konstant}$, som er rette linjer parallelle med x -aksen.

Eksempel: Finn strømfunksjonen og strømlinjene til feltet $\mathbf{v} = x\mathbf{i}$



Vi ser at alle punkter langs y -aksen ($x = 0$) er stagnasjonspunkter.

Alternativ 1:

Divergensen er ulik null, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 1$. Forsøk på å finne en strømfunksjon ψ leder til en selvmodsigelse. Det eksisterer ikke en strømfunksjon.

Alternativ 2:

Vi kan finne strømlinjene ved å løse $\mathbf{0} = \mathbf{v} \times d\mathbf{r} = -jxdz + kxdy$. Dette gir to skalare likninger $x dz = 0$ og $x dy = 0$. Vi ser at $x = 0$ er en triviell løsning som gir alle stagnasjonspunktene, men vi ønsker også løsninger for $x \neq 0$. Vi har da at $dy = 0$ og $dz = 0$ som gir $y = \text{konstant}$ og $z = \text{konstant}$, som er rette linjer parallelle med x -aksen.

NB! Merk at strømlinjene er de samme som i forrige eksempel, selv om vektorfeltene er forskjellige! Det er altså ikke tilstrekkelig å identifisere strømlinjene for å entydig identifisere et vektorfelt!

7.4.2 Strømrør

Et strømrør er et "rør" med vegger som er strømlinjer. Definisjonen medfører at det ikke vil strømme igjennom veggene til strømrøret.

I tredimensjonalt rom kan vi se for oss strømrør som et vanlig rør. For todimensjonal strømning, for eksempel i xy -planet, kan vi se for oss at veggene i røret er strømlinjer i planet.

I de to eksemplene ovenfor har vi identiske strømrør, begge for plan strøm i xy -planet, med vegger parallelle med x -aksen.

Fluks av todimensjonal strøm gjennom strømrør

Dersom vi begrenser oss til todimensjonal strømning i xy -planet, kan vi regne ut den integrerte fluksen gjennom et tverrsnitt av et strømrør ved integralet $\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$ hvor kurven γ ligger i xy -planet og krysser strømrøret fra et punkt A på den ene siden til et punkt B på den andre siden av røret.

Merk: Dette er integrert fluks for en plan strømning gjennom en kurve γ i planet. Derfor benytter vi ds som er et infinitesimalt kurveelement, og ikke $d\sigma$ som er et infinitesimalt flateelement. Enhetsvektoren $\mathbf{n}$ står normalt på kurveelementet i xy -planet.

Vi har $\mathbf{n} ds = \pm \mathbf{k} \times d\mathbf{r} = \pm(-idy + jdx)$. La oss anta at $\mathbf{n}$ skal peke i positiv x -retning, og at dy er positiv, så vi velger $\mathbf{n} ds = idy - jdx$. Den integrerte fluksen gjennom kurven γ blir $\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\gamma} v_x dy - v_y dx$. Nå kommer vi ikke lenger uten å gjøre flere antakelser.

Dersom vi antar at feltet har en strømfunksjon så blir integranden et fullstendig differensial og vi får

$$\int_A^B \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\gamma} -\frac{\partial \psi}{\partial y} dy - \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = -\int_A^B d\psi = \psi_A - \psi_B.$$

Vi ser altså at dersom strømfunksjonen eksisterer så er resultatet uavhengig av integrasjonsveien. Resultatet også uavhengig av hvor endepunktene A og B befinner

langs strømlinene fordi strømfunksjonen er konstant langs hver av veggene. Resultatet sier altså at den integrerte fluksen er konstant over alle tverrsnitt av strømrøret!

Dersom strømfunksjonen eksisterer er den integrerte fluksen i et strømrør gitt ved differansen i strømfunksjonen mellom de to sidene. Da er den integrerte fluksen konstant over alle tverrsnitt.

Dersom strømfunksjonen ikke eksisterer må vi derimot regne med at den integrerte fluksen i et strømrør avhenger av tverrsnittet.

Eksempel: Integrert fluks i strømrør for feltet $\mathbf{v} = y\mathbf{i}$

Vi har tidligere sett at det eksisterer en strømfunksjon $\psi = -\frac{1}{2}y^2 + c$. Strømlinjene er de rette linjene $y = \text{konstant}$. Dersom vi betrakter et strømrør med vegger $y = a$ og $y = b$ så vil den integrerte fluksen være

$$\int_A^B \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \psi_A - \psi_B = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$$

hvor vi tenker oss at punktet A ligger på strømlinja $y = a$ og punktet B ligger på strømlinja $y = b$.

Vi kunne også ha regnet dette ut direkte, uten bruk av strømfunksjon, for eksempel gjennom tverrsnittet $x = \text{konstant}$ og $a \leq y \leq b$

$$\int_A^B \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_a^b y\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} \, dy = \frac{1}{2}y^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$$

Legg merke til at den integrerte fluksen i strømrøret er konstant for alle tverrsnitt.

Eksempel: Integrert fluks i strømrør for feltet $\mathbf{v} = x\mathbf{i}$

Vi har allerede sett at det ikke eksisterer noen strømfunksjon. Vi regner derfor ut den integrerte fluksen direkte. For tverrsnittet $x = \text{konstant}$ og $A \leq y \leq B$ har vi

$$\int_A^B \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_a^b x\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} \, dy = xy \Big|_{y=a}^b = x(b-a)$$

Legg merke til at nå er den integrerte fluksen avhengig av x -koordinaten, den integrerte fluksen avhenger av tverrsnittet!

7.5 Helmholtz dekomposisjon

Et generelt vektorfelt $\mathbf{v}$ kan splittes opp som en sum av en virvelfri del og en divergensfri del, dette kalles for Helmholtz teorem eller Helmholtz dekomposisjon.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{virvelfri}} + \mathbf{v}_{\text{divergensfri}}$$

Denne oppsplittingen er ikke entydig bestemt. Dersom feltet $\mathbf{u}$ er både virvel- og divergensfritt, så kan vi definere $\tilde{\mathbf{v}}_{\text{virvelfri}} = \mathbf{v}_{\text{virvelfri}} + \mathbf{u}$ og $\tilde{\mathbf{v}}_{\text{divergensfri}} = \mathbf{v}_{\text{divergensfri}} - \mathbf{u}$, og vi har en alternativ oppsplitting $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}_{\text{virvelfri}} + \tilde{\mathbf{v}}_{\text{divergensfri}}$.

Vi har allerede sett at et virvelfritt felt kan representeres ved et skalarpotensial $\mathbf{v}_{\text{virvelfri}} = \nabla\phi$ og at et divergensfritt felt kan representeres ved et vektorpotensial $\mathbf{v}_{\text{divergensfri}} = \nabla \times \mathbf{A}$, dermed kan vi skrive

$$\mathbf{v} = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A}$$

Vi vet at utregningen av potensialene ikke er entydig. Til skalarpotensialet ϕ kan vi addere en vilkårlig skalar konstant. Vektorpotensialet kan endres ved en såkalt “gauge transform” for at det skal oppfylle en ønsket “gauge”. Dette gjøres for å gi oss en mest mulig fordelaktig Helmholtz dekomposisjon i skalar- og vektorpotensial.

Eksempel: Finn en Helmholtz dekomposisjon til feltet $\mathbf{v} = y\mathbf{i}$

Vi har $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ og $\nabla \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, følgelig trenger vi ikke ϕ og kan legge alt inn i $\mathbf{A}$. En mulig løsning er $\mathbf{A} = -\psi\mathbf{k}$ hvor $\psi = -\frac{1}{2}y^2\mathbf{k}$ og $\phi = 0$.

Eksempel: Finn en Helmholtz dekomposisjon til feltet $\mathbf{v} = x\mathbf{i}$

Vi har $\nabla \cdot \mathbf{v} = 1$ og $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, følgelig trenger vi ikke $\mathbf{A}$ og kan legge alt inn i ϕ . En mulig løsning er $\phi = \frac{1}{2}x^2$ og $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Eksempel: Finn en Helmholtz dekomposisjon til feltet $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Vi har $\nabla \cdot \mathbf{v} = 3 \neq 0$ og $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, følgelig trenger vi ikke $\mathbf{A}$ og kan legge alt inn i ϕ . En mulig løsning er $\phi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ og $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Eksempel: Finn en Helmholtz dekomposisjon for $\mathbf{v} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$

I dette tilfellet har vi divergens $\nabla \cdot \mathbf{v} = 2 \neq 0$ og virvling $\nabla \times \mathbf{v} = 2\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$. Vi må derfor splitte opp $\mathbf{v}$ i en divergensfri og en virvelfri del. Dette kan gjøres på mange måter, det er ikke et entydig svar!

Vi kan prøve $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ hvor $\mathbf{v}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ og $\mathbf{v}_2 = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. For $\mathbf{v}_1$ har vi divergens $\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 2 \neq 0$ og virvling $\nabla \times \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. For $\mathbf{v}_2$ har vi divergens $\nabla \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ og virvling $\nabla \times \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$. I så fall kan vi benytte skalarpotensialet $\phi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ for $\mathbf{v}_1$, og vi kan benytte strømfunksjonen $\psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ med tilhørende vektorpotensial $\mathbf{A} = -\psi\mathbf{k}$ for $\mathbf{v}_2$.

Det må understrekes på ny at ingen av disse eksemplene har kun ett riktig svar! Oppsplittingen i virvel- og divergensfri del er ikke entydig. Skalarpotensialet for et gitt virvelfritt felt er ikke entydig. Vektorpotensialet for et gitt divergensfritt felt er ikke entydig.

7.6 Vektor differensial identiteter

Ved hjelp av produktregelen for derivasjon, samt de fire vektor-identitetene

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (7.4)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (7.5)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (7.6)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (7.7)$$

kan vi nå utlede følgende formler som står i Matthews side 81–82 [5] og i Rottmann side 64 [6]:

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (7.8)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{u}) = \nabla f \cdot \mathbf{u} + f\nabla \cdot \mathbf{u} \quad (7.9)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{u}) = \nabla f \times \mathbf{u} + f\nabla \times \mathbf{u} \quad (7.10)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} \quad (7.11)$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (7.12)$$

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (7.13)$$

Tre viktige kommentarer bør gis om disse formlene:

For det første kan vi legge merke til at notasjonen til Rottman [6] er forskjellig fra den vi er vant til. Det kan være ganske forvirrende, for eksempel dersom vi skulle begynne å bla i Rottmann for første gang når vi sitter på eksamen!

For det andre har vi presentert disse formlene på koordinatfri form. Vi har altså ikke begrenset oss til ett bestemt koordinatsystem. Den motsatte ytterlighet finner vi i Matthews kapittel 4 [5] hvor disse identitetene utledes i kartesiske koordinater med indeks notasjon.

For det tredje har formlene over blitt skrevet slik at derivasjonsoperatoren alltid virker mot høyre og tildels overflødige parenteser er satt slik at beregning av dyader unngås. Det er nemlig en stor utfordring å beregne dyader som involverer ∇ , som forklart i det følgende:

Litt om dyadiske produkter

I dette kompendiet skriver vi dyadisk produkt mellom to vektorer uten noe symbol $\mathbf{ab}$. Andre bruker notasjonen $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ som betyr det samme.

Dyadiske produkter kommuterer ikke, $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$. Skalarprodukt og dyadisk produkt kan beregnes i vilkårlig rekkefølge, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{bc} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{bc})$. For at dette skal gjelde kreves det at vektor-retningene i dyaden $\mathbf{bc}$ er slik at vektor-retingen til $\mathbf{b}$ kommer før vektor-retningen til $\mathbf{c}$.

I praksis er det arbeidsbesparende å utføre prikk-operasjonen først, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.

Gradienten til en vektor er problematisk!

Forfatteren av dette kompendiet liker å innbille seg at man skal kunne bytte ut hvilken som helst av vektorene ovenfor med ∇ uten at det endrer rekkefølgen av vektor-retningene, for eksempel at følgende skal være riktig

$$\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{c})$$

Med andre ord, at vektor-retningene i dyaden $\nabla \mathbf{c}$ er slik at vektor-retingen til ∇ kommer før vektor-retningen til $\mathbf{c}$. Dette er i overensstemmelse med notasjonen i Vilhelm Bjerknes [1] og Gjevik & Fagerland [2] og Matthews [5] og store deler av ingeniør-rettet litteratur innen fluidmekanikk.

Derimot benytter ofte matematisk orientert litteratur seg av motsatt konvensjon. De argumenterer med at siden ∇ ikke bare er en vektor, men også en operator,

så oppfattes dyaden $\nabla \mathbf{c}$ å ha vektor-retningen til $\mathbf{c}$ før vektor-retingen til ∇ . Som eksempel på dette kan man legge merke til hvordan Jacobi-matrisen er orientert i Lindstrøm & Hveberg [3]. Likevel vil man i den samme matematisk orienterte litteraturen stadig oppfatte at vektor-retningene i dyaden $\mathbf{bc}$ er slik at vektor-retingen til $\mathbf{b}$ kommer før vektor-retningen til $\mathbf{c}$. Kanskje dette framstår som inkonsistent?

For å unngå denne tvetydigheten er det tryggest å sette parentes rundt skalarprodukt i uttrykk som $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{c}$ slik at man unngår å beregne $\nabla \mathbf{c}$ eksplisitt. Det er uansett arbeidsbesparende å utføre prikk-operasjonen først.

Eksempel: Rotasjon som stivt legeme med generell vinkelhastighet

La vinkelhastighetsvektor $\boldsymbol{\omega}$ peke i vilkårlig retning. Hastighetsfeltet er $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. La oss vise at hastighetsfeltet er divergensfritt (inkompressibelt)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\overset{\downarrow}{\mathbf{r}} \times \nabla) = \boldsymbol{\omega} \cdot (-\nabla \times \mathbf{r}) = 0$$

Notasjonen $\overset{\downarrow}{\mathbf{r}}$ brukes for å angi at $\mathbf{r}$ skal deriveres av ∇ når ∇ deriverer mot venstre.

La oss regne ut virvlinga

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{r}) - \overset{\downarrow}{\mathbf{r}}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) = 3\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{r}$$

I utregningene ovenfor har vi benyttet at $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ og $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$, at skalarproduktet kommuterer $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, at kryssproduktet oppfyller $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, at vektor-trippel-produkt oppfyller $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ og formelen for “dobbel-kryss-produktet” $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

Pilene over $\mathbf{r}$ til venstre for ∇ indikerer at ∇ deriverer mot venstre. Det føles kanskje unaturlig at ∇ skal derivere mot venstre? Grunnen til at dette fenomenet dukket opp er fordi vi har brukt formlene for vektor-trippel-produkt og dobbel-kryss-produkt blindt. Ettersom vi ønsker å presentere svaret på en slik måte at vi unngår å skrive slike piler, så skriver vi umiddelbart om rekkefølgen slik at ∇ får lov til å derivere mot høyre.

Vi har

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla = \omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z}$$

og følgelig

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \omega_x \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} = \boldsymbol{\omega}$$

Derfor får vi til slutt resultatet

$$\nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$$

Vi kunne ha regnet ut $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{r}$ i motsatt rekkefølge. I så fall har vi $\nabla \mathbf{r} = \mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{k}$ som er identitetsdyade, og $\boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}$ og vi får samme svar.

7.7 Oppgaver

7.1 Øv deg på å utlede vektor differensial formlene (7.8)–(7.13) ved å benytte vektor algebra identitene (7.4)–(7.7) sammen med produktregelen for derivasjon.

7.2 Finn Helmholtz dekomposisjoner, med skalar- og vektorpotensialer, for vektorfeltene i xy -planet:

- (a) $\mathbf{v} = \mathbf{i}$
- (b) $\mathbf{v} = \mathbf{j}$
- (c) $\mathbf{v} = x\mathbf{i}$
- (d) $\mathbf{v} = x\mathbf{j}$
- (e) $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
- (f) $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
- (g) $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
- (h) $\mathbf{v} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
- (i) $\mathbf{v} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/\sqrt{x^2 + y^2}$
- (j) $\mathbf{v} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$
- (k) $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$

7.3 Finn Helmholtz dekomposisjoner, med skalar- og vektorpotensialer, for vektorfeltene i xyz -rommet:

- (a) $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
- (b) $\mathbf{v} = -2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

7.4 Vis at strømfunksjonen definert i likning (7.3) gir $v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$ og $v_y = \frac{\partial\psi}{\partial x}$.

Kapittel 8

Integralsatser

8.1 Gauss integralsats

Vi har tidligere sett at divergensen til et vektorfelt kan uttrykkes som

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

Her er S en lukket flate som omslutter et volum V . Flatenormalvektoren $\mathbf{n}$ er rettet ut av volumet. Integralet gir den integrerte fluksen ut av den lukkede flaten. Grenseoppgangen forteller om feltet har netto utstrømning gjennom en lukket flate i grensen at flaten skrumper inn til et punkt.

Nå ønsker vi å utvide denne tankegangen til et volum V av endelig størrelse, omsluttet av en lukket flate S . Dette gjør vi ved å dele opp det opprinnelige volumet i mange små biter V_m som er omsluttet av flater S_m . Så summerer vi opp bidraget over alle bitene. Vi fjerner grenseverdien midlertidig, multipliserer med volumet, og tar summen

$$\sum_m \nabla \cdot \mathbf{v} V_m \approx \sum_m \int_{S_m} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (8.1)$$

I grensen at bitene blir infinitesimale, vil V_m bli infinitesimale volumelementer $d\tau$, og summen på venstre side over alle volumene kan uttrykkes som et integral. For summen på høyre side innser vi at der hvor to delflater S_m møtes vil fluksintegralene kansellere hverandre ut, de vil gi bidrag som er like i tallverdi og motsatt i fortegn, fordi flatenormalvektorene $\mathbf{n}$ peker i motsatt retning. Dermed vil summen på høyre side over alle flateintegralene bli lik integralet over yttergrensen S .

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\tau = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (8.2)$$

Dette er Gauss sats.

NB! Vi må passe oss for singulariteter i integrasjonsområdene! Enten må vi ekskludere singulære punkter fra integrasjonsområdene V og S , eller så må vi utvide funksjonsbegrepet vårt slik at vi blir i stand til å representere singularitetene. I dette kompendiet skal vi unngå singulære punkter ved å ekskludere dem fra integrasjonsområdene.

Eksempel: Integrert fluks av $\mathbf{v} = x\mathbf{i}$ ut av enhetsterning

La de seks sidene være $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ og $z = 1$. De seks tilhørende enhets normalvektorene er henholdsvis $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$, $\mathbf{n} = \mathbf{j}$, $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ og $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. Det er fluks gjennom kun én av sidene, nemlig $x = 1$ som har enhets normalvektor $\mathbf{n} = \mathbf{i}$. Fluksintegralet er lik 1.

Gauss sats gjør det mulig å la være å regne ut fluksintegralet eksplisitt, men heller regne ut volumintegralet av divergensen. Divergensen er $\nabla \cdot \mathbf{v} = 1$. Volumintegralet av divergensen er derfor lik volumet av enhetskuben, som er lik 1.

Eksempel: $\mathbf{v} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, V kule med radius R rundt origo

Divergensen til $\mathbf{v}$ er $\nabla \cdot \mathbf{v} = 3$. Volumintegralet er derfor lik 3 ganger volumet av kula, $3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$.

Vi kan uttrykke $\mathbf{v}$ som $\mathbf{v} = r\mathbf{i}_r$ hvor $r = |\mathbf{r}|$ og $\mathbf{i}_r$ peker radielt ut fra origo.

For et kuleskall med radius $r = R$ sentrert rundt origo innser vi at enhetsnormalvektor er $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \mathbf{i}_r$. På kuleskallet har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = R\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_r = R$. Følgelig ser vi at fluksintegralet er lik R ganger arealet til kuleskallet, $R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3$.

Eksempel: $\mathbf{v} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, V kule med radius R ikke rundt origo

Divergensen er stadig $\nabla \cdot \mathbf{v} = 3$. Følgelig ser vi at volumintegralet er lik 3 ganger volumet til kula, $3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$, uansett hvor kula er sentrert.

Flateintegralet vil i dette tilfellet være mye vanskeligere å regne ut. For et kuleskall med radius R sentrert rundt $\mathbf{r}_0$ vil enhetsnormalvektor være $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$, og vi får $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$ som ikke umiddelbart ser ut til å være enkelt å integrere over kuleskallet.

Gauss sats omformet et vanskelig flateintegral til et enkelt volumintegral!

Eksempel: Vis at for enhver lukke flate S så er

$$\int_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0$$

Ved å benytte Gauss sats kan vi skrive om til et volumintegral

$$\int_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \, d\tau = 0$$

Her har vi benyttet at divergensen til ei virvling er lik null $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$.

8.1.1 Anvendelse på tyngdekraft**Vektorfeltet i Newtons gravitasjonslov**

Newtons gravitasjonslov for punktmasser sier at tyngdekrafta som virker på en punktmasse m på grunn av en annen punktmasse M er gitt ved

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{i}_r = -GMm\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -GMm\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

hvor G er den universelle gravitasjonskonstanten og r er avstanden mellom de to punktmassene og $\mathbf{i}_r$ er enhetsvektor som peker fra massen M mot massen m . Her

har vi omskrevet uttrykket ved hjelp av kartesiske koordinater som er plassert med origo i punktmassen M .

Vi kan regne ut at vektorfeltet er divergensfritt, $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, for $r \neq 0$, men betyr det at volumintegralet av divergensen er lik 0 dersom vi inkluderer origo i volumintegralet?

Pass på! Vilikårlig nær origo peker $\mathbf{F}$ vilikårlig sterkt i alle retninger! Origo er et singulært punkt!

La oss regne ut flateintegralet over et kuleskall med radius R sentrert rundt origo. På kuleskallet $r = R$ har vi $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \mathbf{i}_r$ og derfor $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{GMm}{R^2}$. Følgelig ser vi at fluksintegralet er $-4\pi GMm$ fordi arealet til kuleskallet er $4\pi R^2$.

Kan dette stemme med Gauss sats?

Problemet er at divergensen $\nabla \cdot \mathbf{F}$ har en vesentlig singularitet i origo. Singulariteten er vesentlig i den forstand at den påvirker volumintegralet til tross for at singulariteten er begrenset til ett enkelt punkt. I dette tilfellet er det tre strategier for å løse problemet:

1. Unngå å integrere over singulariteten.
2. Utvide matematikken slik at vi kan representere singulariteten (utvide funksjonsbegrepet til “generaliserte funksjoner”, “Dirac delta funksjoner”, “distribusjoner” eller “svak formulering”).
3. Bytte ut Newton’s gravitasjonslov med Gauss gravitasjonslov for å unngå å introdusere singulariter.

Den enkleste måten å unngå problemer med singulariteter er å ekskludere de singulære punktene fra integrasjonsområdet. Dette er strategien i MEK1100 og i de tre lærebøkene M [5], GF [2] og LH [3]:

Eksempel: Vektorfeltet i Newtons gravitasjonslov, ekskludert det singulære punktet i origo

Vi kan unngå singulariteten i origo ved å legge et lite kuleskall rundt origo, med liten radius $\epsilon > 0$. Volumet V skal være området $\epsilon \leq r \leq R$, avgrenset av to kuleskall, et ytre skall $r = R$ og et indre skall $r = \epsilon$.

Volumintegralet er nå uproblematisk siden $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, utenom origo, så volumintegralet er lik null.

Flateintegralet får nå bidrag fra to flater, ytre og indre kuleskall. Integralet over det ytre kuleskallet er det samme som før $-4\pi GMm$. På det indre kuleskallet har vi $\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = -\mathbf{i}_r$ og derfor $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{GMm}{R^2}$, og fluksintegralet er $4\pi GMm$. Summen av de to flateintegralene er null, og Gauss sats er oppfylt.

Gauss lov

Nå skal vi presentere en helt annen tilnærming for å få bort singulariteten, nemlig å innse at det ikke er realistisk at en endelig masse M er plassert i et uendelig lite punkt, fordi det ville bety at punktet har uendelig stor massetetthet. Derfor introduserer vi et alternativ til Newtons gravitasjonslov, nemlig Gauss lov for tyngdefeltet

som beskriver hvordan tyngdekraft genereres av en fordeling av massetetthet som ikke er uendelig stor i noe punkt.

Først tar vi en aldri så liten filosofisk utflukt for å avklare forskjellen på sats=teorem og lov=naturlov:

En sats er det samme som et teorem. Det er en matematisk identitet som kan bevises matematisk. Vi har bevist Stokes og Gauss integralsatser.

En lov, i betydningen naturlov, er en påstand eller en modell, vanligvis en matematisk modell, for hvordan naturen oppfører seg. En naturlov kan ikke bevises matematisk. Vi kan derimot gjøre eksperimenter og observasjoner som kan styrke eller svekke vår tiltro til en påstått naturlov. Newtons gravitasjonslov for punktmasser er eksempel på en naturlov.

En sats er en matematisk identitet som kan bevises. En naturlov er en påstand om hvordan naturen oppfører seg som ikke kan bevises.

Vi skal nå introdusere Gauss lov. Det er minst tre ulike varianter av Gauss lov:

- Gauss lov for det magnetiske feltet er $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Dette er én av Maxwell's likninger. Magnetfeltet er divergensfritt. Den kan tolkes som at det ikke eksisterer magnetiske ladninger.
- Gauss lov for det elektriske feltet er $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$. Dette er en annen av Maxwell's likninger. Divergensen til det elektriske feltet skyldes elektrisk ladningstetthet ρ . Konstanten ϵ_0 kalles elektrisk permittivitet.
- Gauss lov for tyngdefeltet er $\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$. Her er $\mathbf{g} = \mathbf{F}/m$ tyngdens akselerasjon, hvor $\mathbf{F}$ er tyngdekraften som virker på en masse m . Divergensen til tyngdens akselerasjon skyldes massetetthet ρ . Konstanten G er den universelle gravitasjonskonstanten.

Vi skal benytte Gauss lov for tyngdefeltet. Massetettheten ρ er ikke uendelig stor noe sted og derfor unngår vi singulariteter.

Eksempel: Tyngdekraften vi opplever når all masse M er kulesymmetrisk fordelt innenfor oss.

Spørsmålet er nå om Gauss lov for tyngdefeltet $\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$ er forenelig med tyngdefeltet fra Newtons gravitasjonslov $\mathbf{g} = \mathbf{F}/m = -G\frac{M}{r^2}\mathbf{i}_r$.

La oss tenke oss at massen M er plassert kulesymmetrisk rundt origo $r = 0$ innenfor ei kule med radius R . Massetettheten til kula er derfor også kulesymmetrisk, men trenger ikke å være konstant. Vi vet imidlertid at hele massen M befinner seg i området $r \leq R$, det vil si $M = \int_{r \leq R} \rho d\tau$. La oss anta at vi befinner oss på et kuleskall $r > R$, slik at vi har hele massen M er "innenfor" oss. Arealet til kuleskallet som vi befinner oss på er $A = 4\pi r^2$ og enhets normalvektor er $\mathbf{i}_r$. Som en konsekvens av at massen M er fordelt kulesymmetrisk rundt origo så er det rimelig å anta at vi vil oppleve en tyngdekraft som er rettet inn mot origo, i retning $-\mathbf{i}_r$. Vi antar derfor at $\mathbf{g} = -g\mathbf{i}_r$.

La oss sette dette inn i venstre side av Gauss sats

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{g} \, d\tau = \int_V -4\pi G \rho \, d\tau = -4\pi G \int_{r \leq R} \rho \, d\tau = -4\pi G M$$

La oss deretter sette dette inn i høyre side av Gauss sats

$$\int_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_S -g \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_r \, d\sigma = -g \int_S d\sigma = -g 4\pi r^2$$

Vi ender opp med at $g = G \frac{M}{R^2}$, og følgelig $\mathbf{g} = -G \frac{M}{r^2} \mathbf{i}_r$, som er det vi ønsket å vise.

Eksempel: Tyngdekraften vi opplever når massen M er kulesymmetrisk fordelt både innenfor og utenfor oss.

Har du noen gang lurt på hvilken tyngdekraft du vil oppleve dersom du befinner deg i en dyp tunnel slik at du har massen M fordelt både innenfor og utenfor det kuleskallet som du befinner deg på?

La oss tenke oss at massen M er plassert kulesymmetrisk rundt origo $r = 0$. La oss tenke oss at vi befinner oss i en radiell avstand R fra sentrum av kula. Vi kan tenke oss at massen derfor er fordelt som $M = M_{r < R} + M_{r > R}$ hvor vi har $M_{r < R}$ nærmere sentrum og $M_{r > R}$ lenger vekk fra sentrum enn der hvor vi befinner oss. Som en konsekvens av at massen M er fordelt kulesymmetrisk rundt origo så er det rimelig å anta at vi vil oppleve en tyngdekraft som er rettet inn mot origo, i retning $-\mathbf{i}_r$. Vi antar derfor at $\mathbf{g} = -g \mathbf{i}_r$.

La oss sette dette inn i venstre side av Gauss sats

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{g} \, d\tau = \int_V -4\pi G \rho \, d\tau = -4\pi G \int_{r < R} \rho \, d\tau = -4\pi G M_{r < R}$$

La oss deretter sette dette inn i høyre side av Gauss sats

$$\int_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_S -g \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_r \, d\sigma = -g \int_{r=R} d\sigma = -g 4\pi R^2$$

Vi ender opp med $g = G \frac{M_{r < R}}{R^2}$, og følgelig at $\mathbf{g} = -G \frac{M_{r < R}}{R^2} \mathbf{i}_r$. Vi vil altså kun oppleve en tyngdekraft tilsvarende massen $M_{r < R}$ som er innenfor oss. Dersom du graver en tunnel helt inn til jordas sentrum så vil du der være vektløs!

Vi forstår nå at singulariteten i Newtons gravitasjonslov egentlig bare er en matematisk konsekvens av å plassere en endelig masse i et uendelig lite punkt slik at massetettheten der blir uendelig stor. Gauss lov for tyngdefeltet reformulerer gravitasjon til et uttrykk for divergensen til tyngdefeltet, $\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \rho$, som respekterer at massetetthet må være endelig. Følgelig forsvinner singulariteten.

8.2 Stokes integralsats

Vi har tidligere sett at komponenten i retning $\mathbf{n}$ av virvlinga til et vektorfelt $\mathbf{v}$ kan uttrykkes som

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{v} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

Her er γ en lukket kurve som omslutter en åpen flate S med areal A . At flaten S er åpen betyr at den ikke omslutter et volum, men er avgrenset av den lukkede kurven γ . Flaten S har en flatenormalvektor $\mathbf{n}$ som er orientert i overensstemmelse med retningen rundt γ i henhold til høyrehåndsregelen. Grenseoppgangen forteller om feltet har netto sirkulasjon rundt en lukket kurve i grensen at kurven skrumper inn til et punkt.

Merk at før vi gjennomfører grenseoppgaven så trenger ikke flaten S å være plan, og flatenormalvektoren $\mathbf{n}$ trenger følgelig ikke å være konstant, men etter grenseoppgangen forholder vi oss kun til en entydig flatenormalvektor $\mathbf{n}$.

Nå ønsker vi å utvide denne tankegangen til en endelig stor flate S , omsluttet av en lukket kurve γ , som ikke lenger skal skrumpe inn til et punkt. Dette kan vi få til ved å dele opp den opprinnelige flaten i mange små biter S_m som er omsluttet av kurver γ_m . Så kan vi summere opp bidragene fra alle bitene. La oss fjerne grenseverdien midlertidig, og la oss multiplisere opp arealet, og ta summen

$$\sum_m \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{v} A_m \approx \sum_m \oint_{\gamma_m} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

I grensen av at bitene blir infinitesimale så vil A_m bli infinitesimale flatelementer $d\sigma$ og summen over alle flatene kan uttrykkes som et integral. Der hvor to delkurver γ_m møtes vil fluksintegralene gi bidrag som er like i tallverdi og motsatt i fortegn fordi kurveelementene $d\mathbf{r}$ peker i motsatt retning. Derved vil summen over alle kurvintegralene bli lik integralet over den ytre kurven γ

$$\int_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (8.3)$$

Dette er Stokes sats.

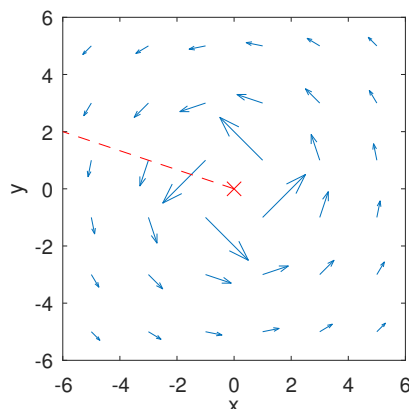
NB! Vi må passe oss for singulariteter i integrasjonsområdene! Enten må vi ekskludere singulære punkter fra integrasjonsområdene S og γ , eller så må vi utvide funksjonsbegrepet vårt slik at vi blir i stand til å representere singularitetene. I dette kompendiet skal vi unngå singulære punkter ved å ekskludere dem fra integrasjonsområdene.

Vi unngår singulære punkter i integrasjonsområdet ved å insistere på at området er enkelt sammenhengende.

Definisjon av enkelt sammenhengende område:

Et område er enkelt sammenhengende dersom en lukket kurve kan snurpes sammen til et punkt uten å forlate området. Et singulært punkt må utelukkes fra et slikt område. Dette betyr at dersom en lukket kurve har vindingstall forskjellig fra 0 rundt et singulært punkt så er området ikke enkelt sammenhengende.

Vi kan gjøre området rundt et singulært punkt enkelt sammenhengende ved å introdusere et "kutt", det vil si en kurve som går ut fra det singulære punktet slik at ingen integrasjonsveier får lov til å krysse "kuttet". Figuren viser hvordan vi kan legge et slikt "kutt" markert med den røde stiplede linja fra origo oppover til venstre.



Eksempel: Sirkulasjonen til rotasjon som stivt legeme

La $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ hvor $\mathbf{r}$ er posisjonsvektor og $\boldsymbol{\omega}$ er vinkelhastighet for en rotasjon som stivt legeme. Vi har tidligere regnet ut at virvlinga er $\nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$.

Dersom vi nå lar S være en plan flate med konstant enhetsnormalvektor $\mathbf{n}$, avgrenset av en lukket kurve γ , og vi lar arealet til S være A , så har vi sirkulasjonen

$$\oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 2\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}A$$

Sjekk hvordan dette blir dersom S er en sirkelskive for $z = 0$ med radius R , og $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. For at eksemplet skal bli mer spennende kan vi la $\boldsymbol{\omega}$ peke i vilkårlig retning forskjellig fra $\mathbf{k}$. Kurven γ er her en sirkel rundt origo med radius R i xy -planet, vi kan parametrisere med vinkelen $\mathbf{r}(\theta) = R\cos\theta\mathbf{i} + R\sin\theta\mathbf{j}$. Vi har differensialet $d\mathbf{r} = R(-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j})d\theta$, og $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\omega}$, og $\mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \mathbf{k}R^2d\theta$, og følgelig $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}R^2d\theta$. Nå kan vi regne ut sirkulasjonen $\oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}R^2d\theta = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}2\pi R^2$. Følgelig ser vi at høyre og venstre side av Stokes sats gir samme svar!

Eksempel: Sirkulasjonen til mulig modell for strømmingen nær sluket i en vask

Hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

kan tjene som en mulig modell for strømmingen nær sluket i en vask.

Vi har tidligere regnet ut at hastighetsfeltet er virvelfritt $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ utenom origo. I origo har vi derimot et singulært punkt hvor hastigheten er uendelig stor i alle retninger.

Vi kan lett regne ut høyre side i Stokes sats (8.3). Sirkulasjonen rundt en sirkel med sentrum i origo og med radius R er 2π uavhengig av radius R .

Vi kan også lett regne ut venstre side i Stokes sats (8.3) så lenge vi unngår å inkludere det singulære punktet i integrasjonsområdet. Flateintegralet av virvlinga er i så fall null.

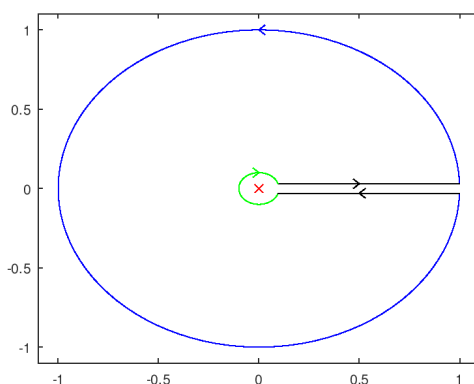
Disse to er ikke like, 2π er ikke lik 0. Det skyldes at vi har en vesentlig singularitet i origo, og at flateintegralet av virvlinga blir feil dersom vi tar med origo uten å håndtere denne singulariteten på riktig måte.

Det er to måter å løse utfordringen med en slike singulariteter. Enten må vi ekskludere det singulære punktet fra integrasjonsområdet S samtidig som vi tar grep for å sørge for at integrasjonsområdet er enkelt sammenhengende, eller så må vi utvide funksjonsbegrepet slik at vi blir i stand til å representere singulariteten på et vis.

Vi skal her unngå problemet ved å ekskludere det singulære punktet ved å introdusere et “kutt” som illustrert ovenfor slik at integrasjonsområdet blir enkelt sammenhengende.

Eksempel: Dersom det singulære punktet i origo ekskluderes fra integrasjonsområdet så er Stokes sats (8.3) igjen oppfylt

Kurven γ utvides med en liten omvei for å unngå singulære punktet som er markert med et rødt kryss i figuren.



Den blå kurven ytterst vil gi bidrag 2π , den grønne kurven innerst vil gi bidrag -2π , mens de to svarte kurvene kansellerer hverandre ut fordi de representerer samme kurve fram og tilbake. Summen av bidragene til sirkulasjonsintegralet blir null, og Stokes sats (8.3) er oppfylt.

Eksempel: Bruk Stokes sats (8.3) til å vise at for enhver lukket flate S er den integrerte fluksen av virvling lik null

$$\int_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0$$

Dette kan også vises ved hjelp av Gauss sats, det vil si ved overgang til et volumintegral. Nå skal vi vise dette ved hjelp av Stokes sats, altså ved overgang til kuveintegral.

Legg merke til at flaten som inngår i Stokes sats skal være åpen, mens flaten som inngår i denne oppgaven er lukket. Vi kan “åpne” den lukkede flaten ved å dele den i to deler, S_1 og S_2 , som begge er avgrenset av den samme lukkede kurven γ , men med motsatt orientering for de to delene. Bidraget fra de to kurveintegralene vil derfor kansellere hverandre ut, og vi har fått resultatet

$$\int_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{S_1} \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \int_{S_2} \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

8.2.1 Greens sats er et spesialtilfelle av Stokes sats

La S være et område i xy -planet avgrenset av en lukket kurve γ , og $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. Vi kan da skrive $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy$ langs γ , og $d\sigma = dxdy$ i S .

La $\mathbf{v} = F(x, y)\mathbf{i} + G(x, y)\mathbf{j}$. Vi kan da regne ut at $\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)\mathbf{k}$.

Dersom vi setter dette inn i Stokes sats (8.3) så får vi Greens sats

$$\iint_S \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} dxdy = \oint_{\gamma} F dx + G dy$$

8.2.2 Konservativt vektorfelt

Ulike lærebøker har tilsynelatende hver sin måte å definere hva vi mener med et “konservativt” vektorfelt. Heldigvis kan vi nå vise at alle disse alternativene er ekvivalente:

- (I) M (s.28) [5]: $\mathbf{F}$ er et konservativt vektorfelt dersom sirkulasjonen $\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ er lik null for en vilkårlig lukket kurve γ , så lenge kurven ligger i et enkelt sammenhengende område.
- (II) GF (s.100) [2]: $\mathbf{F}$ er et konservativt vektorfelt dersom kurveintegralet mellom to punkter er uavhengig av veien mellom punktene, $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, hvor γ_1 og γ_2 er to forskjellige og vilkårlige kurver som går mellom samme start- og slutt punkt, så lenge kombinasjonen av kurvene ligger i et enkelt sammenhengende område.
- (III) LH (s.202) [3]: $\mathbf{F}$ er et konservativt vektorfelt dersom den kan skrives som gradienten til et skalarfelt, $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Vi sier da at ϕ er et skalarpotensial.
- (IV) Vektorfeltet er konservativt dersom det er virvelfritt, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Vis at (IV) impliserer (I): Dersom virvlinga er null, så sier Stokes sats at sirkulasjonen er null.

Vis at (I) impliserer (IV): Dersom sirkulasjonen er null rundt en vilkårlig lukket kurve så sier Stokes sats at virvlinga må være overalt.

Vis at (I) er ekvivalent med (II): Velg to punkter A og B, legg en vilkårlig lukket kurve γ gjennom disse to punktene, splitt den lukkede kurven opp i to deler γ_1 og γ_2 som har felles start- og endepunkter A og B således at γ er γ_1 etterfulgt av $-\gamma_2$. Vi har

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Dersom sirkulasjonen rundt en vilkårlig lukket kurve er lik null (venstre side er lik null), så må de to integralene på høyre side være like. Da er altså kurveintegralet uavhengig av vei. Motsatt har vi at dersom kurveintegralene på høyre side er like, altså at kurveintegralet er uavhengig av vei, så er sirkulasjonen rundt den lukkede kurven lik null.

Vis at (III) impliserer (II): La oss si vi skal integrere langs en kurve γ som går fra punkt A til punkt B , og vi antar at det finnes et skalarpotensial ϕ , i så fall har vi

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} d\phi = \phi|_A^B = \phi|_B - \phi|_A$$

Legg merke til at vi har brukt formelen for totalt differensial $\nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = d\phi$. Følgelig ser vi at resultatet kun avhenger av endepunktene og ikke veien mellom endepunktene.

Vis at (II) impliserer (III): Vi lar oss inspirere av utledningen i M kapittel 3.2.1 [5] hvor de konstruerer et skalarpotensial ved et kurveintegral

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (8.4)$$

Denne konstruksjonen er veldefinert kun dersom integralet er uavhengig av veien, og det er nettopp det vi antar i kraft av (II) som sier nettopp at kurveintegralet er uavhengig av vei. Vi skal vise at gradienten til ϕ er lik $\mathbf{F}$:

La oss skrive $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$. I det følgende viser vi at $\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_x$, tilsvarende beregninger kan gjøres for de to andre partiellderiverte: La oss splitte opp veien fra origo til $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ i tre rette linjestykker: γ_z går fra $(0, 0, 0)$ til $(0, 0, z)$, γ_y går fra $(0, 0, z)$ til $(0, y, z)$, og γ_x går fra $(0, y, z)$ til (x, y, z) . Vi kan da skrive kurveintegralet

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = \int_0^z F_z(0, 0, t) dt + \int_0^y F_y(0, t, z) dt + \int_0^x F_x(t, y, z) dt$$

Nå er det lett å se at $\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_x(x, y, z)$.

For å regne ut de to andre partiellderiverte kan det lønne seg å velge andre integrasjonsveier. Prøv å gjøre dette selv!

NB! Motsatt tradisjon for potensial hos fysikere og matematikere!

Fysikere og matematikere har motsatt tradisjon med hensyn til å definere skalarpotensial med minustegn eller plustegn. Fysikere liker minustegn, matematikere liker plustegn. Det er vanlig å introdusere kraftpotensial $\mathbf{F} = -\nabla \phi$ og elektrisk potensial $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ med minustegn, og hastighetspotensial $\mathbf{v} = \nabla \phi$ med plustegn. Her er $\mathbf{F}$ kraftfelt og $\mathbf{E}$ er elektrisk felt og $\mathbf{v}$ er hastighetsfelt og ϕ er i hvert tilfelle det tilhørende skalarpotensialet.

(Underforstått, kraft og elektrisitet hører til fysikere, hastighet hører til matematikere. Klassisk mekanikk og elektromagnetisme undervises gjerne hos Fysisk institutt, fluidmekanikk og matematikk undervises gjerne hos Matematisk institutt.)

Selv om de ulike definisjonene på “konservativt” felt er ekvivalente, så kan det likevel hende at noen er enklere å bruke enn andre, avhengig av situasjonen. Dette er noe vi må øve oss på, for å gjenkjenne hvilken strategi som er best.

Eksempel: Er tyngdekraften $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ konservativ?

Her er m en masse som er utsatt for tyngdens akselerasjon $\mathbf{g}$. Her skal vi ta den enkleste representasjonen av tyngdekraft, nemlig at tyngdens akselerasjon $\mathbf{g}$ er konstant innenfor et avgrenset område.

La oss sjekke om kurveintegral er uavhengig av vei: Skriv først $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ hvor x og y -aksene er horisontale og z -aksen peker vertikalt oppover. La γ være en kurve fra et punkt $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ til et punkt $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$. Vi trenger ikke parametrisere kurven i det hele tatt, vi trenger kun å bruke $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$, som gir $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{z_0}^{z_1} -mg dz = mg(z_0 - z_1)$.

Vi ser derfor at kurveintegralet kun avhenger av start- og sluttpunkt, ikke veien, og følgelig vet vi at tyngdekraften $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ er konservativ.

Det er like enkelt å finne et potensial ϕ

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -\nabla(mgz) = -\nabla\phi$$

Vi ser at det eksisterer et potensial $\phi = mgz$, og følgelig vet vi at tyngdekraften $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ er konservativ.

Ettersom problemstillingen om “tyngdekraft” mest sannsynlig kommer fra fysikk har vi satt minus-tegn foran gradienten i respekt for tradisjonen i fysikk-faget.

Eksempel: Er vektorfeltet $\mathbf{v} = \mathbf{r}$ konservativt?

Dersom vi setter $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, så har vi $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = x^2 + y^2 + z^2$. Dersom vi tar gradienten finner vi $\nabla(r^2) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = 2\mathbf{r}$. Følgelig er det enkelt å finne et potensial ϕ

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} = \nabla\left(\frac{1}{2}r^2\right) = \nabla\phi$$

Vi ser at det eksisterer et potensial $\phi = \frac{1}{2}r^2$, og følgelig vet vi at feltet er konservativt.

Ettersom denne problemstillingen antakelig kommer fra matematikk har vi satt pluss-tegn foran gradienten slik som mange pleier å gjøre i matematikk.

Eksempel: Er tyngdekraften i Newtons gravitasjonslov konservativ?

Newtons gravitasjonslov sier at en punktmasse M drar på en annen punktmasse m med en kraft

$$\mathbf{F} = -G\frac{mM}{r^2}\mathbf{i}_r$$

hvor m og M er de to massene, r er avstanden mellom dem, $\mathbf{i}_r$ er enhetsvektor i retningen fra legemet M til legemet m , G er den universelle gravitasjonskonstanten.

Vi legger massen M i origo og lar massen m være i posisjon $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Vi har $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ som før, og vi har $\mathbf{i}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$. Legg merke til at

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}) = -\frac{1}{r^2}\mathbf{i}_r$$

og følgelig

$$\mathbf{F} = -\nabla\left(-\frac{GmM}{r}\right) = -\nabla\phi$$

Ettersom tyngdekraften kan uttrykkes som gradienten til et skalarpotensial ϕ vet vi at den er konservativ.

Problemstillingen kommer definitivt fra fysikk, derfor har vi satt minus-tegn foran gradienten i respekt for tradisjonen i fysikk-faget.

Eksempel: Er $\nabla\theta$, gradienten til vinkelen mellom posisjonsvektor og x -aksen, konservativ?

Husk at dersom posisjonsvektor er gitt ved $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ så er

$$\nabla\theta = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

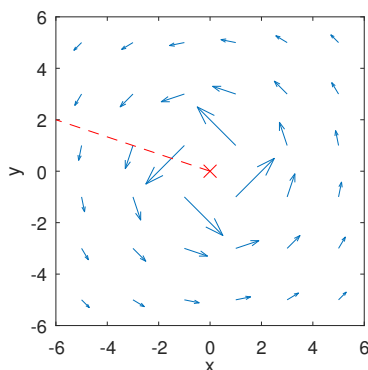
Vi har tidligere sett at sirkulasjonen av dette vektorfeltet rundt en vilkårlig lukket kurve γ er

$$\oint_{\gamma} \nabla\theta \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\gamma} d\theta = 2\pi n.$$

hvor n er vindingstallet til kurven γ rundt origo.

Umiddelbart kan det se ut som om sirkulasjonen ikke nødvendigvis er null, og at feltet derfor ikke er konservativt? Vi legger imidlertid merke til at origo er et singulært punkt for $\nabla\theta$. Origo må derfor ekskluderes fra området som er omsluttet av den lukkede kurven γ for at kurven skal ligge i et enkelt sammenhengende område.

En løsning på dette problemet kan være, som vi har antydnet tidligere, å lage et “kutt” i planet, fra origo og utover, slik at integrasjonskurven γ ikke får lov til å krysse “kuttet”. Dermed blir området enkelt sammenhengende.



I figuren er feltet illustrert som et vektor pileplot. Det singulære punktet i origo er markert med et rødt kryss. Et mulig “kutt” er markert med den røde stiplede linja fra origo oppover til venstre.

Feltet er følgelig konservativt på betingelse av at vi holder oss innenfor et enkelt sammenhengende område, som følgelig ikke inkluderer eller omslutter det singulære punktet i origo.

Kan vi utvide begrepet “konservativ” til vektorer som ikke er felt?

Husk at dersom noe er et “felt” så har det en éntydig verdi på hvert sted. Vi har sett viktige eksempler på vektorer som ikke er felt, for eksempel friksjonskraft, Coriolis-kraft (geofysikk) og Lorentz-kraft (elektromagnetisme). Disse er ikke felt fordi de avhenger av hvordan en bevegelse skjer, og ikke bare stedet hvor det skjer. Det kan være en fordel å utvide begrepet “konservativ” også til slike vektorer. Det første vi da legger merke til er at utsagn (III) og (IV) ovenfor ikke kan brukes, fordi de forutsetter éntydig verdi på hvert sted. Derimot kan vi stadig benytte utsagn (I)

og (II) i den grad vi tolker bevegelsen langs kurven som den faktiske bevegelsen som skjer, og i så fall kan det være mest naturlig å velge tiden som parameter.

Eksempel: Er friksjonskraft konservativ?

La oss anta at friksjonskraften er proporsjonal med og motsatt rettet hastigheten $\mathbf{F} = -\mu\mathbf{v}$. Størrelsen μ kaller vi for friksjonskoeffisient. La $\mathbf{r}(t)$ være posisjonsvektor parametrisert med hensyn på tid $0 \leq t \leq T$. Vi har da $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, og $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$. Sirkulasjonsintegralet, som her tolkes som arbeidet utført av friksjonskraften, blir

$$W = \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^T -\mu\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dt = - \int_0^T \mu v^2 dt < 0$$

Så lenge det er bevegelse så har integranden alltid samme fortegn, derfor kan dette integralet ikke være lik null. Enhver bevegelse medfører at det utføres arbeid, selv om man kommer tilbake til utgangspunktet. Friksjonskraft er altså ikke konservativ.

Oversatt til dagligspråk kan vi si at dersom vi kjører en runde med bilen, så bruker vi en viss mengde bensin eller strøm, selv om vi kommer tilbake til der hvor vi startet!

Oppsummert: Må kurveintegral ha samme verdi for ulike parametrisering av samme vei eller for ulike veier mellom samme endepunkter?

For å oppsummere hva vi har utforsket så langt med hensyn til kurveintegraler kan vi lage en tabell for å angi om integralet

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

nødvendigvis har samme verdi uavhengig av parametriseringen av samme vei γ eller uavhengig av veien γ mellom de samme endepunktene:

$\mathbf{F}$ er	ulik parametrisering langs samme vei	ulike veier mellom samme endepunkter
et konservativt felt	ja*	ja†
et ikke-konservativt felt	ja*	nei
ikke et felt	nei	nei

* dekkes av LH sats 3.4.5

† dekkes av (I)-(IV) ovenfor, vi forutsetter at kurven γ ligger i et enkelt sammenhengende område

8.3 Oppgaver

8.1 La oss anta at en planet har masse som er kulesymmetrisk fordelt, med massetetthet $\rho(r)$, hvor r er avstanden fra planetens sentrum. La oss i tillegg anta at $\rho(r) = 0$ for $r < a$ og for $r > b$, for $a < b$. Planeten har altså kun masse i et kuleskall $0 < a \leq r \leq b$. La oss nå anta at en observatør befinner seg innenfor kuleskallet, i avstand $R < a$ fra sentrum. Hva er tyngdens akselerasjon $\mathbf{g}$ som observatøren kan måle?

- 8.2 Regn ut fluksen av $\mathbf{v} = x(x-1)\mathbf{i} + y(y-2)\mathbf{j} + z(z-3)\mathbf{k}$ ut av en rettvinklet boks med sider $x = 0$ og $x = 1$ og $y = 0$ og $y = 2$ og $z = 0$ og $z = 3$. Sjekk at svaret blir det samme ved direkte utregning som fluksintegral og ved indirekte utregning som volumintegral.
- 8.3 Gitt et strømningsfelt med hastighetsvektor $\mathbf{u} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, og den lukkede flaten A til et rettvinklet boks med sider $x = 0$ og $x = 1$ og $y = 0$ og $y = 2$ og $z = 0$ og $z = 3$. Hva er den integrerte volumstrømmen (fluksen) av $\mathbf{u}$ gjennom flaten A ? Sjekk at svaret blir det samme ved direkte utregning som fluksintegral og ved indirekte utregning som volumintegral.
- 8.4 Gitt et strømningsfelt med hastighetsvektor $\mathbf{u} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, og den lukkede flaten A til et rettvinklet boks med sider $x = 0$ og $x = -1$ og $y = 0$ og $y = -1$ og $z = 0$ og $z = -1$. Hva er den integrerte volumstrømmen (fluksen) av $\mathbf{u}$ gjennom flaten A ? Sjekk at svaret blir det samme ved direkte utregning som fluksintegral og ved indirekte utregning som volumintegral.
- 8.5 Et vektorfelt er gitt ved $\mathbf{u} = x^2y\mathbf{j}$. Hva blir sirkulasjonen $\oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$ rundt en trekant C med hjørner i $(0, 0)$, $(1, 1)$ og $(0, 1)$ i xy -planet? Sirkulasjonen går mot klokka, dvs. fra $(0, 0)$ til $(1, 1)$, så til $(0, 1)$ og til slutt tilbake til $(0, 0)$. Sjekk at svaret blir det samme ved direkte utregning som sirkulasjonsintegral og ved indirekte utregning som flateintegral.
- 8.6 Et vektorfelt er gitt ved $\mathbf{u} = xy\mathbf{j}$. Hva blir sirkulasjonen $\oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$ rundt en trekant C med hjørner i $(0, 0)$, $(1, 1)$ og $(0, 1)$ i xy -planet? Sirkulasjonen går mot klokka, dvs. fra $(0, 0)$ til $(1, 1)$, så til $(0, 1)$ og til slutt tilbake til $(0, 0)$. Sjekk at svaret blir det samme ved direkte utregning som sirkulasjonsintegral og ved indirekte utregning som flateintegral.

Kapittel 9

Mer generelle koordinater

Vi skal nå forklare hvordan vi kan benytte andre koordinatsystemer enn det vanlige kartesiske for vektor-differensial-operasjoner. I MAT1110 diskuteres dette i forbindelse med koordinattransformer for å lette den tekniske beregningen av flate- og volumintegraler. Vi har behov for å gjøre det mer generelt for å uttrykke gradient, divergens, virvling, osv. i andre koordinatsystemer.

9.1 Rettlinjede og krumlinjede koordinater

Kartesiske koordinater

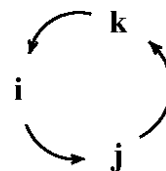
Først må vi bli fortrolig med de tre viktigste egenskapene til enhetsvektorene $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ med retning langs kurvene til de kartesiske koordinatene $\{x, y, z\}$. Dette viser vi ved multiplikasjonstabeller for prikk og kryss og en tabell for de deriverte:

De er ortogonale:

$\cdot$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	1	0	0
$\mathbf{j}$	0	1	0
$\mathbf{k}$	0	0	1

De utgjør et høyrehåndssystem:

$\times$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	0	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	0	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	0



Og de er rettlinjet:

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\frac{\partial}{\partial x}$	0	0	0
$\frac{\partial}{\partial y}$	0	0	0
$\frac{\partial}{\partial z}$	0	0	0

Det at koordinatene er rettlinjet betyr altså at retningsvektorene langs koordinatkurvene ikke avhenger av posisjon, da blir koordinatkurvene rette linjer.

Vi skal beskrive en framgangsmåte for å finne vektorer langs koordinatkurvene: Først skriver vi uttrykket for posisjonsvektor

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Så betrakter vi en liten forflytning vekk fra denne posisjonen. Dette beskriver vi ved det totale differensialet

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} dz = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz$$

Regelen for å finne en vektor langs en koordinatkurve blir da:

Vi står på et sted $\mathbf{r}$ og holder alle koordinatene konstant bortsett fra én som økes litt. I hvilken retning beveger vi oss?

Svaret på dette spørsmålet kan leses ut fra det totale differensialet og gir oss en retningsvektor langs den utvalgte koordinatkurven.

Vi ser at retningsvektorene langs de tre kartesiske koordinatkurvene er

$$\mathbf{i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}, \quad \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}, \quad \mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}.$$

Vi legger merke til at disse har alle enhetslengde

$$|\mathbf{i}| = 1, \quad |\mathbf{j}| = 1, \quad |\mathbf{k}| = 1.$$

Nye koordinater uttrykt ved de kartesiske koordinatene.

Vi introduserer nå nye koordinater $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ med tilhørende enhetsvektorer $\{\mathbf{i}_\alpha, \mathbf{i}_\beta, \mathbf{i}_\gamma\}$ langs koordinatkurvene.

Vi starter med å uttrykke de gamle koordinatene ved hjelp av de nye:

$$x = x(\alpha, \beta, \gamma) \quad y = y(\alpha, \beta, \gamma) \quad z = z(\alpha, \beta, \gamma)$$

Posisjonsvektor kan nå skrives ved hjelp av de nye koordinatene og de gamle enhetsvektorene langs de kartesiske koordinatkurvene

$$\mathbf{r} = x(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{i} + y(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{j} + z(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{k}$$

Neste skritt er å bruke framgangsmåten skissert ovenfor for å finne de nye koordinatvektorene. Det totale differensialet av posisjonsvektor med hensyn på de nye koordinatene er

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma} d\gamma.$$

Herfra ser vi at følgende vektorer er orientert langs de nye koordinatkurvene

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma}.$$

Vi kan nå undersøke om de nye koordinatene er ortogonale, i så fall må vi ha

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma} = 0.$$

Vi kan videre undersøke om de nye koordinatene utgjør et høyrehåndssystem, i så fall må $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}$ peke i samme retning som $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma}$, osv.

Vi må imidlertid passe på, for det er ikke sikkert at de tre partiellderiverte $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma}$ har enhetslengde. Vi introduserer derfor såkalte *skaleringsfaktorer*

$$h_\alpha = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right|, \quad h_\beta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \right|, \quad h_\gamma = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma} \right|$$

Enhetsvektorene blir dermed

$$\mathbf{i}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}, \quad \mathbf{i}_\beta = \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}, \quad \mathbf{i}_\gamma = \frac{1}{h_\gamma} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma}$$

Vi skal begrense oss til ortogonale høyrehåndssystemer

Det vil være nødvendig å sjekke at koordinatene oppfyller betingelsene for skalar- og kryssprodukt. I utgangspunktet kunne man kanskje tro at det var nødvendig å sjekke alle de 18 elementene i multiplikasjonstabellene for skalar- og kryssprodukt, men heldigvis er det tilstrekkelig å sjekke kun fire betingelser. For å sjekke ortogonalitet er det tilstrekkelig å sjekke

$$\mathbf{i}_\alpha \cdot \mathbf{i}_\beta = 0, \quad \mathbf{i}_\alpha \cdot \mathbf{i}_\gamma = 0, \quad \mathbf{i}_\beta \cdot \mathbf{i}_\gamma = 0$$

Dersom ortogonalitet allerede er oppfylt så er det tilstrekkelig å sjekke ett kryssprodukt for å sikre at det er et høyrehåndssystem

$$\mathbf{i}_\alpha \times \mathbf{i}_\beta = \mathbf{i}_\gamma$$

Eksempel: Vis at dersom de fire betingelsene ovenfor er oppfylt, så er betingelsene $\mathbf{i}_\beta \times \mathbf{i}_\gamma = \mathbf{i}_\alpha$ og $\mathbf{i}_\gamma \times \mathbf{i}_\alpha = \mathbf{i}_\beta$ allerede oppfylt

Vi kan substituere bort $\mathbf{i}_\gamma$ og bruke formelen $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

$$\mathbf{i}_\beta \times \mathbf{i}_\gamma = \mathbf{i}_\beta \times (\mathbf{i}_\alpha \times \mathbf{i}_\beta) = \mathbf{i}_\alpha \mathbf{i}_\beta \cdot \mathbf{i}_\beta - \mathbf{i}_\beta \mathbf{i}_\beta \cdot \mathbf{i}_\alpha = \mathbf{i}_\alpha$$

$$\mathbf{i}_\gamma \times \mathbf{i}_\alpha = (\mathbf{i}_\alpha \times \mathbf{i}_\beta) \times \mathbf{i}_\alpha = \mathbf{i}_\beta \mathbf{i}_\alpha \cdot \mathbf{i}_\alpha - \mathbf{i}_\alpha \mathbf{i}_\beta \cdot \mathbf{i}_\alpha = \mathbf{i}_\beta$$

Eksempel: Plane polarkoordinater $\{r, \theta\}$ i xy -planet

Sett $x = r \cos \theta$ og $y = r \sin \theta$. Posisjonsvektor er $\mathbf{r}(r, \theta) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}$. Det fullstendige differensialet er

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} d\theta = (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) dr + (-r \sin \theta \mathbf{i} + r \cos \theta \mathbf{j}) d\theta$$

Vi ser at

$$h_r = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| = 1 \quad \text{og} \quad h_\theta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = r$$

og

$$\mathbf{i}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad \text{og} \quad \mathbf{i}_\theta = -r \sin \theta \mathbf{i} + r \cos \theta \mathbf{j}$$

Er dette systemet ortogonalt? Vi sjekker $\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_\theta = 0$, så ja, det er ortogonalt.

Det gir ikke mening å sjekke om dette er et høyrehåndssystem fordi vi har begrenset oss til kun et 2D plan.

Til slutt kan vi sjekke om dette er et rettlinjet system: Regn ut

$$\frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial r} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} = \mathbf{i}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial r} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{i}_r$$

så nei, systemet er ikke rettlinjet, men krumlinjet.

Eksempel: Koordinater som ikke er ortogonale

$$x = \alpha + \beta \quad y = \beta \quad z = \gamma$$

Dette gir posisjonsvektor $\mathbf{r} = (\alpha + \beta)\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$ og

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} &= \mathbf{i} & h_\alpha &= 1 & \mathbf{i}_\alpha &= \mathbf{i} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} &= \mathbf{i} + \mathbf{j} & h_\beta &= \sqrt{2} & \mathbf{i}_\beta &= \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma} &= \mathbf{k} & h_\gamma &= 1 & \mathbf{i}_\gamma &= \mathbf{k} \end{aligned}$$

Vi har $\mathbf{i}_\alpha \cdot \mathbf{i}_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ som betyr at koordinatene ikke er ortogonale.

Eksempel: Ortogonale koordinater som ikke er et høyrehåndssystem

$$x = \beta \quad y = \alpha \quad z = \gamma$$

Dette gir posisjonsvektor $\mathbf{r} = \beta\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$ og

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} &= \mathbf{j} & h_\alpha &= 1 & \mathbf{i}_\alpha &= \mathbf{j} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} &= \mathbf{i} & h_\beta &= 1 & \mathbf{i}_\beta &= \mathbf{i} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma} &= \mathbf{k} & h_\gamma &= 1 & \mathbf{i}_\gamma &= \mathbf{k} \end{aligned}$$

Vi har $\mathbf{i}_\alpha \cdot \mathbf{i}_\beta = \mathbf{i}_\alpha \cdot \mathbf{i}_\gamma = \mathbf{i}_\beta \cdot \mathbf{i}_\gamma = 0$ som betyr at koordinatene er ortogonale. Derimot har vi $\mathbf{i}_\alpha \times \mathbf{i}_\beta = -\mathbf{i}_\gamma$ som betyr at dette ikke er et høyrehåndssystem.

Dette er et venstrehåndssystem.

Eksempel: Et ortogonalt høyrehåndssystem som er rettlinjet

$$x = \alpha + \beta \quad y = -\alpha + \beta \quad z = \gamma$$

Dette gir posisjonsvektor $\mathbf{r} = (\alpha + \beta)\mathbf{i} + (-\alpha + \beta)\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$ og

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = (\mathbf{i} - \mathbf{j}) \quad h_\alpha = \sqrt{2} \quad \mathbf{i}_\alpha = \frac{\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = \mathbf{i} + \mathbf{j} \quad h_\beta = \sqrt{2} \quad \mathbf{i}_\beta = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma} = \mathbf{k} \quad h_\gamma = 1 \quad \mathbf{i}_\gamma = \mathbf{k}$$

Vi har $\mathbf{i}_\alpha \cdot \mathbf{i}_\beta = \mathbf{i}_\alpha \cdot \mathbf{i}_\gamma = \mathbf{i}_\beta \cdot \mathbf{i}_\gamma = 0$ som betyr at koordinatene er ortogonale. Dessuten har vi $\mathbf{i}_\alpha \times \mathbf{i}_\beta = \mathbf{i}_\gamma$ som betyr at dette er et høyrehåndssystem. I tillegg har vi at alle de nye koordinatvektorene er konstant, uavhengige av koordinatene, som betyr at systemet er rettlinjett.

Infinitesimalt kurveelement

Vi kan nå skrive det infinitesimale kurveelementet

$$d\mathbf{r} = h_\alpha \mathbf{i}_\alpha d\alpha + h_\beta \mathbf{i}_\beta d\beta + h_\gamma \mathbf{i}_\gamma d\gamma$$

hvor vi kan betrakte hvert ledd som bidraget fra sin respektive koordinat

$$d\mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} d\alpha = h_\alpha \mathbf{i}_\alpha d\alpha \quad d\mathbf{r}_\beta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} d\beta = h_\beta \mathbf{i}_\beta d\beta \quad d\mathbf{r}_\gamma = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma} d\gamma = h_\gamma \mathbf{i}_\gamma d\gamma$$

Flateelement

Vi har tidligere diskutert at dersom en flate er parameterisert med to skalarer v og w , slik at hvert punkt på flaten er gitt ved 3D posisjonsvektor $\mathbf{r}(v, w)$, så kan vi betrakte infinitesimale flateelement spent ut av de infinitesimale tangentvektorene

$$d\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv$$

$$d\mathbf{r}_w = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw$$

I så fall kan vi beregne flatenormalvektor og det infinitesimale flateelementet ved å ta kryssproduktet

$$\mathbf{n} d\sigma = \pm d\mathbf{r}_v \times d\mathbf{r}_w = \pm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dv dw$$

Det mest naturlige vil nå være å se på flateelementer som er parallellogrammer som spennes ut av to av de tre kurveelementene $d\mathbf{r}_\alpha$, $d\mathbf{r}_\beta$ og $d\mathbf{r}_\gamma$. Vi skal la de to utspennende vektorene være leddene i uttrykket for det infinitesimale kurveelementet, for eksempel de tre opplagte flatene

$$\mathbf{n} d\sigma = \begin{cases} d\mathbf{r}_\alpha \times d\mathbf{r}_\beta = h_\alpha \mathbf{i}_\alpha d\alpha \times h_\beta \mathbf{i}_\beta d\beta = h_\alpha h_\beta \mathbf{i}_\gamma d\alpha d\beta \\ d\mathbf{r}_\beta \times d\mathbf{r}_\gamma = h_\beta \mathbf{i}_\beta d\beta \times h_\gamma \mathbf{i}_\gamma d\gamma = h_\beta h_\gamma \mathbf{i}_\alpha d\beta d\gamma \\ d\mathbf{r}_\gamma \times d\mathbf{r}_\alpha = h_\gamma \mathbf{i}_\gamma d\gamma \times h_\alpha \mathbf{i}_\alpha d\alpha = h_\gamma h_\alpha \mathbf{i}_\beta d\gamma d\alpha \end{cases}$$

Det er verdt å merke seg hvordan dette blir gjort i MAT1110 (eksempel 6.12.4 på side 684–686 [3]) uten å kreve at koordinatene er verken ortogonale eller høyrehåndssystem: De ender opp med å beregne Jacobi-determinanter.

Volumelement

Vi spenner ut et volumelement med form av et parallellepiped ved hjelp av tre vektorer. Dersom vi lar de tre utspennende vektorene være $d\mathbf{r}_\alpha$, $d\mathbf{r}_\beta$ og $d\mathbf{r}_\gamma$ så får vi

$$d\tau = h_\alpha \mathbf{i}_\alpha d\alpha \times h_\beta \mathbf{i}_\beta d\beta \cdot h_\gamma \mathbf{i}_\gamma d\gamma = h_\alpha h_\beta h_\gamma d\alpha d\beta d\gamma$$

Det er verdt å merke seg hvordan dette blir gjort i MAT1110 (Teorem 6.10.1 på side 663 [3]) uten å kreve at koordinatene er verken ortogonale eller høyrehåndssystem: De ender opp med å beregne en Jacobi-determinant. Vårt produkt av tre skaleringsfaktorer er lik denne Jacobi-determinanten.

9.2 Gradient, virvling og divergens i generelle ortogonale koordinater

9.2.1 Gradient

La f være et skalarfelt. Vi kan finne gradienten til f fra det totale differensialet

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

som vi skal kreve er lik den retningsderiverte med gradienten

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

Ettersom vi har begrenset oss til ortogonale koordinater så er det enkelt å se at gradienten til en skalar er

$$\nabla f = \frac{\mathbf{i}_\alpha}{h_\alpha} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\mathbf{i}_\beta}{h_\beta} \frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{\mathbf{i}_\gamma}{h_\gamma} \frac{\partial f}{\partial \gamma}$$

Tilsvarende kan vi skrive uttrykket for del-operatoren

$$\nabla = \frac{\mathbf{i}_\alpha}{h_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\mathbf{i}_\beta}{h_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\mathbf{i}_\gamma}{h_\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma}$$

I dette uttrykket tenker vi oss at derivasjonsoperasjonene skal virke mot høyre for å anvendes på det som måtte komme til høyre for del-operatoren.

9.2.2 Virvling

Husk hvordan vi definerte virvlinga som en grenseverdi av sirkulasjon delt på et areal (M kap. 3.4). Denne definisjonen hjelper oss å forstå hvordan virvling kan uttrykkes i generelle krumlinjede koordinater nå:

$$\mathbf{n} \cdot \text{curl } \mathbf{v} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_\lambda \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (9.1)$$

hvor λ en lukket kurve som omslutter og avgrenser en flate S med areal A , og hvor grenseoppgangen er slik at flaten skrumper inn til et punkt ($\mathbf{r}_0$). Flaten S har

enhets normalvektor $\mathbf{n}$. Kurven λ og flatenormalvektoren $\mathbf{n}$ er orientert i henhold til høyrehåndsregelen. Integralet gir sirkulasjonen rundt den lukkede kurven λ .

Vi tenker oss at den lukkede kurven λ og flaten S kan ha kompliserte former i de “opprinnelige” kartesiske koordinatene, men representert med parameterene $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ er det et rektangel med sentrum i $\{\alpha_0, \beta_0, \gamma_0\}$ orientert parallelt med $\beta\gamma$ -planet og med sidekanter $\Delta\beta$ og $\Delta\gamma$. De nye koordinatene gir en enkel parameterisering av kurven og flaten.

Arealet i det kartesiske koordinatsystemet er gitt ved integralet

$$A = \int_S d\sigma = \iint h_\beta h_\gamma d\beta d\gamma \approx h_\beta h_\gamma \Delta\beta \Delta\gamma$$

Normalvektoren er $\mathbf{n} = \mathbf{i}_\alpha$ i positiv α -retning og kurven λ er orientert i henhold til høyrehåndsregelen.

La oss nummerere sidene i integrasjonsretning med 1 nederst, og splitte opp sirkulasjonsintegralet i bidrag fra hver side

$$\oint_\lambda \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^4 \int_{\lambda_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

1. Siden er $\alpha = \alpha_0$, $|\beta - \beta_0| \leq \frac{\Delta\beta}{2}$ og $\gamma = \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2}$. Det infinitesimale kurveelementet er $d\mathbf{r} = h_\beta \mathbf{i}_\beta d\beta$. Langs siden har vi $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = h_\beta v_\beta d\beta$. Kurveintegralet langs siden er tilnærmet $[h_\beta v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\beta$.
2. Siden er $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}$ og $|\gamma - \gamma_0| \leq \frac{\Delta\gamma}{2}$. Det infinitesimale kurveelementet er $d\mathbf{r} = h_\gamma \mathbf{i}_\gamma d\gamma$. Langs siden har vi $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = h_\gamma v_\gamma d\gamma$. Kurveintegralet langs siden er tilnærmet $[h_\gamma v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \Delta\gamma$.
3. Siden er $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}$ og $|\gamma - \gamma_0| \leq \frac{\Delta\gamma}{2}$. Det infinitesimale kurveelementet er $d\mathbf{r} = -h_\beta \mathbf{i}_\beta d\beta$. Langs siden har vi $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -h_\beta v_\beta d\beta$. Kurveintegralet langs siden er tilnærmet $[-h_\beta v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\beta$.
4. Siden er $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}$ og $|\gamma - \gamma_0| \leq \frac{\Delta\gamma}{2}$. Det infinitesimale kurveelementet er $d\mathbf{r} = -h_\gamma \mathbf{i}_\gamma d\gamma$. Langs siden har vi $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -h_\gamma v_\gamma d\gamma$. Kurveintegralet langs siden er tilnærmet $[-h_\gamma v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \Delta\gamma$.

Dersom vi summerer motstående sider får vi

Side 1 og 3:

$$[h_\beta v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\beta - [h_\beta v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\beta \approx - \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_\beta v_\beta) \Big|_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)} \Delta\beta \Delta\gamma$$

Side 2 og 4:

$$[h_\gamma v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \Delta\gamma - [h_\gamma v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \Delta\gamma \approx \frac{\partial}{\partial \beta} (h_\gamma v_\gamma) \Big|_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)} \Delta\beta \Delta\gamma$$

Legg merke til at $\Delta\beta\Delta\gamma$ er felles faktor for sirkulasjonsintegralet i teller og for arealet i nevner i den opprinnelige formelen for virvling. Videre blir alle tilnærminger vilkårlig nøyaktige i grensen at de to delta-størrelsene blir vilkårlig små.

Foreløpig har vi kun bestemt én komponent av virvlinga. For å bestemme de to resterende komponentene av virvlinga må vi gjøre det samme regnestykket to ganger til, med normalvektor $\mathbf{n}$ orientert i to ortogonale retninger.

Til slutt viser det seg at vi kan presentere sluttresultatet på en meget kompakt måte ved hjelp av determinanten

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \begin{vmatrix} h_\alpha \mathbf{i}_\alpha & h_\beta \mathbf{i}_\beta & h_\gamma \mathbf{i}_\gamma \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{\partial}{\partial \gamma} \\ h_\alpha v_\alpha & h_\beta v_\beta & h_\gamma v_\gamma \end{vmatrix}$$

9.2.3 Divergens

Husk hvordan vi definerte divergensen som en grenseverdi av et fluksintegral delt på et volum (M kap. 3.3). Denne definisjonen hjelper oss å forstå hvordan divergens kan uttrykkes i generelle krumlinjede koordinater nå:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (9.2)$$

hvor S er en lukket flate som omslutter et volum V , og hvor grenseoppgangen er slik at volumet skrumper inn til et punkt ($\mathbf{r}_0$).

Vi tenker oss at volumet kan ha en komplisert form i de “opprinnelige” kartesiske koordinatene, men representert med parameterene $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ er det en boks med sentrum i $\{\alpha_0, \beta_0, \gamma_0\}$ og med sidekanter $\{\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma\}$. De nye koordinatene gir en enkel parameterisering av volumet.

Volumet i det kartesiske koordinatsystemet er gitt ved integralet

$$V = \int d\tau = \iiint h_\alpha h_\beta h_\gamma d\alpha d\beta d\gamma \approx h_\alpha h_\beta h_\gamma \Delta\alpha \Delta\beta \Delta\gamma$$

La oss nummerere sidene som en vestlig terning (høyrehånds terning med sum 7 på motstående sider), og splitte opp fluksintegralet i bidrag fra hver side

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \sum_{i=1}^6 \int_{S_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

1. Flaten er $\alpha = \alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = \mathbf{i}_\alpha$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_\alpha(\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}, \beta, \gamma)$ og $d\sigma = h_\beta h_\gamma d\beta d\gamma$, den integrerte fluksen ut av flaten er tilnærmet $[h_\beta h_\gamma v_\alpha]_{(\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}, \beta_0, \gamma_0)} \Delta\beta \Delta\gamma$.

$$\int_{S_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \approx [h_\beta h_\gamma v_\alpha]_{(\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}, \beta_0, \gamma_0)} \Delta\beta \Delta\gamma$$

2. Flaten er $\beta = \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = \mathbf{i}_\beta$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_\beta(\alpha_0, \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)$ og $d\sigma = h_\alpha h_\gamma d\alpha d\gamma$, den integrerte fluksen ut av flaten er tilnærmet $[h_\alpha h_\gamma v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \Delta\alpha \Delta\gamma$.

3. Flaten er $\gamma = \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2}$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = \mathbf{i}_\gamma$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_\gamma(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2})$ og $d\sigma = h_\alpha h_\beta d\alpha d\beta$, den integrerte fluksen ut av flaten er tilnærmet $[h_\alpha h_\beta v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\alpha \Delta\beta$.
4. Flaten er $\gamma = \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2}$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = -\mathbf{i}_\gamma$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -v_\gamma(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2})$ og $d\sigma = h_\alpha h_\beta d\alpha d\beta$, den integrerte fluksen ut av flaten er tilnærmet $[-h_\alpha h_\beta v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\alpha \Delta\beta$.
5. Flaten er $\beta = \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = -\mathbf{i}_\beta$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -v_\beta(\alpha_0, \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)$ og $d\sigma = h_\alpha h_\gamma d\alpha d\gamma$, den integrerte fluksen ut av flaten er tilnærmet $[-h_\alpha h_\gamma v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \Delta\alpha \Delta\gamma$.
6. Flaten er $\alpha = \alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = -\mathbf{i}_\alpha$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -v_\alpha(\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}, \beta_0, \gamma_0)$ og $d\sigma = h_\beta h_\gamma d\beta d\gamma$, den integrerte fluksen ut av flaten er tilnærmet $[-h_\beta h_\gamma v_\alpha]_{(\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}, \beta_0, \gamma_0)} \Delta\beta \Delta\gamma$.

Så summerer vi motstående flater

Side 1 og 6:

$$\left(\int_{S_1} + \int_{S_6} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \approx [h_\beta h_\gamma v_\alpha]_{\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}}^{\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}} \Delta\beta \Delta\gamma \approx \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_\beta h_\gamma v_\alpha) \Delta\alpha \Delta\beta \Delta\gamma$$

Side 2 og 5:

$$\left(\int_{S_2} + \int_{S_5} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \approx [h_\alpha h_\gamma v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)}^{(\alpha_0, \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \Delta\alpha \Delta\gamma \approx \frac{\partial}{\partial \beta} (h_\alpha h_\gamma v_\beta) \Delta\alpha \Delta\beta \Delta\gamma$$

Side 3 og 4:

$$\left(\int_{S_3} + \int_{S_4} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \approx [h_\alpha h_\beta v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2})}^{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\alpha \Delta\beta \approx \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_\alpha h_\beta v_\gamma) \Delta\alpha \Delta\beta \Delta\gamma$$

Legg merke til at $\Delta\alpha \Delta\beta \Delta\gamma$ er felles faktor for fluksintegralet i teller og for volumet i nevner i den opprinnelige formelen for divergens. Videre blir alle tilnærminger vilkårlig nøyaktige i grensen at de tre delta-størrelsene blir vilkårlig små.

Til slutt har vi

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_\beta h_\gamma v_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (h_\alpha h_\gamma v_\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_\alpha h_\beta v_\gamma) \right\}$$

9.2.4 Laplace operatoren anvendt på en skalar

Laplace-operatoren ∇^2 anvendt på en skalar f kan uttrykkes som divergensen til gradienten til f

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{h_\beta h_\gamma}{h_\alpha} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{h_\alpha h_\gamma}{h_\beta} \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{h_\alpha h_\beta}{h_\gamma} \frac{\partial f}{\partial \gamma} \right) \right\}$$

9.3 Kulekoordinater

Vi skal innføre tre koordinater, i ordnet rekkefølge: Den første kalles radiell koordinat (ut fra et punkt), den andre kalles polar vinkel, og den tredje kalles asimut (vinkelen langs horisonten).

NB! Det er flere måter å navngi kulekoordinatene. Gjevik & Fagerland [2] benytter $\{r, \theta, \varphi\}$, Matthews [5] og Schey [7] benytter $\{r, \theta, \phi\}$, Lindstrøm & Hveberg [3] benytter $\{\rho, \phi, \theta\}$ og definerer $r = \rho \sin \phi$, Marsden & Tromba [4] benytter $\{r, \phi, \theta\}$. Nettsiden en.wikipedia.org/wiki/Spherical_coordinate_system benytter ISO standard $\{r, \theta, \varphi\}$ som er vanlig blant fysikere, og de påpeker at blant matematikere er det vanlig å bruke $\{r, \varphi, \theta\}$.

I tillegg bør vi merke oss at den geografiske angivelsen “nordlig og sørlig breddegrad” antar at den polare vinkelen har verdi null ved planetens ekvator, i motsetning til å la den polare vinkelen ha verdi null på nordpolen.

I dette kompendiet skal vi benytte $\{r, \theta, \varphi\}$ selv om det kolliderer med notasjonen i matematikk-emnene. Uansett burde det være åpenbart at det er viktig å tegne en skisse for å klargjøre hva koordinatene heter.

NB! MEK1100 og MAT1110 benytter kolliderende notasjon!

Vi beskriver først relasjonen mellom de kartesiske koordinatene og kulekoordinatene

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

Dermed kan vi skrive posisjonsvektor

$$\mathbf{r} = r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + r \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + r \cos \theta \mathbf{k}$$

og vi får skaleringsfaktorer

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} & h_r &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| = 1 \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= -r \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + r \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} - r \sin \theta \mathbf{k} & h_\theta &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = r \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} &= -r \sin \theta \sin \varphi \mathbf{i} + r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{j} & h_\varphi &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right| = r \sin \theta\end{aligned}$$

og enhetsvektorer langs koordinatenes retninger

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_r &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{i}_\theta &= -\cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{i}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}\end{aligned}$$

Vi kan nå sjekke at kulekoordinatene er ortogonale

$$\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_\theta = \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_\varphi = \mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_\varphi = 0$$

Dernest kan vi sjekke at kulekoordinatene utgjør et høyrehåndssystem (husk at siden vi allerede vet at de er ortogonale så er det tilstrekkelig å sjekke ett kryssprodukt)

$$\mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_\theta = (\sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}) \times (-\cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}) = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} = \mathbf{i}_\varphi$$

Kulekoordinatene er krumlinjet, så det er av interesse å vite hva de deriverte av enhetsvektorene langs koordinataksene er

	$\mathbf{i}_r$	$\mathbf{i}_\theta$	$\mathbf{i}_\varphi$
$\frac{\partial}{\partial r}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\frac{\partial}{\partial \theta}$	$\mathbf{i}_\theta$	$-\mathbf{i}_r$	$\mathbf{0}$
$\frac{\partial}{\partial \varphi}$	$\sin \theta \mathbf{i}_\varphi$	$\cos \theta \mathbf{i}_\varphi$	$(-\sin \theta \mathbf{i}_r - \cos \theta \mathbf{i}_\theta)$

Vi kan nå uttrykke posisjonsvektor utelukkende ved hjelp av kulekoordinater og enhetsvektorer langs koordinataksene

$$\mathbf{r} = r \mathbf{i}_r$$

og differensialet blir

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}_r dr + r \mathbf{i}_\theta d\theta + r \sin \theta \mathbf{i}_\varphi d\varphi$$

Ved hjelp av formlene vi har utledet nylig får vi:

Gradienten til en skalar f

$$\nabla f = \mathbf{i}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\mathbf{i}_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{i}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

Divergensen av en vektor $\mathbf{v}$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

Laplace-operatoren anvendt på en skalar f

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Virvlinga til en vektor $\mathbf{v}$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{i}_r & r \mathbf{i}_\theta & r \sin \theta \mathbf{i}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ v_r & r v_\theta & r \sin \theta v_\varphi \end{vmatrix}$$

9.4 Sylinderkoordinater

Vi skal innføre tre koordinater, i ordnet rekkefølge: Den første kalles radiell koordinat (ut fra en akse), den andre kalles asimut (vinkelen langs horisonten), og den tredje kalles høyde.

NB! Det er flere måter å navngi sylinderkoordinatene. Matthews [5] benytter $\{R, \phi, z\}$, Gjevik & Fagerland [2] og Lindstrøm & Hveberg [3] benytter $\{r, \theta, z\}$. Nettsiden en.wikipedia.org/wiki/Cylindrical_coordinate_system bruker ISO standard $\{\rho, \varphi, z\}$.

Det er problematisk for oss å bruke ρ for radiell koordinat siden vi kommer til å bruke ρ for massetetthet ellers i MEK1100. Det er også problematisk å bruke r for radiell koordinat fordi vi straks skal introdusere posisjonsvektor $\mathbf{r}$ som i så fall vil ha lengde forskjellig fra r .

Her skal vi benytte $\{R, \theta, z\}$ selv om det vanlig og fristende å benytte $\{r, \theta, z\}$. Uansett burde det være åpenbart at det er viktig å tegne en skisse for å klargjøre hva koordinatene heter.

Vi beskriver først relasjonen mellom de kartesiske koordinatene og sylinderkoordinatene (de gamle koordinatene som funksjon av de nye)

$$\begin{aligned}x &= R \cos \theta \\y &= R \sin \theta \\z &= z\end{aligned}$$

Posisjonsvektor blir

$$\mathbf{r} = R \cos \theta \mathbf{i} + R \sin \theta \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

og vi får skaleringsfaktorer og enhetsvektorer langs koordinataksene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial R} &= \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} & h_R &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial R} \right| = 1 & \mathbf{i}_R &= \frac{1}{h_R} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial R} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= -R \sin \theta \mathbf{i} + R \cos \theta \mathbf{j} & h_\theta &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = R & \mathbf{i}_\theta &= \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} &= \mathbf{k} & h_z &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right| = 1 & \mathbf{i}_z &= \frac{1}{h_z} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}\end{aligned}$$

Vi kan nå sjekke at sylinderkoordinatene er ortogonale

$$\mathbf{i}_R \cdot \mathbf{i}_\theta = \mathbf{i}_R \cdot \mathbf{i}_z = \mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_z = 0$$

Dernest kan vi sjekke at sylinderkoordinatene utgjør et høyrehåndssystem (husk at siden vi allerede vet at de er ortogonale så er det tilstrekkelig å sjekke ett kryssprodukt)

$$\mathbf{i}_R \times \mathbf{i}_\theta = (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \times (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) = \mathbf{k} = \mathbf{i}_z$$

Sylinderkoordinatene er krumlinjet, så det er av interesse å vite hva de deriverte av enhetsvektorene er

$$\begin{array}{c|ccc} & \mathbf{i}_R & \mathbf{i}_\theta & \mathbf{i}_z \\ \hline \frac{\partial}{\partial R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} & \mathbf{i}_\theta & -\mathbf{i}_R & \mathbf{0} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}$$

Vi kan nå uttrykke posisjonsvektor utelukkende ved hjelp av sylinderkoordinater og tilhørende enhetsvektorer

$$\mathbf{r} = R\mathbf{i}_R + z\mathbf{i}_z$$

og differensialet blir

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}_R dR + R\mathbf{i}_\theta d\theta + \mathbf{i}_z dz$$

Ved hjelp av formlene vi har utledet nylig får vi:

Gradienten til en skalar f

$$\nabla f = \mathbf{i}_R \frac{\partial f}{\partial R} + \frac{\mathbf{i}_\theta}{R} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \mathbf{i}_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

Divergensen av en vektor $\mathbf{v}$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (Rv_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Laplace-operatoren anvendt på en skalar f

$$\nabla^2 f = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Virvlinga til en vektor $\mathbf{v}$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \mathbf{i}_R & R\mathbf{i}_\theta & \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_R & Rv_\theta & v_z \end{vmatrix} = \frac{\mathbf{i}_R}{R} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - R \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + \mathbf{i}_\theta \left(\frac{\partial v_R}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial R} \right) + \frac{\mathbf{i}_z}{R} \left(\frac{\partial}{\partial R} (Rv_\theta) - \frac{\partial v_R}{\partial \theta} \right)$$

Eksempel: Direkte utregning av divergens og virvling uten bruk av de “ferdige” formlene gitt ovenfor

Dersom vi skriver del-operatoren

$$\nabla = \mathbf{i}_R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\mathbf{i}_\theta}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

og en generell vektor

$$\mathbf{v} = v_R \mathbf{i}_R + v_\theta \mathbf{i}_\theta + v_z \mathbf{i}_z$$

så får vi nøyaktig samme uttrykk for divergens og virvling ved å regne ut direkte $\nabla \cdot \mathbf{v}$ og $\nabla \times \mathbf{v}$, knepet er å la derivasjonsoperasjonene bli utført før vi gjør prikk- eller kryss-operasjonene, og husker på at enhetsvektorene også må deriveres i henhold til derivasjonstabellen for enhetsvektorene vist ovenfor.

Eksempel: Analyse av hastighetsfeltet til en karusell

La posisjonsvektor være $\mathbf{r} = R\mathbf{i}_R + z\mathbf{i}_z$ og la vinkelhastigheten være $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{i}_z$.

Hastighetsfeltet er $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega R\mathbf{i}_\theta$.

Hastighetsfeltet er divergensfritt

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega R) = 0$$

Virvlinga er

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{\mathbf{i}_z}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\omega R^2) = 2\omega\mathbf{i}_z = 2\boldsymbol{\omega}$$

Vi kan også finne strømlinjene. Dette kan vi enten gjøre ved å løse likninga $\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}$ direkte, eller vi kan først finne en strømfunksjon. Ettersom vi her har med et 2D og divergensfritt felt vet vi at det finnes en strømfunksjon, så la oss finne den: Hastighetsfeltet er 2D i $\{R, \theta\}$ -koordinatene. Vi konstruerer derfor et vektorpotensial $\mathbf{A} = -\psi(R, \theta)\mathbf{i}_z$ og representerer hastighetsfeltet med $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{i}_z \times \nabla\psi(R, \theta)$, eller

$$v_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{og} \quad v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial R}$$

Vi finner strømfunksjonen $\psi = \frac{1}{2}\omega R^2 + \text{en konstant}$.

Vi har altså strømlinjene gitt ved $\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = (\mathbf{i}_z \times \nabla\psi) \times d\mathbf{r} = \nabla\psi dz - \mathbf{i}_z \nabla\psi \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{0}$, og ettersom $\nabla\psi$ ikke har komponent i z -retning, og $\nabla\psi \cdot d\mathbf{r} = d\psi$, så er strømlinjene gitt ved z lik en konstant og ψ lik en konstant, dvs sirkler med radius R rundt z -aksen med fastholdt z -verdi.

9.5 Oppgaver

Kapittel 10

Varianter av integralsatsene

10.1 Varianter av Gauss sats

Disse variantene av Gauss sats $\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\tau = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ står i M seksjon 5.1.3 [5].

Variant av Gauss sats som egner seg for beregning av trykkraft

La oss sette $\mathbf{v} = \mathbf{a}p$ hvor p er en skalar funksjon og hvor $\mathbf{a}$ er en vilkårlig konstant vektor. Divergensen er

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\mathbf{a}p) = \mathbf{a} \cdot \nabla p$$

Ettersom $\mathbf{a}$ er konstant kan den settes utenfor integralene

$$\mathbf{a} \cdot \int_V \nabla p \, d\tau = \mathbf{a} \cdot \int_S p \mathbf{n} \, d\sigma$$

Ettersom $\mathbf{a}$ er vilkårlig kan vi ta den bort, og vi ender opp med følgende alternative form for Gauss sats som egner seg spesielt godt for å regne ut trykkraft

$$\int_V \nabla p \, d\tau = \int_S p \mathbf{n} \, d\sigma$$

En annen modifisert versjon av Gauss sats

La oss sette $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{u}$ hvor $\mathbf{a}$ er en vilkårlig konstant vektor og hvor $\mathbf{u}$ er et vektorfelt. Divergensen er (husk at kun $\mathbf{u}$ skal deriveres)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{u}) = \nabla \cdot (-\mathbf{u} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})$$

Vi har også

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{n}$$

Ettersom $\mathbf{a}$ er konstant kan vi sette den utenfor integralene

$$\mathbf{a} \cdot \int_V -\nabla \times \mathbf{u} \, d\tau = \mathbf{a} \cdot \int_S \mathbf{u} \times \mathbf{n} \, d\sigma$$

Ettersom $\mathbf{a}$ er vilkårlig kan vi ta den bort, og vi ender opp med følgende alternative form for Gauss sats

$$\int_V -\nabla \times \mathbf{u} \, d\tau = \int_S \mathbf{u} \times \mathbf{n} \, d\sigma$$

Green's første identitet

La oss sette $\mathbf{v} = f\nabla g$ hvor f og g er to skalarfelt. For å regne ut divergensen husker vi at både f og g skal deriveres og vi bruker produktregelen

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (f\nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g$$

Dersom vi setter dette inn i Gauss sats får vi

$$\int_V \nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g \, d\tau = \int_S f\nabla g \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

Green's andre identitet

La oss sette $\mathbf{v} = f\nabla g - g\nabla f$ hvor f og g er to skalarfelt. For å regne ut divergensen husker vi at både f og g skal deriveres og vi bruker produktregelen

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$$

Dersom vi setter dette inn i Gauss sats får vi

$$\int_V f\nabla^2 g - g\nabla^2 f \, d\tau = \int_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

NB! Legg merke til at Green's to identiteter er varianter av Gauss sats, mens Green's sats er en variant av Stokes sats!

10.1.1 Anvendelse på trykkraft og oppdrift

Vi har nå utledet en versjon av Gauss sats som egner seg spesielt godt til å beregne trykkraft

$$\mathbf{F} = \int_S -p\mathbf{n} \, d\sigma = - \int_V \nabla p \, d\tau$$

Ved hjelp av denne formelen kan vi vise at trykkraften på en beholder, fra ei væske i beholderen, er lik vekten av væska i beholderen. Vi kan også vise at oppdriften til et legeme som senkes ned i ei væske er motsatt lik vekten av den fortrenge væska (Arkimedes prinsipp).

Formelen er spesielt fordelaktig dersom legemet har en komplisert form slik at beskrivelsen av S og $\mathbf{n}$ er utfordrende. Da kan det være enklere å regne ut volumintegralet.

Eksempel: Tyngden av vann i en beholder er lik trykkraften fra vannet på beholderen

En beholder er fylt med ei væske som har hydrostatisk trykk, $p = p_0 - \rho g z$, hvor z -aksen peker oppover og tyngdens akselerasjon er $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$. I dette eksemplet spiller det ingen rolle hvilket referansetrykk p_0 vi velger. Trykkgradienten i væska er $\nabla p = -\rho g\mathbf{k} = \rho\mathbf{g}$. Volumet V er omsluttet av overflaten S som har enhetsnormalvektor $\mathbf{n}$ orientert ut av beholderen.

I dette tilfellet vil trykkraften fra væska på beholderen være

$$\mathbf{F} = \int_S p \mathbf{n} d\sigma = - \int_V \rho g \mathbf{k} d\tau = -mg\mathbf{k} = m\mathbf{g}$$

hvor $m = \rho V$ er massen til væska og $m\mathbf{g}$ er vekten til væska. Det er opplagt at det er mye enklere å regne ut volumintegralet dersom væska har et kjent volum, mens beholderen kan ha en vilkårlig komplisert form.

Egentlig kan vi lure på hvordan dette fungerer dersom beholderen er åpen i toppen hvor væska er i kontakt med omkringliggende luft med lufttrykk p_0 . I så fall må vi utvide flateintegralet for å ta hensyn til trykkraft fra omkringliggende luft med konstant lufttrykk p_0 (husk å snu $\mathbf{n}$ for trykkraft fra utsiden) og resultatet ovenfor viser seg stadig å være riktig.

Eksempel: Oppdrift på et legeme som er presset ned i vann

Et legeme er presset ned i vann som har hydrostatisk trykk $p = p_0 - \rho g z$. Vi tenker oss at z -aksen peker oppover og tyngdens akselerasjon er $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$. Vi tenker oss videre at referansetrykket p_0 er lik lufttrykket og referansehøyden $z = 0$ er der hvor den frie overflaten til væska møter luft. Trykkgradienten i væska er $\nabla p = -\rho g \mathbf{k} = \rho \mathbf{g}$. Volumet V av legemet som er presset ned i vannet er omsluttet av overflaten S som har enhetsnormalvektor $\mathbf{n}$ orientert ut av legemet.

I dette tilfellet vil trykkraften fra vannet på legemet være

$$\mathbf{F} = - \int_S p \mathbf{n} d\sigma = \int_V \rho g \mathbf{k} d\tau = mg\mathbf{k} = -m\mathbf{g}$$

hvor $m = \rho V$ er massen til det fortrenkte væska og $m\mathbf{g}$ er vekten av den fortrenkte væska. Dette kalles oppdrift. Oppdriften er motsatt like stor som vekten til den fortrenkte væska. Dette kalles for Arkimedes prinsipp.

Dersom vi tidligere har regnet ut trykkraften som virker på en neddykket sylinder og ei neddykket kule, ved å beregne overflateintegralet av $p\mathbf{n}$ direkte, så husker vi at de utregningene var ganske omfattende. Nå innser vi at beregningen kan bli mye enklere fordi vi kun trenger å vite volumet av legemet.

Egentlig burde vi stusse over at denne måten å bruke Gauss sats er riktig: Trykket p som inngår i flateintegralet er en egenskap til fluidet rundt legemet, men vi har beregnet volumintegralet over legemet hvor det ikke trenger å være noe fluid som har tetthet og trykk tilsvarende fluidet omkring. Det vi har gjort er å erstatte legemet med et fluid identisk med omgivelsene slik at det hydrostatiske trykket kan forlenges inn i legemet. Denne måten å løse oppdriftsproblemet på ble først beskrevet av **Simon Stevin** (1548–1620).

Eksempel: Hvor kommer oppdriften egentlig fra?

Sett en beholder med vann på en vekt. Press et legeme ned i vannet. Kjenn at det virker en oppdrift på legemet. Observer at vekta faktisk gir større utslag! Oppdriften kommer fra underlaget til beholderen med vann!

Eksempel: Vannsøyle i deformert beholder på kjøkkenvekt

Fyll en beholder med litt vann, sett beholderen på en vekt, og finn ut hvor mye vannet veier. La oss tenke oss at beholderen er åpen øverst slik at vannet der har

samme trykk som luft, p_0 . Vannet nederst i beholderen er gitt ved formelen for hydrostatisk trykk, $p = p_0 + \rho gh$, hvor h er høyden på vannsøylen.

Klem beholderen delvis sammen slik at vannet stiger i beholderen. Det er åpenbart at vannet nå har større trykk nederst i beholderen. Likevel burde det være ganske opplagt at vannet veier like mye som før?

Forklaringen på dette “mysteriet” er at den sammenklemte beholderen kommer til å ha en svært deformert og komplisert overflate S som det vil være utfordrende å integrere over. Dog vil volumet av vannet hele tiden være det samme.

10.2 Varianter av Stokes sats

Disse variantene av Stokes sats $\int_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_\gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ står i M seksjon 5.2.2 [5].

Første variant

Sett $\mathbf{v} = \mathbf{a}f$ for en vilkårlig konstant vektor $\mathbf{a}$ og et skalarfelt f . Vi har

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\mathbf{a}f) = -\mathbf{a} \times \nabla f$$

Etter litt manipulering, og ettersom $\mathbf{a}$ er konstant slik at den kan settes utenfor integralene, får vi

$$\mathbf{a} \cdot \left(\int_S -\nabla f \times \mathbf{n} d\sigma \right) = \mathbf{a} \cdot \oint_\gamma f d\mathbf{r}$$

Ettersom $\mathbf{a}$ er vilkårlig kan vi ta den bort

$$\int_S -\nabla f \times \mathbf{n} d\sigma = \oint_\gamma f d\mathbf{r}$$

Andre variant

Sett $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{u}$ for en vilkårlig konstant vektor $\mathbf{a}$ og et vektorfelt $\mathbf{u}$.

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{u}) = \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}$$

og etter litt manipulering får vi

$$\nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} \cdot \{-(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{u}\}$$

Denne manipuleringen er kanskje ikke helt enkel, men husk at her opptrer normalvektoren $\mathbf{n}$ til flaten S som en konstant, mens ∇ kun skal derivere $\mathbf{u}$. Sett gjerne en pil ned over $\mathbf{u}$ for å minne deg på at ∇ kun skal derivere $\mathbf{u}$!

Dessuten har vi

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \times d\mathbf{r}$$

Ettersom $\mathbf{a}$ er konstant kan den kan settes utenfor integralene

$$\mathbf{a} \cdot \int_S -(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{u} d\sigma = \mathbf{a} \cdot \oint_\gamma \mathbf{u} \times d\mathbf{r}$$

Ettersom $\mathbf{a}$ er vilkårlig kan vi ta den bort

$$\int_S -(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{u} d\sigma = \oint_\gamma \mathbf{u} \times d\mathbf{r}$$

10.3 Oppgaver

Kapittel 11

Divergens- og virvelfrie felt: Laplace-likningen

Svært ofte støter man på situasjoner der et vektorfelt $\mathbf{v}$ samtidig er både divergensfritt

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (11.1)$$

og virvelfritt

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (11.2)$$

Vi skal nå se at dette naturlig leder til at feltet er beskrevet av Laplace-likningen.

Beskrivelse med skalarpotensial

Dersom et felt er virvelfritt $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ så vet vi at det eksisterer et skalarpotensial ϕ slik at $\mathbf{v} = \nabla \phi$. Dersom feltet i tillegg er divergensfritt får vi $\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = 0$, altså Laplace-likningen

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (11.3)$$

I kartesiske koordinater $\{x, y, z\}$ har vi

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (11.4)$$

i sylindervekoordinater $\{R, \theta, z\}$ har vi

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (11.5)$$

og i kulekoordinater $\{r, \theta, \varphi\}$ har vi

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (11.6)$$

Beskrivelse med vektorpotensial

Dersom et felt er divergensfritt $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ så eksisterer det et vektorpotensial $\mathbf{A}$ slik at $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}$. Dersom feltet i tillegg er virvelfritt får vi

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

I utgangspunktet har vektorpotensialet $\mathbf{A}$ tre skalarkomponenter, like mange som feltet $\mathbf{v}$. Imidlertid vil kravet om at feltet er divergensfritt, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, pålegge én skalar føringsbetingelse på komponentene til $\mathbf{v}$, slik at feltet $\mathbf{v}$ egentlig bare har to uavhengige skalare komponenter. I så fall trenger heller ikke vektorpotensialet $\mathbf{A}$ ha mer enn to uavhengige komponenter. Vi har dermed frihet til å pålegge én tilleggsbetingelse på komponentene til $\mathbf{A}$. Dette kalles å velge “gauge” (se kapittel 7.5). Et mulig valg er å pålegge at vektorpotensialet skal være divergensfritt, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, dette kalles Coulomb “gauge”, og i så fall forenkles likningen for vektorpotensialet til Laplace-likningen på vektorform

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (11.7)$$

NB! Her virker altså Laplace-operatoren på vektorfeltet $\mathbf{A}$, da gjelder ikke likningene (11.5) og (11.6) for de skalare komponentene til $\mathbf{A}$ i krumlinjede koordinater!

Beskrivelse med strømfunksjon

Dersom et felt er divergensfritt $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ og 2D så eksisterer det en strømfunksjon ψ slik at $\mathbf{v}$ kan uttrykkes ved strømfunksjonen. Dersom vi feltet er 2D i xy -planet ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$ og $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \mathbf{0}$) kan feltet beskrives ved et vektorpotensial som har strømfunksjonen som komponent i z -retning, $\mathbf{A} = -\psi(x, y)\mathbf{k}$ slik at vektorfeltet i kartesiske koordinater blir

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A} = -\mathbf{i} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathbf{j} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

og i plane polarkoordinater (husk hvordan vi beregner virvling i sylinderkoordinater)

$$\mathbf{v} = \nabla \times (-\psi \mathbf{k}) = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \mathbf{i}_R & R\mathbf{i}_\theta & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\psi \end{vmatrix} = -\frac{\mathbf{i}_R}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \mathbf{i}_\theta \frac{\partial \psi}{\partial R}.$$

Ettersom vektorfeltet $\mathbf{v}$ er divergensfritt ser vi at strømfunksjonen må oppfylle den to-dimensjonale Laplace-likningen, $\nabla^2 \psi = 0$.

Vi har da i kartesiske koordinater $\{x, y\}$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (11.8)$$

og i plane polarkoordinater $\{R, \theta\}$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (11.9)$$

Strømlinjer beskrevet av strømfunksjon

Strømlinjer er kurver overalt tangent til vektorfeltet, det vil si $\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Vi setter inn og får

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = (\mathbf{k} \times \nabla \psi) \times d\mathbf{r} = (\mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}) \nabla \psi - \mathbf{k} (\nabla \psi \cdot d\mathbf{r}) = -k d\psi = \mathbf{0}$$

(husk at vi befinner oss på en flate normalt på z -aksen, derfor er $\mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = 0$). Følgelig er strømlinjene gitt ved $\psi = \text{konstant}$.

Strømlinjer og ekvipotensialflater står normalt på hverandre utenom stagnasjonspunkt

Dette resultatet kan med fordel utledes i 3D, uten å begrense oss til 2D:

Ekvipotensialflater er gitt ved $\phi = \text{konstant}$. Normalvektorene til ekvipotensialflatene er gitt ved $\nabla\phi$.

Vi minner oss nå på den opprinnelige definisjonen av strømlinjer: Kurver som er overalt tangent til $\mathbf{v}$, altså løsning av differensiallikninga $\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \nabla\phi \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Med andre ord, strømlinjene står normalt på ekvipotensialflatene. Imidlertid har vi et unntak eller spesialtilfelle i stagnasjonspunkter hvor $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, for der vil denne likninga uansett være oppfylt uten noen begrensninger på $d\mathbf{r}$. Vi kan da slå fast at ekvipotensialflatene står normalt på strømlinjene utenom stagnasjonspunkt.

2D divergens- og virvelfrie felt i xy -planet, Cauchy–Riemanns likninger

I det følgende skal vi stort sett begrense oss til felt av typen $\mathbf{v} = v_x(x, y)\mathbf{i} + v_y(x, y)\mathbf{j}$ eller $\mathbf{v} = v_R(R, \theta)\mathbf{i}_R + v_\theta(R, \theta)\mathbf{i}_\theta$. Ettersom vi kan velge om vi ønsker å representere feltet med et potensial eller en strømfunksjon, så må det være en relasjon mellom disse, nemlig

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v_y &= \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned}$$

eller i plane polarkoordinater

$$\begin{aligned} v_R &= \frac{\partial\phi}{\partial R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ v_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial R} \end{aligned}$$

Disse likningene kalles Cauchy–Riemanns likninger i henholdsvis kartesiske eller polare koordinater.

Strømlinjer og ekvipotensialflater står normalt på hverandre — igjen

Ekvipotensialflater er gitt ved $\phi = \text{konstant}$. Normalvektorene er gitt ved $\nabla\phi$.

I det to-dimensjonale tilfellet hvor vi har en strømfunksjon er strømlinjer gitt ved $\psi = \text{konstant}$. Normalvektorene er gitt ved $\nabla\psi$.

I det to-dimensjonale tilfellet kan vi vise at $\nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0$, dette får vi til ved hjelp av Cauchy–Riemanns likninger,

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0.$$

Øvelse: Sjekk at du får samme resultat ved å bruke polarkoordinater.

I et stagnasjonspunkt, hvor $\mathbf{v} = \nabla\phi = \mathbf{0}$ og $\nabla\psi = \mathbf{0}$, der trenger ikke strømlinjene stå normalt på ekvipotensialflatene, for der vil alle disse betingelsene være identisk tilfredsstilt uansett!

I det tre-dimensjonale tilfellet har vi ikke en strømfunksjon og vi bruker heller den opprinnelige definisjonen på strømlinjer $\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = 0$, som vi diskuterte tidligere.

NB! Merk at i et stagnasjonspunkt, der hvor $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, trenger ikke strømlinjene stå normalt på ekvipotensialflatene, for i så fall er disse betingelsene tilfredsstilt uansett.

Eksempel: Vektorfeltet $\mathbf{v} = -y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

La oss studere feltet $\mathbf{v} = -y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$.

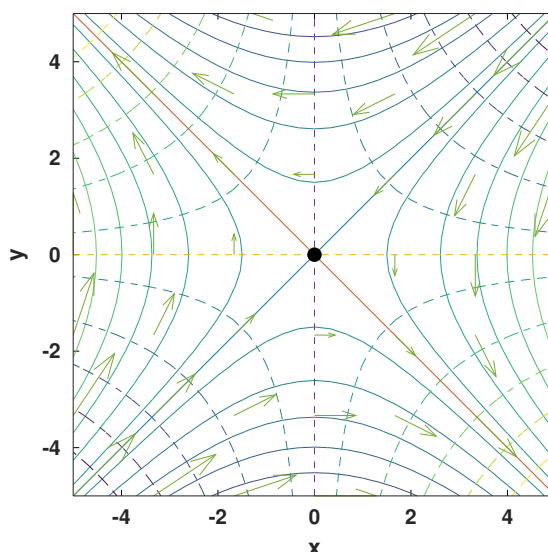
Vi ser umiddelbart at feltet er divergens- og virvelfritt, så det eksisterer både en strømfunksjon og et skalarpotensial

$$\psi = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

og

$$\phi = -xy$$

I figuren ser vi stagnasjonspunktet som et kulepunkt i origo, vi ser strømlinjer som heltrukne kurver, og vi ser ekvipotensialkurver som stiplede kurver. Vi ser også piler som viser retning og relativ styrke til feltet.



Superposisjonsprinsippet

Likningene for divergensfrihet (11.1) og virvelfrihet (11.2) samt alle de forskjellige variantene av Laplace-likningen (11.3)–(11.9) er lineære. Følgelig gjelder superposisjonsprinsippet: La for eksempel ϕ_1 og ϕ_2 oppfylle Laplace-likningen og la a og b være vilkårlige konstanter, da oppfylder $\phi = a\phi_1 + b\phi_2$ også Laplace-likningen, $\nabla^2\phi = \nabla^2(a\phi_1 + b\phi_2) = a\nabla^2\phi_1 + b\nabla^2\phi_2 = 0$.

Vi kan benytte superposisjonsprinsippet for å konstruere vilkårlig kompliserte løsninger av Laplace-likningen ved å sette sammen velkjente og “enkle” løsninger.

Laplace-likningen er i utgangspunktet vanskelig å løse fordi den er en partiell differensiallikning. Vi kan imidlertid redusere den til en ordinær differensiallikning dersom vi antar at potensialet eller strømfunksjonen kun avhenger av én koordinat om gangen. Vi lar dette være vår definisjon av en “enkel” løsning.

“Enkle” løsninger

Som et illustrerende hjelpemiddel introduserer vi begrepet “enkel” løsning. Det er en løsning for ϕ eller ψ som kun avhenger av én koordinat. Her kommer noen eksempler på “enkle” løsninger:

Rettlinjet strøm

Anta $\phi = \phi(x)$. Laplace-likningen reduserer seg til $\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$ som har løsning $\phi = Ax + B$. Cauchy–Riemanns likninger gir

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = A = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

som gir $\psi = -Ay + C$. Vektorfeltet er $\mathbf{v} = A\mathbf{i}$.

Øvelse: Gjør dette også med antakelsene $\phi = \phi(y)$, $\psi = \psi(x)$ og $\psi = \psi(y)$.

Kilde/sluk

Anta $\phi = \phi(R)$. Laplace-likningen reduserer seg til $\nabla^2 \phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) = 0$ som har løsning $\phi = A \ln R + B$. Cauchy–Riemanns likninger gir

$$\begin{aligned} v_R &= \frac{\partial \phi}{\partial R} = \frac{A}{R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial R} \end{aligned}$$

som gir $\psi = -A\theta + C$. Vektorfeltet er $\mathbf{v} = \frac{A}{R}\mathbf{i}_R$. Vi kan kalle dette feltet en “punktkilde” dersom $A > 0$ eller et “punktsluk” dersom $A < 0$. Det er altså origo som er selve kilden eller sluket, og dette er en singularitet. For å angi “styrken” til kilden eller sluket kan vi enten oppgi A eller vi kan regne ut den integrerte fluksen ut gjennom en sirkel rundt origo.

Øvelse: Vis at den integrerte fluksen ut gjennom en sirkel rundt origo er lik $2\pi A$ uavhengig av radius til sirkelen!

Punktvirvel

Anta $\phi = \phi(\theta)$. Laplace-likningen reduserer seg til $\nabla^2 \phi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0$ som har løsning $\phi = A\theta + B$. Cauchy–Riemanns likninger gir

$$\begin{aligned} v_R &= \frac{\partial \phi}{\partial R} = 0 = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{A}{R} = \frac{\partial \psi}{\partial R} \end{aligned}$$

som gir $\psi = A \ln R + C$. Vektorfeltet er $\mathbf{v} = \frac{A}{R} \mathbf{i}_\theta$. Vi kan si at dette er feltet til en “punktvirvel” i origo. For å angi “styrken” til punktvirvelen kan vi enten oppgi A eller vi kan regne ut sirkulasjonen rundt en sirkel med sentrum i origo.

Merk: Vektorfeltet til punktvirvelen er virvelfritt, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, overalt bortsett fra i origo hvor feltet er singulært.

Øvelse: Vis at sirkulasjonen rundt en slik sirkel er lik $2\pi A$ uavhengig av radius til sirkelen!

Øvelse: Finn de “enkle” løsningene som framkommer ved å anta $\psi = \psi(R)$ og $\psi = \psi(\theta)$.

Eksempel: Vektorfeltet $\mathbf{v} = -y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

Dette vektorfeltet har vi allerede diskutert på side 131. Legg merke til at det ikke er en superposisjon av de “enkle” løsningene vi har diskutert så langt! Derfor må vi ikke tro at alle løsninger kan lages som superposisjon av våre “enkle” løsninger!

Bruk av superposisjonsprinsippet for å lage kompliserte løsninger fra de enkle løsningene

Vi skal nå benytte superposisjonsprinsippet til å konstruere “kompliserte” løsninger av Laplace likning ved å sette sammen “enkle” løsninger.

Superposisjon av to rettlinjede strømninger

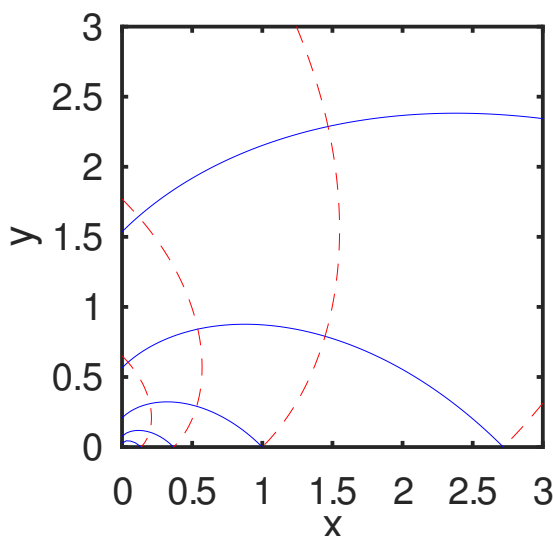
La $\phi_1 = x$ og $\phi_2 = y$. Dette tilsvarer $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i}$ og $\mathbf{v}_2 = \mathbf{j}$. Dette er rettlinjede strømninger med enhets styrke i x - og y -retning.

Superposisjonen $\phi = A\phi_1 + B\phi_2$ gir $\mathbf{v} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ som er en vilkårlig sterk strømning i vilkårlig retning avhengig av koeffisientene A og B .

Superposisjon av kilde og punktvirvel i samme punkt

La $\phi_1 = \ln R$ og $\phi_2 = \theta$. Dette tilsvarer $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{R} \mathbf{i}_R$ og $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{R} \mathbf{i}_\theta$. Dette er en kilde med enhets styrke og en punktvirvel med enhets styrke, begge lokalisert i origo.

Superposisjonen $\phi = A\phi_1 + B\phi_2$ gir $\mathbf{v} = \frac{A}{R} \mathbf{i}_R + \frac{B}{R} \mathbf{i}_\theta$ som er en vilkårlig sterk spiralkilde-strømning avhengig av koeffisientene A og B .



Første kvadrant. Blå konturer til potensialet ϕ , rød konturer til den korresponderende strømfunksjonen ψ .

Se også illustrasjon i GF figur 9.11.

Superposisjon av kilde og sluk i forskjellige punkter

La $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ være to punkter og la $\mathbf{r}$ være posisjonsvektor. La $\phi_1 = \ln |\mathbf{r} - \mathbf{a}|$ og $\phi_2 = -\ln |\mathbf{r} - \mathbf{b}|$. Dette er en kilde i punktet $\mathbf{a}$ og et sluk i punktet $\mathbf{b}$, begge med enhets styrke.

Superposisjonen $\phi = \phi_1 + \phi_2$ gir en strømming som går fra kilden i $\mathbf{a}$ til sluket i $\mathbf{b}$.

Superposisjon av to punktvirvler som beveger seg i feltet til hverandre

Dersom de roterer samme vei så vil de gå i ring rundt hverandre.

Dersom de roterer motsatt vei så vil de bevege seg som et par i retning normalt på akse mellom punktvirvlene.

Se illustrasjon i GF figur 9.8.

Øvelse: Still deg opp på en gangvei over din favoritt elv/bekk og studer strømmingsmønsteret. Det er enklere å se dersom det er litt skum eller støv på vannoverflaten. Legg merke til hvordan vannoverflaten ser ut til å krumme nær punktvirvler. Legg merke til hvordan punktvirvler ser ut til å bevege seg i feltet til hverandre.

Dipol: Superposisjon av kilde og sluk som ligger nært inntil hverandre

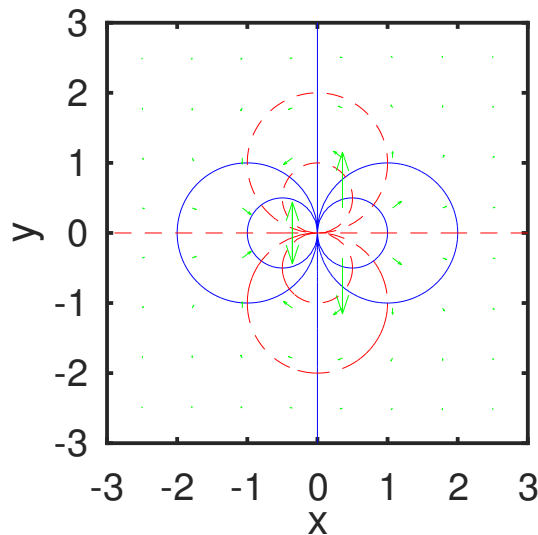
Vi plasserer kilden i $\mathbf{a} = \epsilon \mathbf{i}$ og sluket i $\mathbf{b} = -\epsilon \mathbf{i}$. Vi har da $|\mathbf{r} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x - \epsilon)^2 + y^2}$ og $|\mathbf{r} - \mathbf{b}| = \sqrt{(x + \epsilon)^2 + y^2}$. Vi multipliserer kilden og sluket med en styrke $\frac{1}{\epsilon}$ og lar ϵ bli vilkårlig liten i superposisjonen

$$\phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{(x - \epsilon)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x + \epsilon)^2 + y^2}}{\epsilon}$$

Dette er et $\frac{0}{0}$ uttrykk, og vi kan bruke L'Hôpitals regel med å derivere både teller og nevner med hensyn på ϵ

$$\phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{-(x-\epsilon)}{(x-\epsilon)^2+y^2} - \frac{(x+\epsilon)}{(x+\epsilon)^2+y^2}}{1} = -\frac{2x}{x^2+y^2}$$

Dette kalles for en dipol, og akkurat denne dipolen eksisterer i et to-dimensjonalt plan.



Blå konturer til potensialet ϕ , rød konturer til den korresponderende strømfunksjonen ψ , grønn vektor pileplott av $\nabla\phi$.

11.1 Oppgaver

- 11.1 Finn strømfunksjonen ψ og hastighetsfeltet $\mathbf{v} = \nabla\phi$ til en superposisjon av en kilde med potensial $\phi_1 = A \ln R$ og en punktvirvel med potensial $\phi_2 = B\theta$ vist i figur ovenfor.
- 11.2 Finn strømfunksjonen ψ og hastighetsfeltet $\mathbf{v} = \nabla\phi$ til dipolen vist i figur ovenfor.
- 11.3 Vi har introdusert begrepet “enkle” løsninger av Laplace likning for å angi at de bare avhenger av én koordinat. For Laplace likning $\nabla^2\phi = 0$ i kulekoordinater $\{r, \theta, \varphi\}$ kan vi finne tre “enkle” løsninger, $\phi(r)$ og $\phi(\theta)$ og $\phi(\varphi)$. Finn disse og beskriv/tegn hastighetsfeltene.
- 11.4 Blant de “enkle” løsningene av Laplace likning i kulekoordinater finner vi kilde og sluk. Superponer en kilde og et sluk som ligger nært inntil hverandre for å utlede uttrykket for en dipol i tre-dimensjonalt rom.

Kapittel 12

Feltlikninger for fluider

Som eksempel på anvendelse av vektor felt teori og flervariabel kalkulus, og som illustrasjon av begrepene vi har gått igjennom så langt, og som introduksjon til et selvstendig fagfelt som i stor grad er basert på denne typen matematikk, skal vi nå etablere feltlikninger for fluid- og kontinuumsmekanikk. Vi skal også se tilsvarende anvendelser innen andre fagområder, for eksempel modellering av trafikk langs veier. Vi kunne ha hentet eksempler fra elektromagnetisme, men det skal vi ikke gjøre her.

Kontinuum

Ideen om “kontinuum”, eller kontinuerlig medium, ble formulert allerede av Aristoteles (384–322 f.Kr.): Noe som kan deles opp i stadig mindre biter som alltid har de samme egenskapene som de opprinnelige større bitene uansett hvor mye vi deler det opp.

Kontinuumshypotesen

“Kontinuumshypotesen” i mekanikk er antakelsen om at vi kan beskrive et medium som et kontinuum. Under kontinuumshypotesen tenker vi oss at egenskaper som tetthet, trykk, temperatur og hastighet er veldefinert for vilkårlig små volumenelementer.

I praksis vet vi at kontinuumshypotesen ikke lenger er gyldig etter at vi har delt opp mediet i alt for små biter. Om vi betrakter et fluid som består av molekyler, så vet vi at vi ikke kan dele opp molekylerne uten at egenskapene til de mindre bitene (atomer og elementærpartikler) er ulike egenskapene til molekylerne. Om vi prøver å modellere biltrafikk som et fluid bestående av biler så er det meningsløst å dele opp bilene i sine elementære bestanddeler. Kontinuumshypotesen slutter altså å være gyldig når vi kommer ned til en lengdeskala som er sammenliknbar med størrelsen på henholdsvis et molekyl eller en bil.

Ordet “kontinuumshypotese” brukes også innen matematikk, men i en helt annen betydning som ikke må forveksles med kontinuumshypotesen i fluidmekanikk.¹

¹I mengdeteori er kontinuumshypotesen en antakelse om at det ikke eksisterer en mengde som har kardinalitet strengt mellom kardinalitetene til de hele tallene og de reelle tallene. Antakelsen ble framsatt i 1878 av Georg Cantor (1845–1918). Kardinaliteten til en uendelig mengde uttrykker graden av uendelighet. Det er uendelig mange hele tall og det er uendelig mange reelle tall. De hele tallene kan telles, mens de reelle tallene kan ikke telles. Vi sier at kardinaliteten til de reelle tallene er større enn kardinaliteten til de hele tallene. Kontinuumshypotesen i mengdeteori sier at det ikke finnes en uendelighet strengt mellom disse to.

Makroskopisk modell

At vi går ut ifra ideen om et kontinuum, og baserer oss på kontinuumshypotesen, det medfører at vi i praksis skal konstruere en makroskopisk modell. Vi kommer til å anta at ideen om en infinitesimal størrelse, for eksempel et differensial som kan være så lite som helst, er fornuftig, uten å ta inn over oss at ting kanskje egentlig er ganske forskjellig når vi går langt ned i skala.

Fluid partikkel

En “fluid partikkel” er et infinitesimalt og materielt volum av et fluid, med masse, utstrekning, massetetthet osv. Vi kan kanskje tenke oss en fluid partikkel som en punktmasse. Tanken om at en fluid partikkel kan brukes som utgangspunkt for å beskrive oppførselen til et fluid ble introdusert av Leonhard Euler (1707–1783).

Det at en fluid partikkel er materiell, det vil si at dersom vi maler vår partikkel rød og resten av fluidet blått, så skal vi hele tiden betrakte det som har rød farge.

Eulersk og Lagrangesk beskrivelse

Det er to grunnleggende forskjellige måter å beskrive bevegelsen til et fluid, Eulersk og Lagrangesk.²

I Eulersk beskrivelse følger vi ikke individuelle partikler, men benytter heller en feltbeskrivelse. Et eksempel er hastighetsfeltet som funksjon av posisjon og tid $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

I Lagrangesk beskrivelse følger vi individuelle partikler. Posisjonen til en partikkel er $\mathbf{r}_p(t)$. Hastigheten til en partikkel er $\mathbf{v}_p(t) = \frac{d\mathbf{r}_p(t)}{dt}$. Akselerasjonen til en partikkel er $\mathbf{a}_p(t) = \frac{d\mathbf{v}_p(t)}{dt}$.

Disse to beskrivelsene må passe sammen, derfor har vi for eksempel at

$$\mathbf{v}_p(t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_p(t), t).$$

Strømlinjer og partikkelbaner

En fluid partikkel beveger seg langs en bane som vi angir ved posisjonsvektor som funksjon av tid $\mathbf{r}_p(t)$. For å finne banen kan vi løse differensiallikninga for hastigheten uttrykt som den tidsderiverte av posisjonen

$$\frac{d\mathbf{r}_p}{dt} = \mathbf{v}_p(t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_p(t), t).$$

En bane er en reise i rom og tid, veldefinert også for hastighetsfelt som endrer seg i tid.

Tidligere har vi definert strømlinjer som kurver som er overalt tangent til vektorfeltet. Disse er løsninger av differensiallikninga som uttrykker at kurveelementet er tangent til (parallel med) hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

Denne likninga er ikke entydig definert dersom hastighetsfeltet $\mathbf{v}$ endrer seg i tid, derfor innser vi at strømlinjene er et øyeblikksbilde av vektorfeltet, ved fastholdt tid:

²Joseph–Louis Lagrange (1736–1813)

Strømlinjer er kurver som er tangent til vektorfeltet, et øyeblikksbilde ved fastholdt tid.

Vi kan vise at dersom hastighetsfeltet er stasjonært, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$, så er banene lik strømlinjene: Vi vet nemlig at en infinitesimal forflytning langs en bane er $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$. Dersom vi krysser dette med hastigheten $\mathbf{v}$ får vi $\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} dt = \mathbf{0}$ og følgelig ser vi at kriteriet for strømlinjer er oppfylt av banene.

Dersom feltet $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ ikke er stasjonært, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \neq \mathbf{0}$, så går banene ikke langs strømlinjene fordi øyeblikksbilder av feltet vil se forskjellige ut fra det ene øyeblikket til det andre.

12.1 Partikkelderivert. Materiell derivert.

Med partikkelderivert mener vi endring av en egenskap slik det observeres fra en partikkel som beveger seg langs en bane.

La $E(\mathbf{r}, t)$ være en skalar egenskap. Vi skal se på endringen av denne egenskapen, slik den oppfattes av en observatør som befinner seg på en fluid partikkel. Det er to årsaker til at observatøren registrerer endring av egenskapen E , delvis fordi E endrer seg i tid på et gitt sted, og delvis fordi observatøren flytter seg til et annet sted hvor E har en annen verdi. Endringen i E på grunn av at partikkelen har endret sin posisjon $\Delta\mathbf{r}$ i løpet av tid Δt er

$$\Delta E = E(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, t + \Delta t) - E(\mathbf{r}, t).$$

Nå gjør vi samme knep som vi gjorde da vi utledet gradient og retningsderivert, vi ser på endringen med hensyn på bare tid, eller bare posisjon

$$\Delta E = E(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, t + \Delta t) - E(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, t) + E(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, t) - E(\mathbf{r}, t).$$

Vi har at

$$E(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, t + \Delta t) - E(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, t) \approx \frac{\partial E}{\partial t} \Delta t$$

og

$$E(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, t) - E(\mathbf{r}, t) \approx \nabla E \cdot \Delta\mathbf{r} = \Delta\mathbf{r} \cdot \nabla E$$

og følgelig får vi

$$\Delta E \approx \frac{\partial E}{\partial t} \Delta t + \Delta\mathbf{r} \cdot \nabla E.$$

Nå deler vi på Δt

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \approx \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \cdot \nabla E$$

og lar $\Delta t \rightarrow 0$. Hastigheten dukker da opp i andre ledd på høyre side $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$.

På venstre side får vi nå en spesiell type tidsderivert av egenskapen E , nemlig den tidsderivate slik den oppfattes av en observatør som befinner seg på en fluid partikkel. Vi innfører derfor et spesielt symbol for å markere dette

$$\frac{DE}{dt} \equiv \frac{\partial E}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)E.$$

Det første leddet på høyre side kaller vi den lokalderiverte fordi det beskriver hvordan egenskapen endrer seg på et fastholdt sted, uavhengig av at fluidpartikkelen flytter på seg. Det andre leddet på høyre side kaller vi den konvektivt deriverte fordi det avhenger av forflytningen til fluidpartikkelen. Summen av disse kaller vi den partikkelderiverte.

Vi kan nå utvide beskrivelsen til en vektor egenskap $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ som vi kan sette rett inn i uttrykket ovenfor

$$\frac{D\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{F}.$$

I dette uttrykket er det viktig å merke seg at prikk-produktet skal utføres mellom $\mathbf{v}$ og ∇ , mens ∇ -operatoren skal derivere $\mathbf{F}$.

Partikkelakselerasjon

Med partikkelakselerasjon skal vi forstå akselerasjonen som en partikkel blir utsatt for mens den beveger seg langs sin bane

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$$

Partikkelakselerasjonen er altså en sum av to bidrag som vi skal kalle lokal akselerasjon og konvektiv akselerasjon. I uttrykket for den konvektive akselerasjonen skal prikk-produktet utføres mellom ∇ og den hastighetsvektoren $\mathbf{v}$ som ikke skal deriveres.

Eksempel: Hastighetsfeltet til en karusell, en partikkel på en karusell

Vi har sett at hastighetsfeltet til en karusell kan beskrives ved $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega R \mathbf{i}_\theta$. Dette er en Eulersk beskrivelse. Vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}$ er ikke et felt, fordi den ikke er en funksjon av posisjon, men vinkelhastigheten kan være en funksjon av tid $\boldsymbol{\omega}(t)$ for en karusell som ikke har konstant omdreiningshastighet. Hastighetsfeltet $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ er et felt fordi det er en entydig funksjon av posisjon $\mathbf{r}$ og tid t . Koordinatvektoren $\mathbf{i}_\theta$ er et felt fordi den er en funksjon av posisjon, men den er derimot ikke en funksjon av tid, så vi kunne ha skrevet $\mathbf{i}_\theta(\mathbf{r})$.

Dersom vinkelhastigheten er konstant (i tid), $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{0}$, så er også hastighetsfeltet konstant i tid, eller stasjonært, $\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$.

En partikkel som følger karusellen har posisjon $\mathbf{r}_p(t)$, og har hastighet $\mathbf{v}_p(t) = \frac{d\mathbf{r}_p(t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_p(t), t) = \omega R \mathbf{i}_\theta(\mathbf{r}_p(t))$. Dette er en Lagrangesk beskrivelse.

Selv om vinkelhastigheten er konstant, så er likevel ikke partikkelens hastighet konstant, $\frac{d\mathbf{v}_p}{dt} \neq \mathbf{0}$, fordi vi vet at en partikkel som følger karusellen vil bevege seg i sirkel og således hele tiden skifte bevegelsesretning.

La oss regne ut partikkelakselerasjonen for en karusell med konstant vinkelhastighet. Det er ingen lokalakselerasjon fordi vinkelhastigheten er antatt konstant. Derimot er det konvektiv akselerasjon rettet inn mot rotasjonsaksen, dvs. sentripetalakselerasjon, partiklene er hele tiden konvektivt akselerert inn mot rotasjonsaksen

$$\mathbf{a}_p = \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_p(t)} = \left(\omega \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\omega R \mathbf{i}_\theta) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_p(t)} = -\omega^2 R \mathbf{i}_R|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_p(t)} = -\omega^2 R \mathbf{i}_R(\mathbf{r}_p(t))$$

Partikkelakselerasjonen er altså rent konvektiv. Skrevet uten index p for partikkel har vi

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \left(\omega \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\omega R \mathbf{i}_\theta) = -\omega^2 R \mathbf{i}_R$$

Litt om dyadiske produkter

Vi skal notere dyadisk produkt mellom vektorer uten noe symbol $\mathbf{ab}$. Andre bruker notasjonen $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ som i praksis betyr det samme.

Et dyadisk produkt mellom to vektorer er enkelt i den forstand at det ikke medfører noen vektoroperasjon. Dersom α og β og γ er skalarer, og $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ er vektorer, så har vi for eksempel $(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b})(\gamma \mathbf{c}) = \alpha \gamma \mathbf{ac} + \beta \gamma \mathbf{bc}$.

Det dyadiske produktet kommuterer ikke $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$. Uttrykk med både skalarprodukt og dyadisk produkt kan regnes ut i hvilken som helst rekkefølge $\mathbf{a} \cdot \mathbf{bc} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{bc})$. I praksis sparer man en betydelig regne-innsats, både for hånd og på datamaskin, dersom man utfører prikk-operasjonen først, derfor bør man foretrekke å regne ut dette uttrykket som $\mathbf{a} \cdot \mathbf{bc} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.

Uttrykket for den konvektivt deriverte av en vektor, $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F}$, kunne i prinsippet ha blitt skrevet uten parentes, $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{F}$, men kun dersom vi hadde vært enige om et par “konvensjoner” som kanskje kan oppfattes som naturlige: Prikken skal virke mellom de to vektorene som står nærmest prikken på hver side av prikken, og ∇ skal derivere mot høyre dersom ikke annet er oppgitt. Følgelig skal prikken virke mellom $\mathbf{v}$ og ∇ , og ∇ skal derivere $\mathbf{F}$. Regnestykket gir i så fall samme svar uavhengig av om vi utfører prikk eller dyadisk produkt først $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{F} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F} = \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{F})$. Her angir parentesens prioritet (hva som skal utføres først), mens ∇ uansett skal derivere $\mathbf{F}$. I praksis sparer man en betydelig regne-innsats, både for hånd og på datamaskin, dersom man utfører prikk-produktet først, derfor bør man foretrekke å regne ut den konvektivt deriverte som $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{F} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F}$.

Dessverre er fagfolk ikke enig om disse “konvensjonene”, på grunn av den måten matematikere liker å skrive Jacobi-matrisen som representasjon for det dyadiske produktet $\nabla \mathbf{F}$. Derfor anbefales det på det sterkeste å insistere på parentes rundt $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ for å unngå forvirring!

NB! Advarsel!
Det som står på denne siden er forvirrende!
Det er ikke nødvendig å lese denne siden!

Alternativ konvensjon for gradienten til en vektor

Alle er enige om at dersom $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er vektorer som ikke medfører derivasjon så kommer retningen til $\mathbf{a}$ før retningen til $\mathbf{b}$ i produktet $\mathbf{ab}$.

Dersom vi bytter ut $\mathbf{a}$ med ∇ , som er både en vektor og en derivasjonsoperator, så er det noen som hevder at ettersom ∇ er en operator så skal retningen til ∇ komme etter retningen til $\mathbf{b}$ i uttrykket $\nabla\mathbf{b}$.

Dersom denne alternative konvensjonen benyttes, så må uttrykket for den partikkelderiverte av en vektor-egenskap skrives enten

$$\frac{D\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{F}$$

eller

$$\frac{D\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t} + (\nabla\mathbf{F}) \cdot \mathbf{v}$$

Uansett skal prikken virke mellom ∇ og $\mathbf{v}$, mens ∇ skal derivere $\mathbf{F}$.

Vi innser nå at det er to gode grunner til å sette parentes rundt prikk-produktet $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$. Da forsvinner nemlig forskjellen mellom disse to konvensjonene, i tillegg til at man sparer en betydelig regne-innsats både for hånd og på datamaskin.

Vi innser nå at vi alltid må sjekke hvilken konvensjon en tekst forholder seg til:

Lærebøkene til Vilhelm Bjerknes [1] og Matthews [5] og Gjevik & Fagerland [2] og store deler av ingeniør-rettet litteratur innen fluidmekanikk bruker ikke det som her kalles “alternativ” konvensjon.

Læreboka til Lindstrøm & Hveberg [3] som brukes i MAT1110 skriver Jacobi-matriser (matriser som svarer til gradienten til en vektor) på en måte som ser ut som den alternative konvensjonen. De bruker imidlertid ikke ∇ -symbolet for å operere på vektorfunksjoner, de anvender ∇ kun på skalarfunksjoner, og de skriver notasjonen $\mathbf{F}'(\mathbf{r})$ for Jacobi-matrisen som svarer til gradienten til en vektor. Med denne matrisenotasjonen kan den partikkelderiverte av en vektor $\mathbf{F}$ skrives

$$\frac{D\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t} + \mathbf{F}'\mathbf{v}$$

hvor både $\mathbf{F}$ og $\mathbf{v}$ er søylevektorer, og hvor $\mathbf{F}'$ er en Jacobi-matrise, og hvor operasjonen som skal gjøres mellom $\mathbf{F}'$ og $\mathbf{v}$ er en matrisemultiplikasjon, dvs. en prikk-operasjon. De skriver altså prikk for skalarprodukt mellom to vektorer, men ikke noe symbol for det som i praksis er en prikk-operasjon mellom en dyade og en vektor.

12.2 Bevaringslover, kontrollvolumer, kontrollflater og kontrollkurver

I det følgende skal vi utlede diverse bevaringslover. De tjener til å holde regnskap med hvor mye vi har av “noe” innenfor et kontrollvolum. Dersom det er en endring i mengden av dette “noe” innenfor kontrollvolumet så må det enten skyldes at det er en netto integrert fluks gjennom veggene til kontrollvolumet, eller det må skyldes at “noe” skapes eller tilintetgjøres innenfor kontrollvolumet.

Det er grunnleggende forskjellige typer kontrollvolum som vi kan benytte:

1. Et fastholdt endelig volum.
2. En fluid partikkel som er en infinitesimal materiell partikkel som forflytter seg med fluidet.
3. Et bevegelig endelig volum som både kan deformeres og som kan bevege seg uavhengig av fluidet.

I MEK1100 skal vi kun bruke de to første typene kontrollvolum. For den tredje typen kontrollvolum trenger vi Reynolds transport-teorem som hører til i videregående MEK-emner.

Tilsvarende er det grunnleggende forskjellige typer kontrollkurver som vi kan benytte:

1. En fastholdt kurve.
2. En materiell kurve som hele tiden består av de samme fluidpartiklene og som forflytter seg med fluidet.

Vi skal bruke en materiell kurve som forflytter seg med fluidet når vi utleder Kelvins teorem.

12.3 Bevaring av masse: Kontinuitetslikninga

Betingelsen for at masse er bevart kalles kontinuitetslikninga.

Anta vi har et fluid med massetetthet $\rho(\mathbf{r}, t)$ og at fluidet beveger seg med hastighet $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

I dette tilfellet skal vi betrakte et fastholdt endelig kontrollvolum V avgrenset av en lukket flate S . Vi stiller to krav til vårt kontrollvolum, det skal være *fastholdt* og det skal være *vilkårlig*. At kontrollvolumet er vilkårlig betyr at resultatene i det følgende gjelder uansett hvilken form eller størrelse kontrollvolumet har.

Den totale massen innenfor V er

$$M(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) d\tau$$

Flukstettheten av masse er gitt ved $\rho\mathbf{v}$. Den integrerte fluksen ut gjennom den lukkede flaten S er

$$Q(t) = \int_S \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

hvor vi holder oss til konvensjonen at enhetsnormalvektoren $\mathbf{n}$ peker ut av kontrollvolumet.

Dersom det ikke skapes eller tilintetgjøres masse innenfor kontrollvolumet så må

$$\frac{dM}{dt} + Q = 0$$

Dette er kontinuitetslikninga på integrert form.

Vi kan ta den tidsderivate av massen inn under integraltegnet, da blir den til en partiellderivert. Ettersom kontrollvolumet er fastholdt er det ikke bidrag fra den tidsderivate av formen til kontrollvolumet

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

Vi kan benytte Gauss sats for å omgjøre fluksintegralet til et volumintegral

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d\tau = 0$$

Ettersom kontrollvolumet er vilkårlig kan ikke verdien til dette integralet avhenge av formen eller størrelsen til kontrollvolumet, følgelig må integranden være lik null

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Dette er kontinuitetslikninga på lokal eller differensial form.

Alternative former for kontinuitetslikninga

Dersom vi skriver ut divergensleddet får vi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Dersom vi føyer sammen de to første leddene i likninga ovenfor kjenner vi igjen den partikkelderivate

$$\frac{D\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Spesialtilfelle: Homogen tetthet

Dersom tettheten er lik overalt, $\nabla \rho = \mathbf{0}$, sies den å være *homogen*. I så fall reduserer kontinuitetslikninga seg til

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Spesialtilfelle: Stasjonær tetthet

Dersom tettheten ikke endrer seg i tid, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, sies den å være *stasjonær*. I så fall reduserer kontinuitetslikninga seg til at masseflukstettheten er divergensfri

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Spesialtilfelle: Konstant tetthet

Dersom tettheten er både homogen og stasjonær sier vi at den er *konstant*. I så fall må hastigheten være divergensfri og fluidet er inkompressibelt

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Spesialtilfelle: Inkompressibelt fluid

Dersom fluidet er inkompressibelt, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, så er den partikkelderiverte av tettheten lik null

$$\frac{D\rho}{dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0$$

NB! Dette betyr ikke at tettheten er konstant, men at tettheten til hver fluidpartikkel er bevart.

Forskjellen på væske og gass

Husk at innen kategorien “fluid” har vi underkategoriene “væske” og “gass”. Hovedforskjellen mellom væske og gass er at ei væske er i praksis inkompressibel $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ mens en gass lett lar seg komprimere eller utvide $\nabla \cdot \mathbf{v} \neq 0$.

Eksempel: Vann strømmer gjennom en trakt

Vann er ei væske, så vi kan starte med kontinuitetslikninga for inkompressibelt fluid, nemlig at hastigheten er divergensfri

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Denne kan vi integrere over et kontrollvolum V som er avgrenset av veggene i trakten S_T , et tverrsnitt S_A hvor vannet strømmer inn i trakten med fart v_A , og et tverrsnitt S_B hvor vannet strømmer ut av trakten med fart v_B . La oss anta at strømningshastigheten er vinkelrett på tverrsnittene A og B. Vi innser at det ikke er strømning gjennom traktveggen S_T . Med Gauss sats har vi

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\tau = \left(\int_{S_T} + \int_{S_A} + \int_{S_B} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = - \int_{S_A} v_A \, d\sigma + \int_{S_B} v_B \, d\sigma = 0$$

Dersom vi i tillegg antar at farten er konstant i hvert tverrsnitt så kan vi uttrykke resultatet ved arealene A og B

$$v_A A = v_B B$$

Følgelig ser vi at farten er størst i tverrsnittet som er minst.

Eksempel: Biltrafikk

Biltrafikk langs vei er et glimrende eksempel for å få innsikt i løsningene til kontinuitetslikninga. Vi ser for oss en motorvei eller landevei med én eller flere parallelle felt, “tverrsnittet” S er antall felt, “volumet” V er strekning ganger antall felt, “tettheten” er antall biler per volum. Trafikken er inkompressibel dersom avstanden til forankjørende alltid er den samme.

Vanligvis kan biltrafikk lett komprimeres, den oppfører seg da som en “gass”. Dersom bilene holder konstant avstand, for eksempel i tett trafikk med kø, vil trafikken oppføre seg som en “væske”.

En person som sitter i en bil kan uttale seg om trafikken er inkompressibel ved å sjekke om avstanden til forankjørende er konstant. En person som står stille ved siden av veien kan uttale seg om trafikken er stasjonær ved å sjekke om trafikken endrer seg i tid. Personer på en nærliggende bakketopp kan uttale seg om trafikken er homogen og/eller stasjonær ved å sjekke om trafikken ser lik ut overalt og/eller om den endrer seg i tid.

Eksempel: Inkompressibel trafikk går fra trefelts vei til ettfelts vei

Vi integrerer $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ over et kontrollvolum, og får at $v_A n_A = v_B n_B$ for to snitt S_A og S_B med henholdsvis n_A og n_B felt. Dersom vi har $n_A = 3$ og $n_B = 1$ så vil $v_B = 3v_A$. Trafikken vil altså gå mye fortere straks man kommer ut fra flerfelts vei og inn på ettfelts vei.

Dette er typisk oppførsel dersom man skal kjøre fra en tettpakket flerfeltsvei ut på en like tettpakket ettfeltsvei. Vi har at $v_A A = v_B B$ for to snitt S_A og S_B med henholdsvis A og B felt. Dersom vi har $A = 3$ og $B = 1$ så vil $v_B = 3v_A$, trafikken vil gå betydelig fortere straks man kommer ut fra flerfelts vei og inn på ettfelts vei.

Dette er typisk oppførsel dersom man skal kjøre ut fra en stor parkeringsplass og ut på en landevei.

Eksempel: Kompressibel trafikk med stasjonær biltetthet

Stasjonær biltetthet, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, betyr at biltettheten ikke endrer seg i tid på ethvert fastholdt sted. Kontinuitetslikninga sier i så fall at bilflukstettheten er divergensfri $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$. Dersom denne integreres over et kontrollvolum får vi at $\rho_A v_A n_A = \rho_B v_B n_B$ for to snitt S_A og S_B .

La oss nå anta at trafikken holder fartsgrensene 100 km/h på trefelts motorvei $n_A = 3$, og 80 km/h på ettfelts landevei $n_B = 1$. I så fall har vi en relasjon for tetthetene $300\rho_A = 80\rho_B$.

Dette er typisk oppførsel for trafikk som holder fartsgrensen i overgangen mellom flerfelts og ettfelts vei. Det er i så fall god plass mellom bilene på motorveien og tettere trafikk på landeveien.

12.4 Bevaring av bevegelsesmengde: Eulers likning

Bevaring av bevegelsesmengde — Newtons andre lov

Newtons andre lov sier at et legeme med masse m som blir påvirket av en total kraft $\mathbf{F}$ vil få en akselerasjon $\mathbf{a}$ i henhold til likninga

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (12.1)$$

Vi skal se hvordan denne likninga kan omformuleres for anvendelse på et fluid.

Eulers likning — bevaring av bevegelsesmengde for ideelt fluid

I virkeligheten er friksjon på grunn av viskositet viktig for bevegelsen til et fluid. I det følgende skal vi se bort fra viskositet og friksjon. Da sier vi at fluidet er *ideelt*. Likninga vi da ender opp med kalles Eulers likning.

Dersom vi hadde tatt med viskositet og friksjon hadde vi endt opp med Navier–Stokes likning. Navier–Stokes likning utledes i emnet MEK2200 og brukes i emnet MEK3230.

I det følgende begrenser vi oss til to typer krefter: trykkraft og tyngdekraft.

Newton's andre lov anvendt på fluidpartikkel

I det følgende skal vi betrakte et kontrollvolum som er en fluidpartikkel. Dette er et infinitesimalt materielt kontrollvolum som beveger seg med fluidet.

La fluidpartikkelen ha masse m , volum V og være avgrenset av overflate S . Partikkelen har tetthet $\rho_p = \frac{m}{V}$, posisjon $\mathbf{r}_p$, hastighet $\mathbf{v}_p$ og akselerasjon $\mathbf{a}_p$.

Fluidpartikkelen er del av et kontinuerlig medium med massetetthet $\rho(\mathbf{r}, t)$ og hastighet $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. I så fall har vi $\rho_p = \rho(\mathbf{r}_p, t)$ og $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}(\mathbf{r}_p, t)$, og vi har relasjonen mellom partikkelakselerasjon og fluidhastighet $\mathbf{a}_p = \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$.

Summen av alle krefter som virker på fluidpartikkelen er gitt ved trykkraft og tyngdekraft

$$\mathbf{F} = - \int_S p \mathbf{n} d\sigma + m \mathbf{g}$$

Dersom vi starter med Newtons andre lov (12.1)

$$m \mathbf{a}_p = - \int_S p \mathbf{n} d\sigma + m \mathbf{g}$$

og benytter uttrykket for partikkelderivert på venstre side, og benytter Gauss sats på høyre side, så får vi

$$m \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = - \int_V \nabla p d\tau + m \mathbf{g}$$

Dersom vi nå husker at fluidpartikkelen er infinitesimal, så innser vi at integranden i volumintegralet er i praksis konstant over volumet V , så volumintegralet er lik integranden multiplisert med volumet V . Vi deler på m og bruker at $\rho = \frac{m}{V}$ og får Eulers likning

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}$$

Likningssystemet så langt

Så langt har vi kontinuitetslikninga som ei skalar likning, og Eulers likning som er ei vektor likning med tre komponenter, det gir tilsammen fire skalare likninger.

De ukjente er de to skalarene trykk og tetthet, og hastigheten som har tre komponenter. Det er tilsammen fem skalare ukjente.

Vi mangler ei likning. Den manglende likninga kalles gjerne for tilstandslikninga til fluidet. Denne likninga får vi generelt fra fagområdene termodynamikk eller statistisk fysikk. Vi skal ikke diskutere generelle tilstandslikninger her. Vi skal heller avgrense oss til spesielle tilfeller som for eksempel å kreve at fluidet er inkompressibelt eller at tettheten er konstant eller at hastighetsfeltet er kjent. Dermed avgrenser vi oss slik at vi har tilstrekkelig mange likninger.

Generelt er disse likningene vanskelige å løse for hånd. Vi skal her vise noen enkle eksempler for å finne trykket p dersom vi antar at tettheten ρ og hastigheten $\mathbf{v}$ er kjent.

Eksempel: Stillestående fluid $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, hydrostatisk trykk

Tettheten trenger ikke være konstant. Vi kan tillate at tettheten er funksjon av vertikal posisjon, $\rho(z)$, hvor z -aksen peker oppover. Typisk vil vi ha $\frac{\partial \rho}{\partial z} \leq 0$, fordi dersom tettheten øker oppover så vil fluidet være ustabilt og vil komme i bevegelse.

Et praktisk eksempel er at salt og kaldt vann er tungt og ligger nederst, mens ferskt og varmt vann er lett og ligger øverst.

Det er en fin øvelse å sjekke at kontinuitetslikninga er oppfylt.

Eulers likning reduserer seg til

$$\nabla p = \rho(z)\mathbf{g}$$

Ettersom vi antar at z -aksen peker oppover, så har vi $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$, og vi får på komponentform

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(z)g$$

De to første likningene sier at trykket ikke er funksjon av de horisontale koordinatene, mens den tredje likninga kan integreres opp og gir

$$p = - \int_{z_0}^z \rho(\xi)g d\xi + c$$

hvor z_0 er en referansehøyde og c er en vilkårlig konstant. Dette er formelen for hydrostatisk trykk for variabel tetthet.

Dersom tettheten er konstant har vi løsning

$$p = -\rho g(z - z_0) + c = -\rho g z + C$$

hvor C er en annen vilkårlig konstant. Dette er formelen for hydrostatisk trykk for konstant tetthet.

Eksempel: Typisk vindprofil over bakken: Skjærstrøm

Vind som blåser horisontalt over en horisontal bakke kan beskrives ved modellen

$$\mathbf{v} = v(z)\mathbf{i}$$

hvor det vil være naturlig å anta at $\frac{\partial v}{\partial z} > 0$ slik at det blåser fortere jo høyere opp over bakken vi kommer.

Tettheten trenger ikke være konstant, vi kan tillate at tettheten er funksjon av vertikal posisjon, $\rho(z)$.

Det er en fin øvelse å sjekke at kontinuitetslikninga er oppfylt.

Hastighetsfeltet er stasjonært, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$. For å finne den konvekitive akselerasjonen starter vi med $\mathbf{v} \cdot \nabla = v(z)\frac{\partial}{\partial x}$, og deretter $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = v(z)\frac{\partial v(z)}{\partial x}\mathbf{i} = \mathbf{0}$. Følgelig vet vi at vi har verken lokal eller konvektiv akselerasjon, og vi står igjen med kun to ledd i Eulers likning

$$\nabla p = \rho(z)\mathbf{g}$$

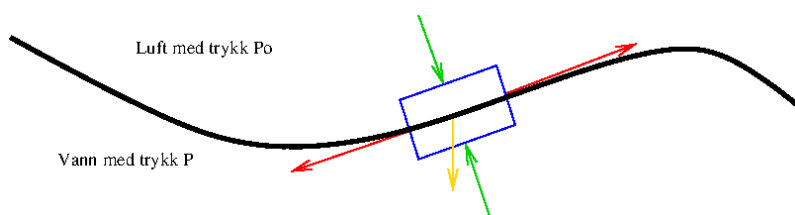
Dette er nøyaktig samme likning som vi hadde for stillestående fluid, og vi innser derfor at trykket er hydrostatisk.

Dette er kanskje et overraskende resultat: Vi kan ha hydrostatisk trykk i et fluid som på ingen måte står i ro!

12.5 Dynamisk grensebetingelse for trykk der hvor vann møter luft

I det følgende vil vi ha behov for å pålegge et dynamisk randkrav der hvor vann møter luft. At randkravet er dynamisk betyr at det er basert på en kraft-balanse.

Vi benytter et kontrollvolum som er en materiell fluidpartikkel på grenseflaten, med form av en rektangulær boks som vi lar strekke seg langs grenseflaten slik at den ene siden av kontrollvolumet er i luft og den andre siden er i vann. Se figuren hvor grenseflaten er markert i sort og kontrollvolumet er markert i blått. Tyngdekrafta $\mathbf{F}_g$ på kontrollvolumet er markert i gult. Trykkreftene $\mathbf{F}_{\text{luft}}$ fra luft og $\mathbf{F}_{\text{vann}}$ fra vann er markert i grønt. Krefter som skyldes overflatespenning, $\mathbf{F}_S$, som virker tangentielt til grenseflaten, er markert i rødt.



Overflatespenning bidrar blant annet til at [insekter kan gå på vannoverflaten](#). Vi skal ikke diskutere overflatespenning i MEK1100, dette kommer i senere MEK-emner.

La de to sidene med grønn kraftvektor ha areal A . La enhetsnormalvektoren $\mathbf{n}$ til grenseflaten peke fra vann mot luft. La trykket i lufta være p_0 og trykket i vannet være p . Den totale trykkkrafta på kontrollvolumet vil være $\mathbf{F}_p = (p - p_0)A\mathbf{n}$. Fluidet inni kontrollvolumet har masse m som blir trukket nedover av tyngdekrafta $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$. Den totale krafta på kontrollvolumet blir $\mathbf{F} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_g$.

Newtons andre lov kommer til anvendelse for kontrollvolumet fordi det er materielt. Newtons andre lov for kontrollvolumet sier at $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ hvor $\mathbf{a}$ er akselerasjonen til kontrollvolumet. Dersom vi ser bort fra overflatespenning, $\mathbf{F}_S = \mathbf{0}$, står vi igjen med

$$m\mathbf{a} = (p - p_0)A\mathbf{n} + m\mathbf{g}$$

Dersom vi nå lar tykkelsen på kontrollvolumet gå mot null, slik at massen går mot null, samtidig som vi insisterer på at kontrollvolumet ikke skal ha uendelig akselerasjon, så innser vi at trykket må være kontinuerlig på grenseflaten mellom vann og luft:

$$p = p_0 \quad \text{der hvor vann møter luft}$$

Dersom lufttrykket er konstant p_0 så må trykket i vannet være konstant $p = p_0$ på den frie overflaten.

NB! Dersom vi hadde tatt hensyn til overflatespenning ville vi fått en trykkforskjell mellom vann og luft avhengig av krumningen til overflaten. Dette kommer altså i senere MEK-emner.

Eksempel: Hydrostatisk trykk med fri overflate

Vi så tidligere, på side 147, at formelen for hydrostatisk trykk med variabel tetthet er

$$p(z) = - \int_{z_0}^z \rho(\xi) g d\xi + c$$

hvor z_0 er en referansehøyde og c er en konstant. Dersom dette er trykket i ei væske som er i kontakt med luft som har konstant trykk p_0 over en fri overflate $z = \eta(x, t)$ så kan vi sette inn i det dynamiske randkravet ved den frie overflaten, $p = p_0$ ved $z = \eta(x, y)$,

$$p_0 = - \int_{z_0}^{\eta(x, y)} \rho(\xi) g d\xi + c$$

Det burde nå være opplagt at η må være konstant, og vi kan like godt sette referansehøyden z_0 lik denne konstante verdien. I så fall er $c = p_0$ og vi får det hydrostatiske trykket

$$p = p_0 - \int_{\eta}^z \rho(\xi) g d\xi \quad \text{for væska med fri overflate i } z = \eta$$

Dersom tettheten er konstant har vi løsning

$$p = p_0 - \rho g(z - \eta) \quad \text{for væska med fri overflate i } z = \eta$$

Legg merke til at vi nå har forklart hvorfor den frie overflaten til stillestående vann er en flat horisontal flate!

Eksempel: Vann roterer som stivt legeme med fri overflate

Dette eksemplet svarer til vår dagligdagse erfaring med å røre rundt i en kopp med vann eller te.

Vi bruker polare koordinater $\{R, \theta, z\}$ med z -aksen vertikalt opp i sentrum av koppen og med R som radiell avstand fra z -aksen. Posisjonsvektor er $\mathbf{r} = R\mathbf{i}_R + z\mathbf{i}_z$.

La vinkelhastigheten til rotasjonsbevegelsen være $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{i}_z$. Hastighetsfeltet er

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega R\mathbf{i}_\theta.$$

Vi lar tettheten ρ være konstant. Det er en fin øvelse å vise at kontinuitetslikninga er oppfylt fordi hastighetsfeltet er divergensfritt.

Hastighetsfeltet er stasjonært, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$. For å finne den konvektive akselerasjonen starter vi med $\mathbf{v} \cdot \nabla = \omega R \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} = \omega \frac{\partial}{\partial \theta}$, og deretter $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \omega \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega R\mathbf{i}_\theta) = -\omega^2 R\mathbf{i}_R$. Dette er en sentripetal akselerasjon, akselerasjon inn mot sentrum i en sirkel. For å bevege seg med konstant fart rundt en sirkel må man altså akselereres inn mot sentrum.

Eulers likning blir på vektor form

$$-\omega^2 R\mathbf{i}_R = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g\mathbf{k}$$

På komponent form (i radiell, asimutal og vertikal retning) får vi tre likninger for å bestemme trykket

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \rho \omega^2 R$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

og vi finner trykket

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2 - \rho g z + c$$

hvor c er en vilkårlig konstant.

Vi kan bestemme konstanten c ved å sette inn i det dynamiske overflatekravet: Vannet i koppen har en fri overflate i kontakt med luft ved høyden $z = \eta(R, \theta)$. På den frie overflaten må trykket i vannet være lik det konstante lufttrykket p_0 . Vi setter dette inn i trykklikninga ovenfor og får

$$p_0 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2 - \rho g \eta(R, \theta) + c$$

Det første vi legger merke til er at den frie overflaten ikke kan være en funksjon av vinkelen θ , den frie overflaten er altså $z = \eta(R)$.

Formen til den frie overflaten er en rotasjonsparaboloide

$$\eta(R) = \frac{1}{\rho g} \left(\frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2 - p_0 + c \right)$$

Dersom vi nå, for eksempel, bestemmer at den frie overflaten i sentrum er $\eta(0) = 0$, så må $c = p_0$, og vi finner

$$\eta(R) = \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

Fysisk forklaring

Forklaringen på hvorfor det blir fordypning i vannoverflaten når man rører rundt vannet i en kopp er følgende: For at vannet skal bevege seg i sirkelbane må vannet ha en sentripetal akselerasjon, altså akselerasjon inn mot sentrum i sirkelen. Sentripetal akselerasjonen forårsakes av trykkgradienten ∇p i vannet. Trykket i vannet må altså avta inn mot rotasjonsaksen. Dersom trykket i vannet blir mindre enn trykket i lufta, så vil lufta skyve bort vannet. Jo nærmere rotasjonsaksen vi kommer, jo mer klarer lufta å skyve bort vannet. Følgelig danner det seg en fordypning i vannoverflaten midt i koppen.

Eksempel: Mer generell rotasjon

Vi bruker polare koordinater og antar et hastighetsfelt på følgende form

$$\mathbf{v} = \alpha R^n \mathbf{i}_\theta$$

hvor eksponenten n kan være hva som helst. Rotasjon som fast legeme svarer til $n = 1$.

NB! Konstanten α har fysisk enhet som avhenger av potensen n . Det er en fin øvelse å bestemme den fysiske dimensjonen til α .

Først legger vi merke til at hastighetsfeltet er stasjonært, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$. For å finne den konvektivt deriverte starter vi med $\mathbf{v} \cdot \nabla = \alpha R^n \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} = \alpha R^{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta}$, og har deretter $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \alpha R^{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta} (\alpha R^n \mathbf{i}_\theta) = -\alpha^2 R^{2n-1} \mathbf{i}_r$. Eulers likning blir på vektor form

$$-\alpha^2 R^{2n-1} \mathbf{i}_r = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \mathbf{k}$$

Dette gir oss tre komponent likninger for å bestemme trykket

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \rho \alpha^2 R^{2n-1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

og vi finner trykket for $n \neq 0$

$$p = p_0 - \rho g z + \frac{1}{2n} \rho \alpha^2 R^{2n}$$

og for $n = 0$

$$p = p_0 - \rho g z + \rho \alpha^2 \ln R$$

Eksempel: Enda mer generell rotasjonsbevegelse i vann

La oss se på en enda mer generell roterende bevegelse

$$\mathbf{v} = v(R) \mathbf{i}_\theta$$

Vi lar altså hastigheten kun være rettet i asimutalretning $\mathbf{i}_\theta$, og vi krever at farten kun er en funksjon av radius R .

Det er en fin øvelse å sjekke at kontinuitetslikninga er tilfredstilt.

La oss finne partikkelakselerasjonen. Først legger vi merke til at hastighetsfeltet er stasjonært, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$. For å finne den konvektivt deriverte av hastigheten starter vi med

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{v(R)}{R} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

og har deretter

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{v(R)}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v(R)}{R} \mathbf{i}_\theta \right) = -\frac{v^2(R)}{R} \mathbf{i}_r$$

Eulers likning blir

$$-\frac{v^2(R)}{R} \mathbf{i}_r = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \mathbf{k}$$

Dette gir oss tre likninger, i $\{R, \theta, z\}$ -retning, for å bestemme trykket

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \rho \frac{v^2(R)}{R}, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

som gir

$$p = \rho \int_0^R \frac{v^2(\xi)}{\xi} d\xi - \rho g z + c$$

hvor c er en vilkårlig konstant.

Eksempel: Fri overflate for roterende vann

Dersom vi setter inn i grensebetingelsen for trykk der hvor vann møter luft, $p = p_0$ ved $z = \eta(R, \theta)$, får vi

$$p_0 = \rho \int_0^R \frac{v^2(\xi)}{\xi} d\xi - \rho g \eta(R, \theta) + c$$

Vi innser at den frie overflaten må være uavhengig av vinkelen θ . Den frie overflaten må være $z = \eta(R)$ gitt ved

$$\eta(R) = \int_0^R \frac{v^2(\xi)}{g\xi} d\xi + \frac{c - p_0}{\rho g}$$

Det er gøy å finne ut hvordan overflaten ser ut for noen utvalgte hastighetsfelt. Vi kan se på en én-parameter familie av hastighetsfelt

$$\mathbf{v} = \omega R_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^n \mathbf{i}_\theta$$

hvor $0 \leq R \leq R_0$ hvor R_0 er radius til den sylinderformede beholdren. Farten er proporsjonal med radius R opphøyet i n -te potens. Husk at rotasjon som stivt legeme svarer til $n = 1$.

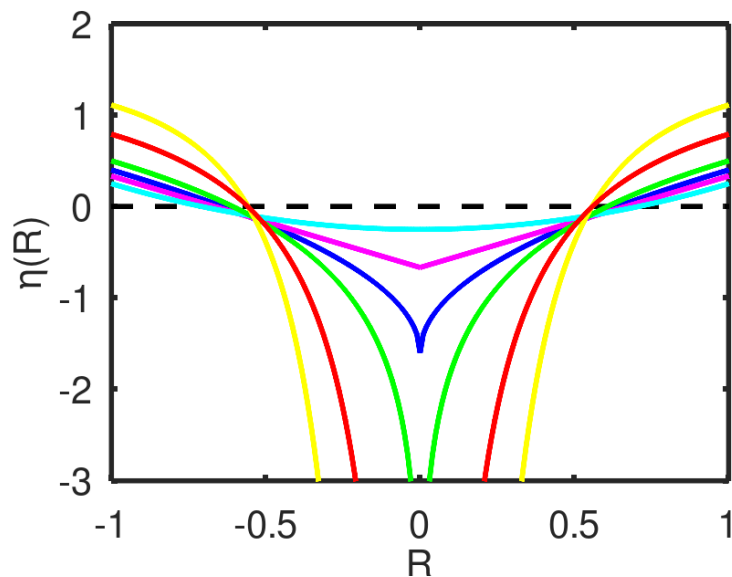
Vi finner den frie overflaten

$$z = \eta(R) = \begin{cases} \frac{\omega^2 R_0^2}{2ng} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{2n} + c_n & \text{for } n \neq 0 \\ \frac{\omega^2 R_0^2}{g} \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) + c_n & \text{for } n = 0 \end{cases}$$

hvor c_n er konstanter som kan være forskjellige for hver n .

Det kan være naturlig å bestemme konstantene c_n ut fra kravet $\int_0^{R_0} \eta(R) R dR =$ konstant dersom det totale volumet av vann i beholderen hele tiden er det samme.

I figuren nedenfor har vi tegnet opp $\eta(R)$ for $n = 1$ (cyan), $n = 0.5$ (magenta), $n = 0.25$ (blå), $n = 0$ (grønn), $n = -0.5$ (rød) og $n = -1$ (gul), mens den svarte stiplede streken er horisontal og tilsvarende at vannet står i ro:



I figuren har vi vist overflaten for både positive og negative R , det er egentlig feil fordi den radiale sylinderkoordinaten er ikke-negativ. Dog er overflaten symmetrisk rundt rotasjonsaksen $R = 0$, så illustrasjonen er representativ for et tverrsnitt gjennom rotasjonsaksen.

Legg merke til at for $n > 0.5$ krummer overflaten oppover og for $n < 0.5$ krummer overflaten nedover. Legg også merke til at for $n > 0$ er overflaten ikke singulær i $R = 0$, mens for $n \leq 0$ er overflaten singulær i $R = 0$.

Ut fra vår dagligdagse erfaring kan det se ut som om $n > 0.5$ kan passe når vi rører rundt i en kopp med vann, mens $n < 0.5$ kan passe når vi trekker ut proppen i en vask etter å ha rørt rundt i vannet?

12.6 Bernoullis likning for stasjonær strøm

I litteraturen snakker man om to forskjellige likninger som begge kalles Bernoullis likning og som begge utledes som spesialtilfeller av Eulers likning. Begge Bernoullis likninger er skalare likninger og er derfor ofte enklere å jobbe med enn Eulers likning som er en vektor likning.

Her skal vi utlede kun den ene av Bernoullis likninger, for stasjonær strømning $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$ som ikke trenger å være virvelfri. I videregående MEK-emner utledes den andre av Bernoullis likning for potensialstrøm $\mathbf{v} = \nabla \phi$ som ikke trenger å være stasjonær.³

Det er særdeles viktig å ha klart for seg antakelsene som gjøres og betingelsene for å anvende Bernoullis likning. Våre antakelser skal være stasjonær strøm, ideelt fluid og konstant tetthet, men ikke virvelfri strøm.

³Noen forfattere, f.eks. Matthews [5] og Gjevik & Fagerland [2], omtaler kun den stasjonære likninga som “Bernoullis likning”, og sier for eksempel “Eulers trykklikning” for å angi den andre likninga. Andre forfattere kaller derimot begge likningene for “Bernoullis likning”.

Vi starter med Eulers likning

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}$$

Vi antar at hastighetsfeltet er stasjonært, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$.

Vi skal nå forsøke å skrive om så mye som mulig av denne vektorlikninga som en gradient, for derved å kunne integrere den opp til en skalarlikning:

Leddene med tyngdens akselerasjon kan skrives $\mathbf{g} = -\nabla(gz)$ dersom vi antar at z -aksen peker oppover.

Vi antar at tettheten er konstant slik at vi kan skrive $\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right)$.

Det konvektivt akselererte leddet kan vi skrive om ved hjelp av følgende identiteter (pil peker ned på det som ∇ -operatoren skal derivere):

$$(\nabla \times \downarrow \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla \downarrow \mathbf{v} - \nabla \downarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

$$\nabla(\overbrace{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}^{\downarrow}) = \nabla \downarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v} \cdot \downarrow \mathbf{v} = \nabla \downarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \nabla \downarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 2 \nabla \downarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

og følgelig

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{c} \times \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

hvor vi har introdusert $\mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{v}$ for virvlinga til $\mathbf{v}$.

Nå kan vi samle alle gradient-ledd under et felles gradient-symbol

$$\mathbf{c} \times \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) = \mathbf{0}$$

Vårt mål er nå å kvitte oss med det ene leddet som ikke er en gradient. Dette kan vi gjøre ved å prikke med et infinitesimale kurveelement $d\mathbf{r}$ langs en strømlinje. Husk at strømlinjer er definert ved likninga $\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Vi får

$$d\mathbf{r} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{v} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{v} \times d\mathbf{r} = 0$$

Vi står igjen med

$$d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathcal{B} = d\mathcal{B} = 0$$

hvor

$$\mathcal{B} = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz$$

og følgelig har vi Bernoullis likning

$$\mathcal{B} = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{konstant langs en strømlinje}$$

Dersom hastighetsfeltet er virvelfritt, $\mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, er det ikke nødvendig at kurveelementet $d\mathbf{r}$ går langs en strømlinje, og vi får at uttrykket for $\mathcal{B}$ er lik den samme konstanten overalt, også på tvers av strømlinjer

$$\mathcal{B} = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{konstant}$$

Dersom hastighetsfeltet har virvling, $\mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, vil konstanten mest sannsynlig være forskjellig fra én strømlinje til en annen. Utfordringen med Bernoullis likning er i så fall at den ikke forteller oss hvordan konstanten endrer seg fra én strømlinje til en annen. Dette er det viktig å være klar over så vi ikke bruker Bernoullis likning i utide.

La oss til slutt oppsummere betingelsene for Bernoullis likning:

1. Ideelt fluid — ingen friksjon (ingen viskositet)
2. Stasjonært hastighetsfelt
3. Konstant tetthet

Eksempel: Stillestående fluid $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

For stillestående fluid har vi at virvlinga er null, og konstanten er den samme på tvers av strømlinjer. Bernoullis likning reduserer seg til den hydrostatiske trykkformelen

$$p = -\rho g z + c$$

hvor c er en vilkårlig konstant.

Eksempel: Typisk vindprofil over bakken: Skjærstrøm

Vind som blåser horisontalt over en horisontal bakke kan beskrives ved modellen

$$\mathbf{v} = v(z)\mathbf{i}$$

I dette tilfellet har hastighetsfeltet virvling, $\nabla \times \mathbf{v} = \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{j}$, og vi må derfor ta hensyn til at Bernoullis likning har forskjellig verdi for konstanten langs forskjellige strømlinjer. Strømlinjene er i dette tilfellet rette horisontale linjer. Bernoullis likning forteller oss derfor kun at trykket er konstant i en gitt høyde over bakken. Dette er ikke et spennende resultat!

Fra tidligere vet vi at trykket i dette tilfellet er hydrostatisk, men Bernoullis likning er ikke i stand til å fortelle oss det!

Eksempel: Vann roterer som stivt legeme og har fri overflate

Anta vi rører rundt i en kopp slik at vannet beveger seg som et stivt legeme

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega R \mathbf{i}_\theta$$

Bernoullis likning sier nå at

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\omega^2 R^2}{2} + g z = \text{konstant} \dots$$

La oss sette dette inn i overflatekravet $p = p_0$ ved $z = \eta(R)$. Vi får da

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{\omega^2 R^2}{2} + g \eta(R) = \text{konstant} \dots$$

og vi finner derfor

$$\eta(R) = -\frac{\omega^2 R^2}{2g} - \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\text{konstant} \dots}{g}$$

Dersom vi ser tilbake på et tidligere eksempel så kan det nå se ut som om det kvadratiske leddet i R har feil fortegn? Dette leddet har imidlertid ikke feil fortegn! Og praktisk erfaring tilsier at det ikke blir en haug med vann i midten av en kopp når vi rører om!

I dette tilfellet har hastighetsfeltet virvling, $\nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$. Vi vet derfor at konstanten i Bernoullis likning kan ha forskjellig verdi langs forskjellige strømlinjer. Strømlinjene er sirkler i horisontale plan med sentrum i rotasjonsaksen, altså funksjon av R . Bernoullis likning sier derfor kun at trykket er konstant langs hver slik sirkel. Bernoullis likning forteller derfor kun at formen på den frie overflaten er en funksjon av radius R , men forteller ikke hvilken form overflaten har som funksjon av R . Dette er ikke et spennende resultat!

Bernoullis likning kan i dette tilfellet ikke fortelle oss hvilken form overflaten har!

Eksempel: En rotasjonsbevegelse i vann slik at Bernoullis likning kan fortelle oss formen til den frie overflaten

Vi har tidligere sett på en én-parameter familie av roterende hastighetsfelt

$$\mathbf{v} = \omega R_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^n \mathbf{i}_\theta$$

hvor farten er proporsjonal med radius R opphøyet i n -te potens. Rotasjon som stivt legeme svarer til $n = 1$.

Dersom dette hastighetsfeltet er virvelfritt for en spesiell verdi for n så kan Bernoullis likning fortelle oss hvilken form overflaten vil ha!

Det kan være spennende å undersøke om det finnes en verdi for n slik at dette hastighetsfeltet er virvelfritt, og i så fall finne hvilken form den frie overflaten har!

Vi regner ut virvlinga

$$\nabla \times (R^n \mathbf{i}_\theta) = (n+1)R^{n-1} \mathbf{k}$$

Hastighetsfeltet er virvelfritt dersom $n = -1$. Dette er den eneste potensen som tillater å bruke Bernoullis likning med felles konstant overalt. Hastighetsfeltet er da

$$\mathbf{v} = \frac{\omega R_0^2}{R} \mathbf{i}_\theta$$

og Bernoullis likning sier

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\omega^2 R_0^4}{2R^2} + gz = c$$

hvor c er samme konstant overalt. Vi kan løse for trykket

$$p = -\frac{\rho \omega^2 R_0^4}{2R^2} - \rho gz + \rho c$$

som er samme resultat som vi kunne ha funnet direkte fra Eulers likning.

Den frie overflaten $z = \eta(R)$ vil da ha formen

$$\eta(R) = \alpha - \frac{\omega^2 R_0^4}{2gR^2}$$

hvor α er en konstant.

Denne overflaten krummer ned og har en singularitet for $R = 0$.

12.6.1 Eksperiment “Torricelli”: Hvor fort renner vann ut av et kar?

Vi navngir eksperimentet til ære for Evangelista Torricelli (1608–1647) som oppdaget “Toricellis lov” i 1643. Toricelli var inspirert av Galileo Galilei (1564–1642), men levde for tidlig til å bli kjent med Newtons lover (Isaac Newton 1642–1726). Vi har sett at Eulers likning er en tilrettelegging av Newtons andre lov for anvendelse på et ideelt fluid (Leonhard Euler 1707–1783), og vi har sett at Bernoullis likning er en videre tilrettelegging av Eulers likning dersom visse betingelser er oppfylt (Daniel Bernoulli 1700–1782). Vi skal nå se at Toricellis lov følger fra Bernoullis likning, men husk at Toricellis lov ble oppdaget før både Newton, Euler og Bernoulli.

En analogi: Hvor fort faller en ball?

Først skal vi se på en analogi: Vi slipper en ball med masse m som holdes i ro i en høyde h over bakken. Ballen treffer bakken med en fart v . Dersom vi se bort fra friksjon i luft, og dersom vi i tillegg ser bort fra at ballens bevegelse vil sette lufta i bevegelse, så må den opprinnelige potensielle energien mgh være lik den kinetiske energien $\frac{1}{2}mv^2$ ved nedslag. I så fall er nedslagsfarten

$$v = \sqrt{2gh} \quad (12.2)$$

uavhengig av ballens masse.

Vann som renner ut av et åpent kar

Vårt kar er en vertikal sylinder med diameter $D = 17$ cm, åpent i toppen og lukket i bunnen. Gjennom bunnen er det et lite utløpshull med diameter $d = 1$ cm som vi kan åpne og lukke.

Den frie overflaten er i kontakt med luft i en høyde h over bunnen. Når vannet renner ut av utløpshullet kommer det umiddelbart i kontakt med luft. Følgelig vet vi at trykket i vannet, både øverst og nederst i vannsøylen, må være lik lufttrykket p_0 .

Overflaten synker med synkefart V , og vi innser at relasjonen mellom h og V er

$$V = -\frac{dh}{dt}. \quad (12.3)$$

(minustegn fordi V er en positiv fart og høyden h avtar).

Det kan innvendes at med en fri overflate som synker så har vi ikke stasjonære forhold, og derfor kan ikke Bernoullis likning brukes. Vi skal imidlertid anta at overflaten synker så langsomt at vi i praksis har stasjonære forhold. Vi skal snart se

at dette er en god tilnærming så lenge utløpshullet er lite i forhold til beholderens tverrsnitt.

Vi kan finne en relasjon mellom synkefarten V på overflaten og utløpsfarten v på bunnen ved hjelp av kontinuitetslikninga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (12.4)$$

Dersom tettheten ρ er konstant så faller de to første leddene bort og vi har divergensfri hastighet $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, dessuten vet vi at vann uansett er inkompressibelt så $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. La oss anta at hastigheten er konstant i tverrsnittet på overflaten, og konstant i tverrsnittet i utløpet. Vi integrerer over et kontrollvolum som inneholder alt vann i karet, og vi anvender Gauss sats, og vi får at den integrerte volumfluksen gjennom overflaten er lik den integrerte volumfluksen gjennom utløpshullet

$$V \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 = v \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2.$$

eller

$$v = V \left(\frac{D}{d} \right)^2. \quad (12.5)$$

La oss velge en strømlinje fra overflaten ved $z = h$ til utløpshullet $z = 0$. Husk at trykket i vannet er lik lufttrykket, $p = p_0$, på begge steder. Følgelig gir Bernoullis likning at

$$\frac{v^2}{2} = \frac{V^2}{2} + gh. \quad (12.6)$$

Dersom vi substituerer inn (12.5) får vi

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}} \approx \sqrt{2gh}. \quad (12.7)$$

Tilnærmingen er meget god for vårt eksperiment: Med $D = 17$ cm og $d = 1$ cm, $(d/D)^4 = 0.00001$, begår vi en feil i femte siffer!

Vi har nå utledet Toricellis lov $v = \sqrt{2gh}$. Det er egentlig ganske pussig at vi ender opp med samme uttrykk som fallfarten til en ball i likning (12.2)!

Dersom vi uttrykker Toricellis lov ved hjelp av synkefarten istedenfor utløpsfarten, og vi benytter relasjonen (12.3) til å eliminere V , ender vi opp med den separable differensiallikninga

$$-\frac{dh}{dt} \left(\frac{D}{d} \right)^2 = \sqrt{2gh}.$$

Akkurat denne likninga er brukt som eksempel på hvordan man kan løse separable differensiallikninger i Tom Lindstrøm sin bok "Kalkulus", eksempel seksjon 10.4.5 (forrige utgave). Det anbefales å lese den seksjonen for å se hvordan stoffet kan presenteres uten referanse til verken kontinuitetslikninga, Euler eller Bernoulli.

Dersom vi integrer fra tiden t_0 med høyde h_0 til tiden t med høyde h

$$\int_{h_0}^h \frac{dh'}{\sqrt{h'}} = - \int_{t_0}^t \sqrt{2g} \left(\frac{d}{D} \right)^2 dt'$$

får vi

$$2\left(\sqrt{h}-\sqrt{h_0}\right)=-\sqrt{2g}\left(\frac{d}{D}\right)^2\Delta t \quad (12.8)$$

eller

$$\sqrt{h}=\sqrt{h_0}-\sqrt{\frac{g}{2}}\left(\frac{d}{D}\right)^2\Delta t$$

eller

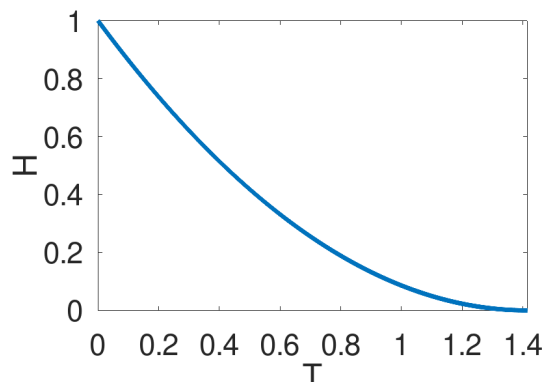
$$h=h_0-\sqrt{2gh_0}\left(\frac{d}{D}\right)^2\Delta t+\frac{g}{2}\left(\frac{d}{D}\right)^4(\Delta t)^2 \quad (12.9)$$

eller

$$\Delta h \equiv h_0-h=\sqrt{2gh_0}\left(\frac{d}{D}\right)^2\Delta t-\frac{g}{2}\left(\frac{d}{D}\right)^4(\Delta t)^2 \quad (12.10)$$

hvor $\Delta t \equiv t-t_0$.

Overflaten synker altså som en parabel med hensyn på tid



$$H=1-\sqrt{2}T+\frac{1}{2}T^2 \text{ hvor } T=\sqrt{\frac{g}{h_0}}\left(\frac{d}{D}\right)^2\Delta t \text{ og } H=\frac{h}{h_0}.$$

Vi kan derivere med hensyn på tid

$$V=-\frac{dh}{dt}=\sqrt{2gh_0}\left(\frac{d}{D}\right)^2-g\left(\frac{d}{D}\right)^4\Delta t \quad (12.11)$$

Overflatens synkefart avtar altså lineært.

Demonstrasjonsforsøk:

Målingene legges inn i et regneark som gjøres tilgjengelig. I regnearket er “beregning I” første ledd på høyre side av (12.10), “beregning II” er summen av begge ledd på høyre side av (12.10), “avvik” er relativ differanse mellom beregnet og målt Δh , positivt avvik betyr at det rant ut mindre vann enn teorien sier i løpet av gitt tidsrom.

Feilkilder

Det er i hovedsak tre feilkilder:

- Hastigheten er ikke stasjonær
- Hastigheten er ikke konstant i tverrsnittene

- Viskøs friksjon

Her skal vi kun estimere hvor stor feil vi gjør ved å anta at hastigheten er stasjonær:

Vi starter med Eulers likning

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \mathbf{k} \quad (12.12)$$

For å estimere hvor stor feil vi gjør ved å anta stasjonært hastighetsfelt må vi finne ut hvor stort leddet $\partial \mathbf{v} / \partial t$ er i forhold til de andre leddene. Det enkleste er å sammenlikne dette leddet med siste ledd på høyre side.

Fra likning (12.11) har vi at den tidsderiverte av synkefarten er

$$\left| \frac{dV}{dt} \right| = g \left(\frac{d}{D} \right)^4$$

og fra likning (12.5) har vi at den tidsderiverte av utløpsfarten er

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| = g \left(\frac{d}{D} \right)^2$$

og disse skal altså sammenliknes med siste ledd i (12.12), altså g .

Det er opplagt at utløpet er det mest sensitive stedet og feilen er av relativ orden $\left(\frac{d}{D}\right)^2$. For $D = 17$ cm og $d = 1$ cm er dette 0.0035 som betyr at feilen burde ligge på like under 1%. Dette kan sammenliknes med feilene vi finner i eksperimentet: Eksperimentet gir feil på rundt 2–4%.

Feilen målt i eksperimentet er positiv, det betyr at vannet renner ut langsommere enn vår teori sier. Dette kan kanskje skyldes at vi ikke har tatt hensyn til viskøs friksjon eller at hastigheten egentlig ikke er konstant i tverrsnittet ved utløpet.

Eksperiment Med rotasjon

Vi kan røre rundt i vannet før vi åpner utløpet. Hastighetsfeltet vil i så fall ha en asimutal komponent i tillegg til vertikal komponent $\mathbf{v} = v_z \mathbf{k} + v_\theta \mathbf{i}_\theta$. I tillegg vil det være en radiell komponent for å bringe vannet fra den vide seksjonen gjennom det trange utløpshullet.

Vil i så fall tanken tømmes forttere eller langsommere?

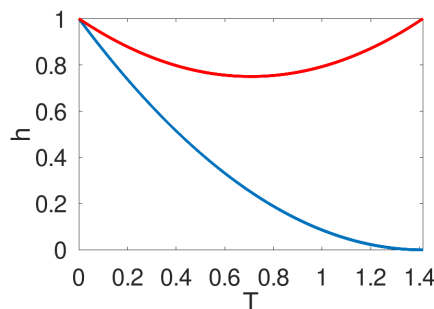
Resultatet fra eksperimentet med rotasjon tyder på at tanken tømmes mye langsommere!

Spørsmålet er nå om vi kan prøve å forstå dette. Egentlig er dette et ganske vanskelig problem, men vi kan gjøre noen sterkt forenklede røver-betraktninger for å antyde i hvilken retning det går: La oss anta vi kan betrakte den asimutale komponenten v_θ som en konstant og at hastigheten $\mathbf{v}$ er konstant i tverrsnittet!

Vi kan ganske lett vise at likning (12.9) da vil bli modifisert til

$$h = h_0 - \sqrt{2gh_0 - v_\theta^2} \left(\frac{d}{D} \right)^2 \Delta t + \frac{g}{2} \left(\frac{d}{D} \right)^4 (\Delta t)^2 \quad (12.13)$$

I figuren ser vi resultatet fra likning (12.9) i blått, og det ser ganske fornuftig ut.



I figuren ser vi også resultatet fra likning (12.13) i rødt. I starten ser vi at karet tømmes langsommere, slik som vi observerte i eksperimentene, men deretter ser vi at likning (12.13) feiler spektakulært. Det er kanskje ikke så rart fordi likning (12.13) er basert på noen sterkt forenklede røver-betraktninger. To av antakelsene vi har gjort er nå nemlig helt feil, nemlig at v_θ er konstant og at $\mathbf{v}$ er konstant i tverrsnittet.

Uansett går det an å hevde at likning (12.13) er en delvis suksess fordi den fanger opp den umiddelbare tendensen til at overflaten synker langsommere når det er rotasjon!

I neste delkapittel skal vi lære om Kelvins sirkulasjonsteorem som forteller hvordan asimutal komponenten v_θ vil endre seg ved denne typen rotasjon.

12.7 Kelvins sirkulasjonsteorem

Først et lite sidesprang: Bevaring av angulært moment

De som har tatt et introduksjonskurs i mekanikk har kanskje hørt om loven for bevaring av angulært moment: En punktmasse m som beveger seg med hastighet $\mathbf{v}$ i posisjon $\mathbf{r}$ relativt til et referansepunkt (origo) sies å ha angulært moment $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ relativt til referansepunktet. Dersom det virker en kraft $\mathbf{F}$ på punktmassen sier vi den er utsatt for et dreiemoment $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ rundt referansepunktet.

Start med Newtons 2.lov, $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$. Kryss begge sider med $\mathbf{r}$, $m\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Dette gir oss at det angulære momentet endrer seg i tid i henhold til dreiemomentet, $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}$. Når dreiemomentet er null vil det angulære momentet være bevart $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}$.

Dette benyttes for eksempel balettdansere seg av. Ved å redusere på radius av en rotasjonsbevegelse kan de oppnå stor rotasjonshastighet: **En balettdanser som gjør piruett på skøyter** eller **en annen balettdanser som gjør piruett på skøyter**

Nok et lite sidesprang: Leibniz regel for å derivere et integral

Denne nyttige formelen ser ikke ut til å stå, i hvert fall ikke i stikkordregisteret, i lærebøkene til MAT1100 eller MAT1110? Formelen kalles **Leibniz regel for å derivere et integral**:

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt = f(x, b(x)) \frac{db(x)}{dx} - f(x, a(x)) \frac{da(x)}{dx} + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$$

Poenget er at dersom både grensene og integranden avhenger av x så må både grensene og integranden deriveres med hensyn på x .

Utleddning av Kelvins sirkulasjonsteorem

Vi skal betrakte en lukket kurve λ som avgrenser en flate σ og hvor både kurven og flaten i sin helhet ligger i et fluid. Sirkulasjonen rundt den lukkede kurven er

$$C = \oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

Nå skal vi betrakte en *materiell* lukket kurve $\lambda(t)$.⁴ Det vil si at den lukkede kurven alltid utgjøres av de samme fluid partiklene som beveger seg med fluidets hastighetsfelt $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Den lukkede materielle kurven vil således kunne flytte på seg og bli deformert.

Sirkulasjonen rundt den materielle lukkede kurven $\lambda(t)$ er en funksjon av tid

$$C(t) = \oint_{\lambda(t)} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r}$$

Vi ønsker å studere hvordan sirkulasjonen rundt den materielle lukkede kurven endrer seg i tid, vi ønsker altså å beregne $\frac{dC(t)}{dt}$. Leibniz regel forteller oss at vi må derivere både kurven og integranden med hensyn på tid.

Vi skal benytte et knep for å unngå å måtte derivere kurven direkte: La den materielle kurven ved en vilkårlig tid t være parametrisert ved hjelp av kurven ved en referansetid t_0 . Punktene langs kurven $\lambda(t)$ er følgelig gitt ved en avbildning $\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t)$ hvor $\boldsymbol{\xi}$ løper rundt den lukkede referansekurven $\lambda(t_0)$.

$$C(t) = \oint_{\mathbf{r} \in \lambda(t)} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\boldsymbol{\xi} \in \lambda(t_0)} \mathbf{v}(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t), t) \cdot d\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t)$$

For å utføre derivasjonen kan vi nå begrense oss til å derivere kun integranden.

Konsekvensen av denne parametriseringen er at når den tidsderiverte kommer innenfor integraltegnet så blir det en partikkelderivert som følger partiklenes bevegelser i hastighetsfeltet. Vi får

$$\frac{dC(t)}{dt} = \oint_{\lambda} \frac{D}{dt} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) = \oint_{\lambda} \left\{ \frac{D\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{v} \cdot \frac{D(d\mathbf{r})}{dt} \right\}$$

Det siste leddet under integraltegnet bidrar ikke

$$\oint \mathbf{v} \cdot \frac{D(d\mathbf{r})}{dt} = \oint \mathbf{v} \cdot d\frac{D\mathbf{r}}{dt} = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \oint d\left(\frac{1}{2}v^2\right) = 0$$

Vi har nå utledet relasjonen

$$\frac{dC(t)}{dt} = \oint_{\lambda} \frac{D\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r}$$

Nå benytter vi Eulers likning

$$\frac{D\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}$$

⁴Det går også an å studere lukkede kurver $\lambda(t)$ som ikke er materielle, men det gir ikke like interessante resultater.

Her står $\mathbf{f}$ for fjernkrefter. Et eksempel er tyngdens akselerasjon $\mathbf{f} = \mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ for z -aksen orientert oppover. Dette gir

$$\frac{dC(t)}{dt} = \oint_{\lambda} \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} \right) \cdot d\mathbf{r} = - \oint_{\lambda} \frac{dp}{\rho} + \oint_{\lambda} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

Dersom fjernkreftene kan representeres ved et skalarpotensial Φ , for eksempel $\mathbf{f} = \mathbf{g} = \nabla(-g\mathbf{k})$ forsvinner det siste integralet

$$\oint_{\lambda} \nabla \Phi \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\lambda} d\Phi = 0$$

fordi kurven λ er lukket.

Dersom fluidet er barotropt, det vil si at tettheten er kun en funksjon av trykket, $\rho = \rho(p)$, forsvinner også det første integralet

$$\oint_{\lambda} \frac{dp}{\rho(p)} = 0$$

nok en gang fordi kurven λ er lukket. Et eksempel på barotropt fluid er konstant tetthet $\rho = \text{konstant}$.

Dermed har vi utledet Kelvins sats, nemlig at under disse forutsetningene er sirkulasjonen rundt en lukket materiell kurve bevart

$$\frac{dC(t)}{dt} = 0$$

Prøv å se for deg at Kelvins sats sier i praksis det samme for et fluid som bevaring av angulært moment sier for punktmasser!

Anvendelser av Kelvins sats

Kanskje den viktigste anvendelsen av Kelvins sats er å begrunne hvorfor vi ofte nøyer oss med å betrakte virvelfrie hastighetsfelt. Kelvins sats sier at dersom en materiell del av et fluid starter virvelfritt så må det forbli virvelfritt. Virvling må derfor genereres av en årsak av en type som vi ikke har tillatt i utledningen ovenfor.

Vi har sett at dersom vi rører rundt i en vask eller et badekar, og trekker ut propen, vil rotasjonen til fluidpartiklene gå fortere jo lenger inn mot utløpet de kommer. Dette er i henhold til Kelvins sats. Det vi betrakter her er altså asimutalhastigheten til den samme partikkelen etterhvert som den nærmer seg sluket.

I eksperiment "Toricelli" så vi både på fluid som renner rett ned og fluid som først røres rundt før det renner ned. I det første tilfellet rant vannet rett ned gjennom sluket. I det andre tilfellet sprutet vannet ut til alle kanter når det gikk ut under sluket. Dette er en konsekvens av at rotasjonshastigheten var stor i utløpet.

Skypumper (tornadoer) tiltrekker seg sirkulerende luft til et tynt rør hvor lufta stiger, der vil rotasjonshastigheten være svært stor (se illustrasjon i GF) og videoer slik som [Tornadoes 101 | National Geographic](#)

Til slutt noe som i utgangspunktet ikke er en anvendelse av Kelvins sats:

Betrakt den roterende strømmingen i en kopp som det har blitt rørt rundt i. La oss forestille oss at alle fluidpartiklene går rundt i sirkelbaner; de går rundt i de samme lukkede materielle kurver hele tiden. Disse materielle kurvene vil ikke endre seg. Dette sier ikke Kelvins sats noen ting om.

La oss se litt næyere på hva som skjer dersom vi har rørt rundt i en kopp. La oss tenke oss at det er noen løse teblader eller pepperkorn i væska: De vil samle seg på bunnen i midten av koppen! Dette skyldes et sekundært strømningsmønster som har en torus-liknende geometri.

For å gå i sirkelbaner må fluidpartiklene ha en sentripetalakselerasjon. Denne skaffes ved trykkgradienten. Trykket vil derfor være størst lengst ut og mindre inn mot rotasjonsaksen. Nær bunnen vil det være et viskøst grenseskikt som bremser på vannets hastighet. Trykkgradienten vil være gjeldende tvers igjennom det viskøse grenseskiktet, men hastigheten i grenseskiktet vil bli redusert. Følgelig vil trykkgradienten bli for stor i forhold til sentripetalakselerasjonen som trengs for å holde seg i sirkelbane. Trykkgradienten vinner og vann med teblader og pepperkorn vil bevege seg inn mot rotasjonsaksen.

Vannet kan ikke hope seg opp i midten, det vil stige oppover, mens løse partikler som teblader og pepperkorn vil bli igjen på bunnen nær midten.

Nå vil Kelvins sats gjøre seg gjeldende: Vannet som stiger opp nær rotasjonsaksen vil ha en viss rotasjon. Etter å ha steget opp mot overflaten vil dette vannet bevege seg utover og vekk fra rotasjonsaksen. Kelvins sats sier nå at asimutalhastigheten i så fall vil bli redusert. Sekundærstrømmingen som har en torus-geometri vil følgelig bidra til å bremse rotasjonen i det indre av væska i koppen. Brems-effekten som skjer i det viskøse grenseskiktet nær bunnen vil derfor forplante seg oppover og gjøre seg gjeldene i væska høyt over grenseskiktet!

12.8 Oppgaver

12.1 Vi har gitt et tidsavhengig hastighetsfelt

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}\beta x \cos(\alpha t) + \mathbf{j}\gamma e^{-\alpha t}$$

i kartesiske koordinater $\{x, y, z\}$ og tid t . Vi har enhets koordinatvektorer $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ i henholdsvis x , y og z retning. Konstantene α , β og γ er positive.

- (a) Finn partikkelbanen til en fluidpartikkel som starter i $x = x_0$ og $y = y_0$ ved tiden $t = 0$, og tegn partikkelbanen.
- (b) Finn partikkelakselerasjonen i hastighetsfeltet.

12.2 En sylinderformet kopp med diameter D fylles først med vann opp til en høyde h . Deretter rører vi rundt i koppen slik at hastighetsfeltet er gitt ved

$$\mathbf{v} = \alpha R^2 \mathbf{i}_\theta$$

hvor α er en konstant. Vi antar at vannet har konstant tetthet ρ og at strømmingen er friksjonsfri.

I denne oppgaven bruker vi sylinderkoordinater $\{R, \theta, z\}$ med z -aksen orientert oppover midt i koppen, med R som radiell avstand fra z -aksen, og med θ som asimutal-vinkelen. Vi bruker $\mathbf{i}_R$, $\mathbf{i}_\theta$ og $\mathbf{k}$ for å angi enhets koordinatvektorer i henholdsvis R , θ og z retning.

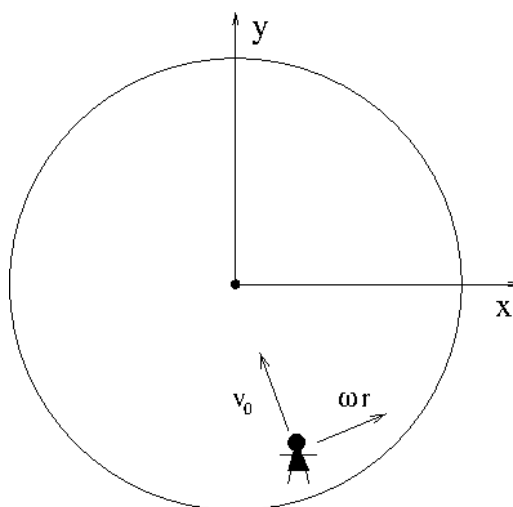
Regn ut akselerasjonen til en fluidpartikkel som følger en strømlinje.

- 12.3 En karusell i en fornøylespark roterer med konstant vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$ rundt z -aksen. $\mathbf{k}$ er enhetsvektor i z -retning og peker oppover, xy -planet er horisontalt, r er radiell horisontal avstand fra omdreiningssaksen, θ er vinkelen i xy -planet slik at $x = r \cos \theta$ og $y = r \sin \theta$.

En person på karusellen flytter seg innover mot sentrum med konstant fart v_0 i radiell retning, samtidig som hun roterer med karusellens bevegelse i vinkelretning, hun beveger seg derfor i henhold til hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} = \omega r \mathbf{i}_\theta - v_0 \mathbf{i}_r$$

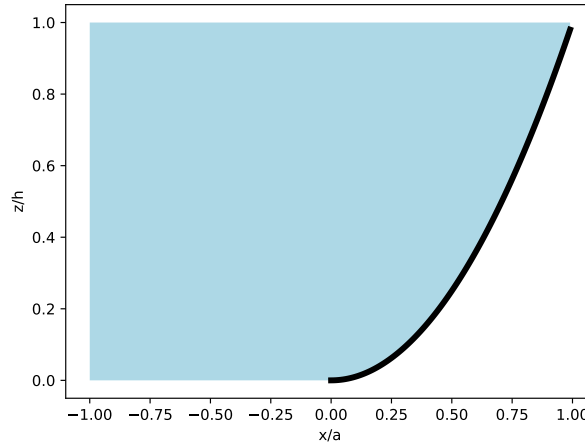
hvor $\mathbf{i}_r$ er enhetsvektor i radiell retning og $\mathbf{i}_\theta$ er enhetsvektor i vinkelretning.



Merk: Dersom du prøver dette på en karusell som roterer fritt vil du oppleve at vinkelhastigheten øker. I denne oppgaven antar vi derimot at karusellen ikke roterer fritt, men er styrt av en motor, slik at vinkelhastigheten holdes konstant!

Regn ut akselerasjonen til personen ved å regne ut den partikkelderiverte av hastighetsfeltet $\mathbf{v}$.

- 12.4 Figuren nedenfor viser en demning (tykk kurve). Til venstre for demningen er det vann i et reservoar (mørk farge). Til høyre for demningen er det luft (lys farge).



Demningen har parabolisk tverrsnitt, $z = h \left(\frac{x}{a}\right)^2$, hvor den horisontale koordinaten x er orientert vekk fra vannreservoaret, den vertikale koordinaten z er orientert oppover, og den horisontale koordinaten på tvers er y . Demningen kan beskrives ved posisjonsvektor $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ hvor koordinatene er avgrenset av $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ og $0 \leq z \leq h$. Bunnen er ved $z = 0$, og toppen (vannoverflaten) er ved $z = h$. Figuren viser et snitt gjennom demningen for fastholdt y -koordinat.

I lufta er trykket konstant $p = p_0$. Vannet i demningen har hydrostatisk trykk $p = p_0 - \rho g(z - h)$ hvor ρ er tettheten til vann og g er tyngdens akselerasjon. Ved vannoverflaten $z = h$ er altså vanntrykket lik lufttrykket $p = p_0$.

Regn ut den integrerte trykkraften som virker fra vannet på demningen.

Regn også ut summen av de integrerte trykkreftene som virker fra vannet og fra lufta på demningen.

Hint: Start med å beskrive demningen ved en passende parameterisering. Finn deretter et uttrykk for normalvektoren og det infinitesimale flatelementet til demningen.

- 12.5 I et horisontalt rør med sirkulært tverrsnitt er det en stasjonær strømning av vann. Røret har en innsnevring. Strømhastigheten antas å være konstant over tverrsnittet og rettet i rørets akseretning. Ved tverrsnitt S_1 er radius R_1 , trykket er p_1 og farten er v_1 . Ved tverrsnitt S_2 er radius R_2 .

Finn volumstrømmen ved tverrsnitt S_1 . Argumenter for at volumstrømmen ved tverrsnitt S_2 må være den samme. Finn farten v_2 og trykket p_2 ved tverrsnitt S_2 .

12.6 I figuren ser vi et fotografi av et demonstrasjonsforsøk i MEK1100. Et gjennomsiktig sylinderformet kar er delvis fylt med vann som vi har fått til å rotere rundt den vertikale senteraksen. Vi ser at vannoverflaten da har fått en spesiell form.

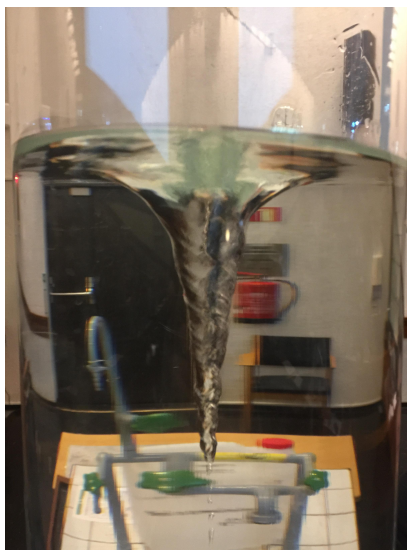


Foto: Jon Kristian Dahl

I denne oppgaven skal vi anta at hastighetsfeltet til vannet er gitt ved

$$\mathbf{v} = c\sqrt{R}\mathbf{i}_\theta,$$

og vi skal undersøke om dette hastighetsfeltet kan medføre en form på vannoverflaten tilsvarende den vi ser på bildet.

I formelen for hastighetsfeltet er c en konstant. Vi benytter sylinderkoordinater $\{R, \theta, z\}$ hvor z -aksen peker oppover langs senteraksen i sylindern og R er radiell avstand fra senteraksen. Vinkelen θ ligger i horisontalplanet og har tilhørende enhets-koordinatvektor $\mathbf{i}_\theta$.

Bruk Eulers bevegelseslikning til å finne trykket p overalt i vannet.

På vannoverflaten, $z = \eta(R)$, pålegger vi randkrav at trykket i vannet er lik det konstante lufttrykket p_0 . Bestem formen til vannoverflaten.

(Det er ikke sikkert at den formen du finner stemmer fullstendig overens med bildet.)

12.7 En sylinderformet kopp med diameter D fylles først med vann opp til en høyde h . Deretter rører vi rundt i koppen slik at hastighetsfeltet er gitt ved

$$\mathbf{v} = \alpha R^2 \mathbf{i}_\theta$$

hvor α er en konstant. Vi antar at vannet har konstant tetthet ρ og at strømmingen er friksjonsfri.

I denne oppgaven bruker vi sylinderkoordinater $\{R, \theta, z\}$ med z -aksen orientert oppover midt i koppen, med R som radiell avstand fra z -aksen, og med θ som asimutal-vinkelen. Vi bruker $\mathbf{i}_R$, $\mathbf{i}_\theta$ og $\mathbf{k}$ for å angi enhets koordinatvektorer i henholdsvis R , θ og z retning.

Regn ut akselerasjonen til en fluidpartikkel som følger en strømlinje.

Over vannet er det luft med konstant trykk p_0 . Bevegelsen til vannet vil medføre at vannoverflaten ikke er horisontal, men derimot er en krum flate gitt ved $z = \eta(R, \theta)$. Bestem $\eta(R, \theta)$.

Kan du bruke Bernoullis likning for å løse denne oppgaven?

- 12.8 En sylinderformet kopp med radius a fylles med vann opp til en høyde h . I denne oppgaven skal vi bruke sylinderkoordinater $\{R, \theta, z\}$ med z -aksen orientert oppover midt i koppen, med R som radiell avstand fra z -aksen og med θ som asimutal vinkel. Vi har enhets koordinatvektorer $\mathbf{i}_R$, $\mathbf{i}_\theta$ og $\mathbf{k}$ i henholdsvis R , θ og z retning.

Vi rører rundt i koppen på en slik måte at hastighetsfeltet er gitt ved

$$\mathbf{v} = U \sqrt{\frac{R}{a}} e^{\frac{R}{a}} \mathbf{i}_\theta$$

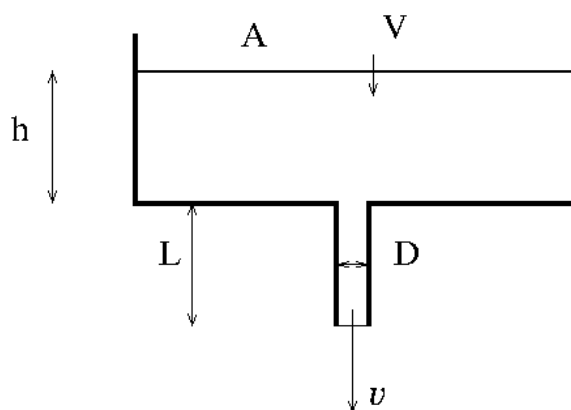
hvor U er en konstant.

Vi antar at vannet har konstant tetthet ρ og at strømmingen er friksjonsfri.

Over vannet er det luft med konstant trykk p_0 . Bevegelsen til vannet vil medføre at vannoverflaten ikke er horisontal, men derimot er en krum flate gitt ved $z = \eta(R, \theta)$. Bestem $\eta(R, \theta)$.

Kan du bruke Bernoullis likning for å løse denne oppgaven?

- 12.9 I kjelleren under Niels Henrik Abels hus har vi bygget et rektangulært bølgebasseng med horisontal flate $A = 7 \text{ m} \times 22 \text{ m}$ som kan fylles med vann opp til høyde $h = 0.8 \text{ m}$. Bassenget kan tømmes igjennom et vertikalt rør med diameter $D = 6 \text{ cm}$ som strekker seg $L = 1 \text{ m}$ ned under bunnen av bassenget. Vannet er i kontakt med luft, med konstant lufttrykk p_0 , både ved den frie overflaten og ved utløpet av røret. Tyngdens akselerasjon er $g = 9.8 \text{ m/s}^2$



Finn et uttrykk for hvor lang tid det tar å tømme bassenget.

Svaret skal oppgis ved hjelp av størrelsene A, D, h, L og g .

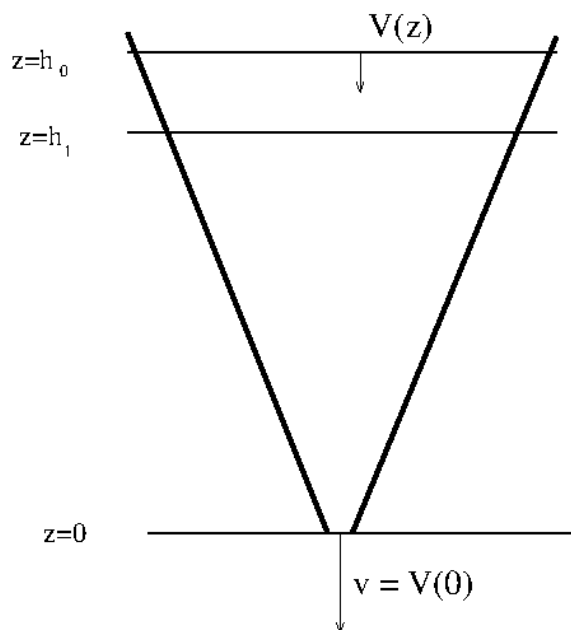
12.10 En trakt med sirkulært tverrsnitt er fylt opp med vann til en høyde $z = h_0$ over utløpet ved $z = 0$.

Det sirkulære tverrsnittet til trakten har radius $R = a + bz$ hvor z er høyden over utløpet ved $z = 0$. Utløpet har altså radius $R = a$.

Vannet har konstant tetthet ρ og er i kontakt med luft med konstant trykk p_0 både øverst og nederst i trakten. Det er tyngdens akselerasjon g som drar vannet nedover.

Finn ut hvor lang tid det tar for vannet å renne ut til høyden er redusert til $z = h_1 < h_0$?

Hint: For å gjøre denne oppgaven overkommelig skal vi anta at hastighetsfeltet er nesten stasjonært i løpet av den tiden det tar å redusere høyden fra h_0 til h_1 . Dessuten skal vi anta at størrelsen $bz/a \gg 1$ for $h_0 > z > h_1$ slik at vi kan forenkle diverse uttrykk som for eksempel $(1 + bz/a)^4 \approx (bz/a)^4$.



Kapittel 13

Varmetransport

Temperatur

Temperatur T kan måles i diverse enheter. Den vanlige enheten **Celsius** °C ble tradisjonelt definert ved frysepunktet og kokepunktet til vann ved normalt trykk ved havoverflaten. Vi skal foretrekke den absolutte skalaen **Kelvin** K. Trinnene i disse to skalaene er like store. Temperaturen $0\text{ K} = -273.15^\circ\text{C}$ er det absolutte nullpunkt. Relasjonen mellom de to skalaene er

$$\text{Temperatur i } ^\circ\text{C} = \text{Temperatur i K} - 273.15$$

Varme

Det vi her kaller *varme* er det samme som man i klassisk termodynamikk ofte kaller *indre energi* eller *termisk energi*. Varme kan følgelig måles og angis i en passende enhet for energi.

Kanskje de to vanligste enhetene for energi er **Joule** J og “kilo Watt timer” kWh. Vi har $1\text{ J} = 1\text{ Ws}$, $1\text{ h} = 3600\text{ s}$, og følgelig $1\text{ kWh} = 3.6\text{ MJ}$. En annen enhet for energi er **kalori** med symbol cal. Vi har $1\text{ cal} = 4.18\text{ J}$.

Spesifikk og volumetrisk varme

Vi kan oppgi varme per masse eller per volum. Varme per masse kalles *spesifikk varme*, som vi skal angi ved symbolet E , og som kan ha enhet J/kg. Varme per volum kalles *volumetrisk varme*, denne oppnår vi ved å multipliserer med massetettheten ρ som kan ha enhet kg/m³, vi får da ρE som kan ha enhet J/m³.

Adjektivet *spesifikk* foran navnet på en størrelse indikerer altså at det er per masse.

Termodynamisk tilstandslikning

Fra klassisk termodynamikk vet vi at et stoff som er i termodynamisk likevekt oppfyller en tilstandslikning som relaterer tre termodynamiske variable, for eksempel $f(p, V, T) = 0$ hvor p er trykk, V er volum og T er temperatur. En annen mulighet kan være at den spesifikke varmen er funksjon av temperatur og trykk $E = E(T, p)$.

I dette emnet MEK1100 skal vi unngå å diskutere termodynamikk og tilstandslikninger. Vi skal begrense oss til at den spesifikke varmen E kun avhenger av temperatur, og at tettheten ρ ikke avhenger av verken trykk eller temperatur. I praksis skal vi anta at vi ser på prosesser som skjer ved konstant trykk.

Vi kan da skrive *spesifikk varme* $E(T)$ og *volumetrisk varme* $\rho E(T)$.

Spesifikk varmekapasitet

Funksjonsuttrykket for den spesifikke varmen $E(T)$ er ukjent for oss. Det gjør ikke noe, for vi skal begrense oss til å se på små endringer i varmen som konsekvens av små endringer i temperatur rundt en referansetemperatur T_0 . Vi kan da utføre en Taylor-utviklingen rundt referansetemperaturen

$$E(T) \approx E(T_0) + \frac{\partial E}{\partial T}(T - T_0) + \dots = E(T_0) + c(T - T_0) + \dots$$

Den deriverte av den spesifikke varmen med hensyn på temperatur, $c = \frac{\partial E}{\partial T}$, kalles for den *spesifikke varmekapasiteten* og kan ha enhet J/(kg K). Vi skal betrakte denne som en konstant.

Det er interessant å legge merke til at definisjonen på [kalori](#) er den mengden energi som trengs for å heve temperaturen av ett gram vann med én grad Celsius, ved et trykk på én atmosfære. Ettersom $1 \text{ cal} = 4.18 \text{ J}$ så innser vi at den spesifikke varmekapasiteten til vann er $c = 4.18 \text{ J/(gK)}$.

NB! Den spesifikke varmekapasiteten er verken konstant eller entydig!

Egentlig er det ikke så enkelt som vi antyder ovenfor. Den spesifikke varmekapasiteten er ikke konstant, men kan variere drastisk med hensyn på temperatur, og spesielt med hensyn på faseoverganger mellom fast stoff, væske og gass. Dessuten spiller det en rolle om vi beregner den deriverte $c = \frac{\partial E}{\partial T}$ ved konstant volum V eller ved konstant trykk p .

Vi skiller mellom den spesifikke varmekapasiteten ved konstant volum c_V og ved konstant trykk c_p . Den grunnleggende forskjellen på disse er følgende: Dersom vi varmer opp et stoff, og stoffet får lov til å utvide seg mens trykket holder seg konstant, så vil stoffet utføre arbeid på omgivelsene fordi stoffet vil skyve vekk omgivelsene. Den tilførte energien vil gå delvis til oppvarming av stoffet og delvis til å utføre arbeid på omgivelsene. Om vi derimot varmer opp et stoff, og stoffet tvinges til å beholde sitt opprinnelige volum, så vil all den tilførte energien gå til oppvarming. Følgelig forventer vi at $c_p > c_V$. For gasser er både den absolutte og den relative forskjellen større enn for væsker.

Her er en tabell med noen typiske verdier:

Størrelse	c_p	c_V	ρc_p	ρ
Enhet	J/(g K)	J/(g K)	J/(cm ³ K)	kg/m ³
Is (−10°C)	2.05		1.938	916.8
Vann (25°C)	4.1813	4.137	4.1796	997.0
Vann (100°C)	4.1813	4.137	4.2160	958.4
Vanddamp (100°C)	2.080	1.56		
Luft (rombetingelser)	1.012	0.723	0.00121	1.20

Tabellen er satt sammen med tall fra en.wikipedia.org/wiki/Heat_capacity, en.wikipedia.org/wiki/Density og en.wikipedia.org/wiki/Ice.

Betraktingene vi gjør i dette emnet MEK1100 er best i overensstemmelse med å holde trykket konstant, følgelig er det c_p som kommer til anvendelse i det følgende. Vi skal skrive bare c uten indeks når vi egentlig mener c_p .

Små temperaturendringer uten faseoverganger

For små endringer av temperatur utenom faseoverganger kan vi betrakte den spesifikke varmekapasiteten som en konstant og vi kan skrive Taylor-utviklingen

$$\Delta E \equiv E(T) - E(T_0) \approx \frac{\partial E}{\partial T}(T - T_0) \equiv c\Delta T$$

hvor $c = \frac{\partial E}{\partial T}$ beregnet ved $T = T_0$, og hvor T_0 er en referansetemperatur.

Mange lærebøker gjør feil ved å skrive at den spesifikke varmen er cT eller at den volumetriske varmen er ρcT hvor ρ og c oppfattes som konstanter og hvor T er den absolutte temperaturen. Denne feilen forekommer både hos Matthews i starten på hans kapittel 8.1 hvor det står at den volumetriske varmen er ρcT , og den forekommer hos Gjevik og Fagerland i fasit til oppgave 2 i kapittel 11 hvor nevneren i en brøk er ρcT . I begge tilfeller burde det ha stått $\rho c\Delta T$ for $\Delta T = T - T_0$ liten.

Endring av varmemengde i et kontrollvolum

Vi ser på et kontrollvolum V . Den totale varmen innenfor kontrollvolumet V er

$$\int_V \rho E(T) d\tau$$

Dersom vi endrer temperaturen litt, og vi kan anta at tettheten og varmekapasiteten er omtrent konstant, så vil endringen i den termiske energien være

$$\int_V \rho c \Delta T d\tau$$

Eksempel: Pris for å varme opp luft og vann i hjemmene våre

Prisen for elektrisk energi kan konsulteres på nett, for eksempel på vevsiden <https://www.strompris.no/> eller hos din strømleverandør.

La oss anta at energiprisen er 1 kr/kWh. Strømregningen vi betaler består imidlertid av både energiregning og nettrekning, som en tommelfingerregel kan vi anta at disse to er omtrent like store, vi skal derfor i det følgende anta at strømregningen vil være 2 kr/kWh.

Prisen for å lufte stua: Anta stua har $V = 10 \cdot 5 \cdot 3 \text{ m}^3$ luft som byttes ut med kald uteluft. Vi må deretter varme opp denne lufta $\Delta T = 20 \text{ K}$. Dette vil koste

$$0.00121 \text{ J}/(\text{cm}^3 \text{ K}) \cdot 150 \text{ m}^3 \cdot 20 \text{ K} \cdot 2 \text{ kr/kWh} \approx 2 \text{ kr}$$

Prisen for å ta seg et bad: Anta vi må varme opp $V = 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \text{ m}^3$ vann $\Delta T = 30 \text{ K}$ for å ta oss et varmt bad. Dette vil koste

$$4.18 \text{ J}/(\text{cm}^3 \text{ K}) \cdot 0.5 \text{ m}^3 \cdot 30 \text{ K} \cdot 2 \text{ kr/kWh} \approx 35 \text{ kr}$$

13.1 Varmelikninga

Vi skal nå gjøre regnskap for varmen i et vilkårlig fastholdt kontrollvolum V . Vi antar at den indre energien kun er en funksjon av temperaturen.

Endringen av den totale varmen er

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho E(T) d\tau = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho E(T)) d\tau$$

Den totale varmen i kontrollvolumet kan endre seg av tre grunner:

1. Varmekonveksjon — varmetransport fordi fluidet strømmer med hastighet $\mathbf{v}$
2. Varmedledning — varmetransport som ikke er assosiert med at fluidet strømmer
3. Produksjon av varme i kontrollvolumet — f.eks. kjemiske reaksjoner, friksjon, varmeovner, etc.

Varmekonveksjon er beskrevet av den volumetriske varmefflukstettheten på grunn av konveksjon

$$\mathbf{H}_s = \rho E(T) \mathbf{v}$$

som kan ha enhet $J/(m^2 s)$.

Varmedledningen er beskrevet ved hjelp av Fouriers lov som sier at varme ledes fra der hvor det er varmt til der hvor det er kaldt med en proporsjonalitetsfaktor k som kalles varmedledningstall. Dette gir den volumetriske varmefflukstettheten på grunn av ledning

$$\mathbf{H}_l = -k \nabla T$$

som også kan ha enhet $J/(m^2 s)$. Varmedledningstallet k , som også kalles termisk konduktivitet, kan ha enhet $J/(m s K)$.

Den totale varmefflukstettheten vil være

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_l = \rho E(T) \mathbf{v} - k \nabla T$$

Lokal produksjon av varme skal vi notere med symbolet q som kan ha enhet $J/(m^3 s)$.

Totalregnskapet for varme i kontrollvolumet blir

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho E(T) d\tau = - \int_S (\rho E(T) \mathbf{v} - k \nabla T) \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_V q d\tau$$

som vi kan omforme til kun ett felles volmintegral ved hjelp av Gauss sats. Det faktum at vi har valgt et kontrollvolum som er fastholdt betyr at den tidsderiverte går rett igjennom integraltegnet

$$\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho E(T)) + \nabla \cdot (\rho E(T) \mathbf{v} - k \nabla T) - q \right\} d\tau = 0$$

Ettersom kontrollvolumet er vilkårlig så må det som står inni sløyfeparentesen være lik null

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E(T)) + \nabla \cdot (\rho E(T) \mathbf{v} - k \nabla T) - q = 0$$

og dette uttrykket kan utvikles ved produktregelen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} E(T) + \rho \frac{\partial E(T)}{\partial t} + E(T) \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla E(T) + \rho E(T) \nabla \cdot \mathbf{v} = k \nabla^2 T + q$$

Legg merke til at kombinasjonen av første, tredje og femte ledd forsvinner på grunn av kontinuitetslikninga.

Nå benytter vi kjerneregelen:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{og} \quad \nabla E = \frac{\partial E}{\partial T} \nabla T = c \nabla T$$

Dermed kan vi skrive

$$\frac{DT}{dt} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T + \frac{q}{\rho c}$$

hvor vi har introdusert varmediffusiviteten $\kappa = \frac{k}{\rho c}$ som kan ha enhet m^2/s .

Eksempel: Den klassiske varmelikninga

Uten konveksjon $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ og uten varmeproduksjon $q = 0$ står vi igjen med den “klassiske” varmelikninga

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$$

og varmeflukstettheten

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_l = -k \nabla T$$

Temperaturen vil øke/avta i tid der hvor temperaturprofilen krummer opp/ned i rom. Varmefluksen vil være orientert i retningen hvor temperaturen avtar.

Eksempel: Stasjonær temperaturfordeling gjennom et vindusglass

Vinduet strekker seg fra $x = 0$ på innsiden til $x = L$ på utsiden, har konstant tverrsnitt A , termisk konduktivitet k , og har pålagt temperatur $T = T_{\text{inne}}$ ved $x = x_0$ og $T = T_{\text{ute}}$ ved $x = x_L$. Ettersom vinduet antas å være av fast stoff så er det ingen konveksjon, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Stasjonær temperatur betyr $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Varmelikninga gir oss da

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Med randkravene får vi løsninga

$$T(x) = \frac{T_{\text{ute}} - T_{\text{inne}}}{L} x + T_{\text{inne}}.$$

Varmeflukstettheten er

$$\mathbf{H} = -k \frac{T_{\text{ute}} - T_{\text{inne}}}{L} \mathbf{i}$$

Den integrerte varmefluksen gjennom et tverrsnitt S av vinduet for vilkårlig x er

$$Q = \int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{i} \, d\sigma = -k \frac{T_{\text{ute}} - T_{\text{inne}}}{L} A$$

Legg merke til at dette svaret er uavhengig av x , det er et uttrykk for at det ikke hopper seg opp varme noe sted i vinduet.

Eksempel: Hvor tykt må et vindu eller en yttervegg være for å tilfredsstille myndighetenes krav?

For å angi den isolerende evnen til vinduer, vegger osv. bruker man ofte en størrelse som kalles U -verdi som er definert ved

$$U = \left| \frac{Q}{A\Delta T} \right| = \frac{k}{L}$$

hvor vi har brukt forrige eksempel som motivasjon. Se no.wikipedia.org/wiki/U-verdi. Kravene i henhold til forskrift TEK17 (innført 1/7-2017) er $U \leq 0.8 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ for vinduer og $U \leq 0.18 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ for yttervegger.

Vi kan nå regne ut hva som er minste tykkelse av diverse materialer, for at myndighetenes krav om isolasjon i vinduer og vegger skal være oppfylt:

Størrelse	k	L_{vindu}	L_{vegg}
Enhet	$\text{W}/(\text{m K})$	m	m
Glass	1	1.3	5.6
Tørr snø	0.11	0.14	0.61
Luft	0.025	0.031	0.14

Vi innser at det ikke er vanskelig å lage en iglo som tilfredsstiller myndighetenes krav!

Vi innser også at glass er noe av det mest vanvittige byggematerialet dersom det alene skal gi den nødvendige varme-isolasjonen.

Luft hadde vært et særdeles godt byggemateriale dersom det ikke hadde den leie tendensen til å bevege seg. Vi skal straks se hvor liten konveksjonshastighet som trengs for at konveksjon er mer effektiv en varmeledning for å transportere varme.

Et materiale som inneholder luft som tvinges til å stå i ro, for eksempel dobbel- eller trippel-glass, eller porøs luftholdig isolasjon, er smart for å oppnå ønsket isolerende evne uten at vegger og vinduer trenger å bli alt for tykke. Vi innser også at varme klær bør være laget av stoffer som inneholder mye luft som ikke får lov til å bevege seg.

Eksempel: Hvor fort må luft bevege seg for at konveksjon er like effektiv som varmeledning?

Varmeflukstettheten er gitt ved

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_l = \rho E(T) \mathbf{v} - k \nabla T$$

men ettersom vi kun er interessert i varmekraft assosiert med temperaturendring så nøyer vi oss med

$$\mathbf{H} = \rho c \Delta T \mathbf{v} - k \nabla T$$

Anta en karakteristisk temperaturdifferanse er $|\Delta T| = 10 \text{ K}$ over en karakteristisk og at en karakteristisk lengde $L = 1 \text{ m}$ slik at den karakteristiske temperaturgradienten er $|\nabla T| = |\Delta T|/L = 10 \text{ K/m}$.

For luft har vi massetetthet $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$, spesifikk varmekapasitet $c = c_p = 1.012 \text{ J/(g K)}$ og termisk konduktivitet $k = 0.025 \text{ J/(m s K)}$.

For at konveksjon og varmeledning skal være like effektive må lufta bevege seg med fart

$$v = \frac{k|\nabla T|}{\rho c|\Delta T|} = \frac{k}{\rho cL} = \frac{0.025}{1.2 \cdot 1012 \cdot 1} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2.1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 21 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$$

Dette er ekstremt langsomt!

Vi bør med andre ord ha respekt for hvor avkjølende en kald trekk kan være, eller hvor effektiv en varmluftsvifte kan være for å gi hurtigere oppvarming!

Egentlig betyr kanskje “kald trekk” at vi egentlig ikke kjenner at lufta beveger seg som en vind, men at vi likevel kjenner at det i høyeste grad blir ubehagelig kaldt som en følge av at lufta beveger på seg?

Eksempel: Varmetap ut av en termos

Vi skal forestille oss en termos fylt med varmt vann som holder $T_a = 65^\circ\text{C}$ og omgivelser som holder $T_b = 15^\circ\text{C}$. Temperaturdifferansen er $\Delta T = 50 \text{ K}$. Termosen har ytre radius $b = 3 \text{ cm}$ og indre radius $a = 2 \text{ cm}$ og høyde $h = 20 \text{ cm}$. La oss anta at det isolerende materialet i termosveggen tilsvarende isopor som har varmeledningstall $k = 0.033 \text{ W/(mK)}$. La oss anta at vi kan se bort fra topp og bunn. Vannet inni termosen har volumetrisk varmekapasitet $\rho c = 4.18 \cdot 10^6 \text{ J/(K m}^3\text{)}$. Finn ut hvor stor varmekraft som kommer ut av sylinderveggen til termosen, og prøv å gjette hvor lang tid det tar før det varme vannet har blitt avkjølt.

Dette problemet løser vi best med sylinderveggen. La R være radiell avstand fra z -aksen og la θ være asimutal vinkel.

Med antakelse om stasjonære forhold og ingen konveksjon i det isolerende laget vil varmelikninga reduseres til Laplace likning $\nabla^2 T = 0$ som må løses med randkrav $T(a) = T_a$ og $T(b) = T_b$. Vi antar at $T(R)$ ikke er funksjon av θ eller z og må løse

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial T}{\partial R} \right) = 0$$

Den generelle løsningen er $T = \alpha \ln R + \beta$ hvor α og β er konstanter. Innsetting av randkrav gir to betingelser som lar oss bestemme $\alpha = (T_a - T_b)/\ln(a/b)$. Det er ikke nødvendig å bestemme β .

Vi kan nå finne varmekrafttettheten på grunn av varmeledning ved Fouriers lov

$$\mathbf{H}_l = -k \nabla T = -\mathbf{i}_R \frac{k\alpha}{R}$$

og den integrerte varmekraften på grunn av varmeledning

$$Q = \int_S \mathbf{H}_l \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_0^h \int_0^{2\pi} -\mathbf{i}_R \frac{k\alpha}{R} \cdot \mathbf{i}_R R d\theta dz = \frac{2\pi k h (T_a - T_b)}{\ln(\frac{b}{a})}$$

Innsetting gir $Q = 5.1 \text{ W}$. Legg merke til at dette er riktig svar kun i det første øyeblikket før innholdet i termosen har blitt kaldere.

La oss regne ut den totale varmen i termosen relativt til omgivelsestemperaturen, nemlig $\epsilon = \rho c V \Delta T = 53 \cdot 10^3 \text{ J}$.

Nå skal vi foreta en helt feilaktig utregning for tiden det tar for at innholdet i termosen blir avkjølt, nemlig $\epsilon/Q = 10^4 \text{ s} = 2 \text{ timer og } 50 \text{ minutter}$. Grunnen til at dette er feil er fordi vi ikke har tatt hensyn til at avkjølingen ikke er en stasjonær prosess, det vil si at vi burde egentlig ha løst den tidsavhengige varmelikninga

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$$

Det ligger utenfor pensum i MEK1100 å kunne løse den generelle tidsavhengige varmelikninga. Vi skal derfor begrense oss til å slå fast at avkjølingen vil i dette tilfellet ta mye mer enn 3 timer.

Selv om det å løse den tidsavhengige varmelikninga ligger utenfor pensum i MEK1100, så skal vi i det følgende likevel vise et par spesielle eksempler på oppførsel av den tidsavhengige likninga.

Eksempel: Dersom overflaten S til et legeme V holdes ved konstant temperatur T_0 , og det ikke er konveksjon eller kilder, så vil temperaturen i det indre av legemet konvergere mot T_0 .

Dette er eksempel 8.1 i kapittel 8.1 i Matthews.

La $\xi = T - T_0$. Vi skal følgelig se på likninga

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \xi \quad \text{med randkrav} \quad \xi = 0 \quad \text{på overflaten } S$$

Multipliser med ξ og bruk identiteten $\xi \nabla^2 \xi = \nabla \cdot (\xi \nabla \xi) - \nabla \xi \cdot \nabla \xi$,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \xi^2}{\partial t} = \kappa [\nabla \cdot (\xi \nabla \xi) - |\nabla \xi|^2]$$

Ta volumintegralet over legemet

$$\int_V \frac{1}{2} \frac{\partial \xi^2}{\partial t} d\tau = \kappa \int_V \nabla \cdot (\xi \nabla \xi) - |\nabla \xi|^2 d\tau$$

Benytt Gauss sats

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \xi^2 d\tau = \kappa \int_S \xi \nabla \xi \cdot \mathbf{n} d\sigma - \kappa \int_V |\nabla \xi|^2 d\tau$$

Integralet på venstre side kan ikke være negativt. Første integral på høyre side er null fordi $\xi = 0$ på overflaten S . Andre integral på høyre side gir bidrag dersom temperaturen er inhomogen, det vil si at gradienten $\nabla \xi$ er ulik null. Minustegnet foran det andre integralet på høyre side medfører at den tidsderiverte av integralet på venstre side må være negativ. Størrelsen $\int_V \xi^2 d\tau$ vil altså avta mot 0 så lenge det er inhomogeniteter i temperaturfeltet.

Eksemplet ovenfor forklarer ikke bare hvorfor innholdet i termosen blir kaldt, det forklarer også hvorfor man ikke bør sette en melkekartong utenfor kjøleskapet, og det

forklarer hvorfor det fungerer å steke noe i ovenen på kjøkkenet: Sett termostaten på ønsket temperatur, vent tilstrekkelig lang tid til at det som skal stekes har oppnådd ønsket kjernetemperatur!

Eksemplet ovenfor forklarer derimot ikke hvor lang tid det tar for at temperaturen skal bli homogen.

13.2 Oppgaver

- 13.1 Et rett rør har en sylindrisk vegg med indre radius a og ytre radius b . Inn i røret er det vann med temperatur T_a . Utfor røret er det luft med temperatur T_b . Materialet som rørveggen er laget av har varmeledningstall k . Det strømmer ikke vann eller luft gjennom rørveggen. Vi kan tenke oss at røret er uendelig langt slik at vi kan se bort fra ende-effekter.

Finn et uttrykk for den integrerte varmekraften gjennom rørveggen.

- 13.2 En stav orientert langs x -aksen er laget av et fast stoff og er varmet opp på en slik måte at temperaturen ved tidspunktet $t = t_0$ er $T(x, t_0) = T_0 e^{-\alpha|x|} + T_1$. Her er T_0 , T_1 og α konstanter.

Det vil være en varmekraft i staven bestemt av Fouriers lov som sier at varmekraftstettheten er gitt ved $\mathbf{H} = -k\nabla T$ hvor k er varmeledningstallet til stavens materiale. Vi begrenser oss til å kun betrakte varmekraft langs x -aksen.

Temperaturen i staven $T(x, t)$ vil endre seg i henhold til varmelikninga $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$ hvor κ er varmediffusiviteten til stavens materiale.

Regn ut varmekraftstettheten $\mathbf{H}$ ved tidspunktet $t = t_0$. Hvilken vei går varmestransporten for $x > 0$ og for $x < 0$?

Regn ut hvordan temperaturen endrer seg ved tidspunktet $t = t_0$. Vil temperaturen øke eller avta for $x > 0$ og for $x < 0$?

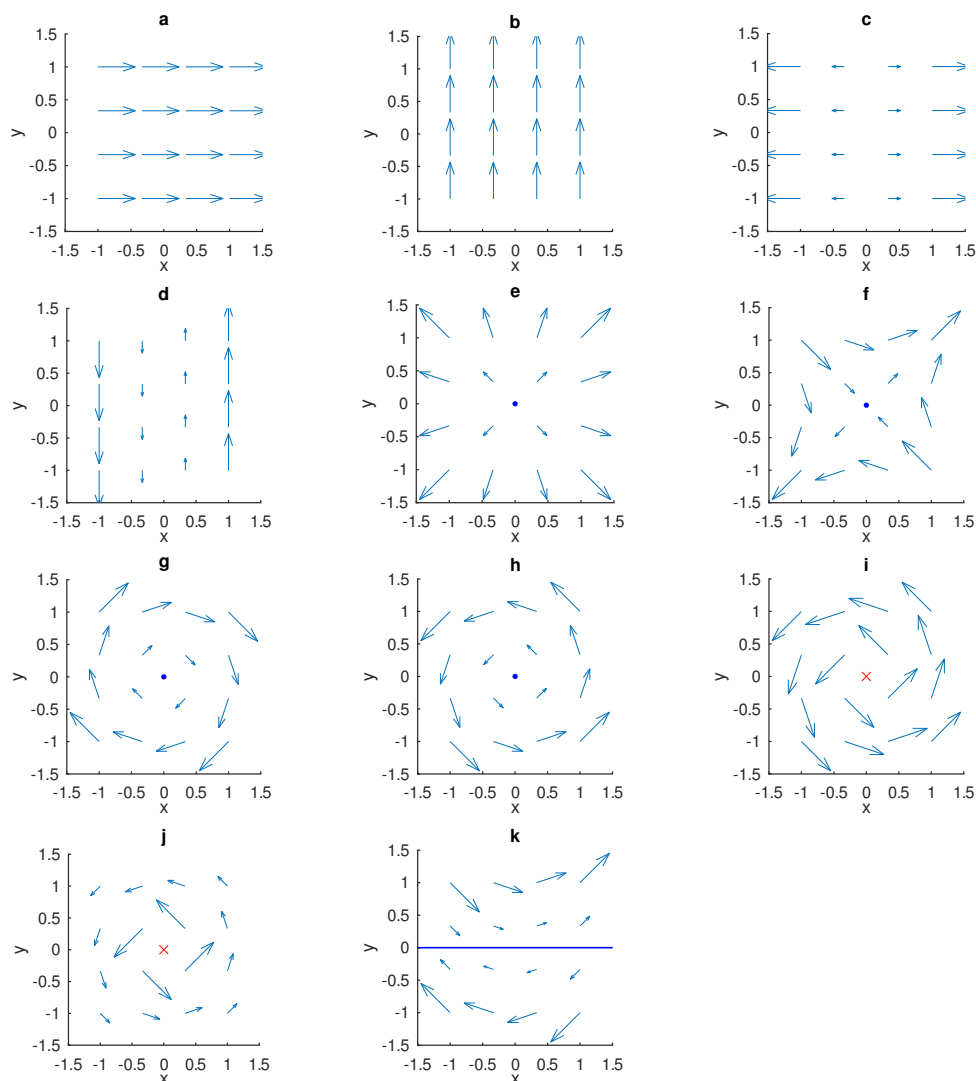
Merk: Du skal ikke regne ut hva som skjer i origo, $x = 0$, ved tidspunktet $t = t_0$.

Kapittel 14

Fasit til noen av oppgavene

Kapittel 1.5

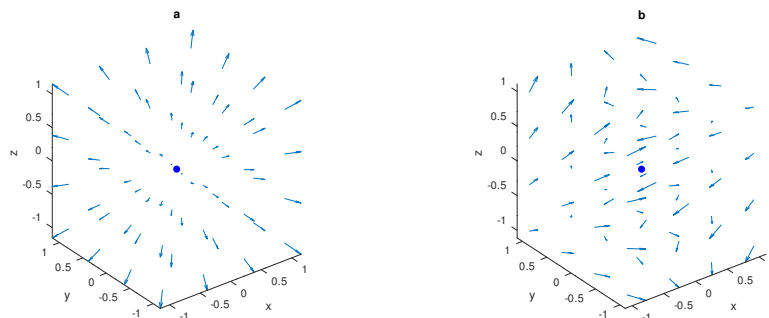
1.3 Stagnasjonslinje/punkt vist med fet linje eller punkt.



Oppgave (i) er singulær i origo fordi feltet har endelig styrke i alle retninger.

Oppgave (j) er singulær i origo fordi feltet har uendelig styrke i alle retninger.

1.4 Stagnasjonspunkt vist med tjukt punkt.



Vi kan være enige om at plott (b) er vanskelig å tolke...

$$1.5 \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{i}R \cos(\omega t) + \mathbf{j}R \sin(\omega t) + \mathbf{k} \frac{c(1 - \cos(\Omega t))}{\Omega}$$

1.6 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 6 \neq 0$ — ikke ortogonale.

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{ab} = \frac{3}{5} \neq 1 \text{ — ikke parallelle.}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 8\mathbf{k} \neq \mathbf{0} \text{ — ikke parallelle.}$$

$$\sin \theta = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{ab} = \frac{4}{5} \neq 1 \text{ — ikke ortogonale.}$$

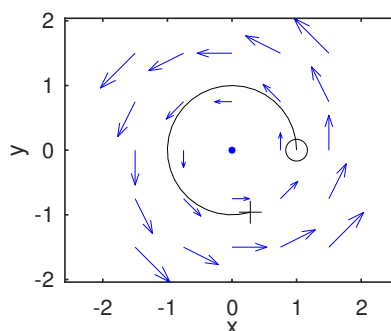
$$\theta = 0.9273 = 53.13^\circ$$

$$1.7 \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = a^2 \mathbf{b} - \mathbf{a} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = 0$$

$$1.8 \quad x(t) = \cos t \text{ og } y(t) = \sin t$$

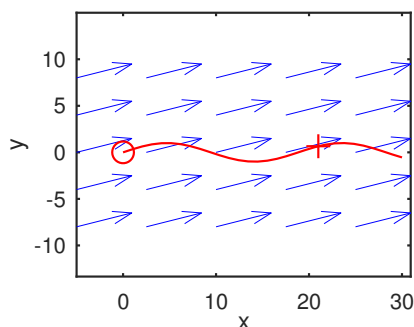
Banen vist i svart, start vist med $\circ$ for $t = 0$, slutt vist med $+$ for $t = 5$.



$$1.9 \quad \text{Bane } x(t) = 3t \text{ og } y(t) = \sin t$$

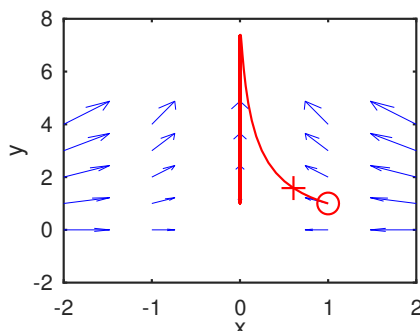
$$\text{eller } y = \sin(x/3)$$

Banen vist i rødt for $t \geq 0$. Start vist med $\circ$ for $t = 0$. Vektorfelt (piler) og posisjon (vist med $+$) for $t = 7$.



1.10 Bane $x(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ og
 $y(t) = e^{1-\cos t}$

Banen vist i rødt for $t \geq 0$.
 Start vist med $\circ$ for $t = 0$.
 Vektorfelt (piler) og posisjon
 (vist med $+$) for $t = 1$.



Kapittel 2.3

2.1 (a) Sett $t_c = -v_0/g$ og få $z^* - r_0^* = -\frac{1}{2}t^*(t^* + 2)$

(b) $z^* = -\frac{1}{2}(t^*)^2 + 1$

2.2 Sett $t_c = m/\nu$ og $l_c = gm^2/\nu^2$.

(a) Skaler $t^* = t/t_c$, $z^* = z/l_c$, $z_0^* = z_0/l_c$ og $v_0^* = v_0 t_c/l_c$.

Resultat $\frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + \frac{dz^*}{dt^*} + 1 = 0$ med startkrav $z^*(0) = z_0^*$ og $v^*(0) = v_0^*$.

(b) Skaler $t^* = t/t_c$, $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}/l_c$, $\mathbf{r}_0^* = \mathbf{r}_0/l_c$ og $\mathbf{v}_0^* = \mathbf{v}_0 t_c/l_c$.

Resultat $\frac{d^2 \mathbf{r}^*}{dt^{*2}} + \frac{d\mathbf{r}^*}{dt^*} + \mathbf{k} = \mathbf{0}$ med startkrav $\mathbf{r}^*(0) = \mathbf{r}_0^*$ og $\mathbf{v}^*(0) = \mathbf{v}_0^*$.

Splittet mellom én horisontal og vertikal komponent:

$\frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} + \frac{dx^*}{dt^*} = 0$ med startkrav $x^*(0) = x_0^*$ og $v_x^*(0) = v_0^* \cos \theta$.

$\frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + \frac{dz^*}{dt^*} + 1 = 0$ med startkrav $z^*(0) = z_0^*$ og $v_z^*(0) = v_0^* \sin \theta$.

Kapittel 3.3

(Ingen separat fasit laget foreløpig, men se figurer presentert under kapittel 1)

Kapittel 4.7

4.1 (a) $(2x + 2y)\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k}$

(b) $-\mathbf{i}e^{-y} \sin x - \mathbf{j}e^{-y} \cos x$

(c) $\frac{y}{z}\mathbf{i} + \frac{x}{z}\mathbf{j} - \frac{xy}{z^2}\mathbf{k}$

4.2 $-\frac{\sin 1 + 2 \cos 1}{\sqrt{5}}e^{-1}$

4.3 $(\cos 1 - (x-1)\sin 1 - (y-1)\cos 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 \cos 1 + (x-1)(y-1)\sin 1 + \frac{1}{2}(y-1)^2 \cos 1)e^{-1}$

4.4 Nedenfor er c en vilkårlig konstant.

- (a) $\phi = x + c$
 - (b) $\phi = y + c$
 - (c) $\phi = \frac{1}{2}x^2 + c$
 - (d) Nei
 - (e) $\phi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c$
 - (f) $\phi = xy + c$
 - (g) Nei
 - (h) Nei
 - (i) Nei
 - (j) $\phi = \arctan(\frac{y}{x}) + c$ (denne blir mye lettere å løse etter at vi har lært om polare koordinater)
 - (k) Nei
 - (l) $\phi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + c$
 - (m) $\phi = -x^2 + \frac{1}{2}(y^2 + z^2) + c$
- 4.5 (a) Banen er $x(t) = t$ og $y(t) = \frac{1}{2}t^2$ på parameterform, eller $y = \frac{1}{2}x^2$ uten parameter. Dette er en parabel.
Strømlinjene er $y = tx$ for fastholdt t . Disse er rette linjer.
- (b) Banen er $x(t) = 1 - \cos t$ og $y(t) = t$ på parameterform, eller $x = 1 - \cos y$ uten parameter. Dette er en cosinus svigning.
Strømlinjene er $x = y \sin t$. Disse er rette linjer.
- 4.6 Banene er $x(t) = ae^{\frac{1}{2}t^2}$ og $y(t) = be^{\frac{1}{2}t^2}$ på parameterform, eller $ay = bx$ uten parameter, hvor a og b er vilkårlige konstanter.
Strømlinjene er også gitt ved $ay = bx$, hvor a og b er vilkårlige konstanter.

Kapittel 5.4

- 5.1 (a) 0
- (b) 0
- (c) 0
- (d) πR^2
- (e) 0
- (f) 0
- (g) $-2\pi R^2$
- (h) $2\pi R^2$
- (i) $2\pi R$
- (j) 2π

(k) $-\pi R^2$

5.2 (a) 0

(b) 0

(c) πR^2

(d) 0

(e) $2\pi R^2$

(f) 0

(g) 0

(h) 0

(i) 0

(j) 0

(k) 0

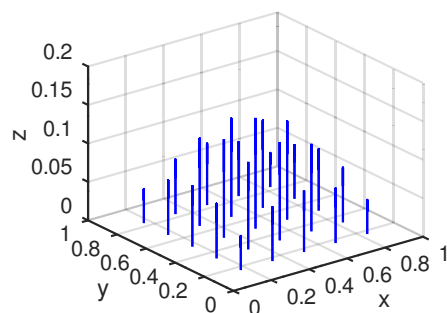
5.3 (a) $2\pi R^2 h$

(b) $-\frac{1}{2}\pi R^2 h$

5.4 (a) $[\alpha] = \frac{1}{\text{Lengde}^3 \text{ Tid}}$

(b) Piler (uten hode, men de peker alle oppover).

Her for $a = b = \alpha = 1$.



(c) Linjer parallelle med z -aksen.

(d) $\frac{1}{36}\alpha a^3 b^3$

(e) $\frac{1}{36}\rho\alpha a^3 b^3$

(f) abc

(g) ρabc

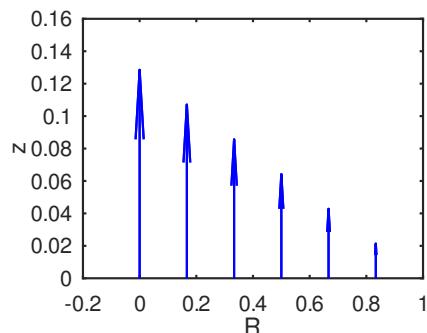
(h) $\frac{1}{36}\rho\alpha a^3 b^3 c \mathbf{k}$

(i) $\frac{4}{225}\rho\alpha^2 a^5 b^5 \mathbf{k}$

5.5 (a) $[\beta] = \frac{1}{\text{Tid}}$

(b) Piler (peker alle oppover).

Her for $a = \alpha = 1$.



(c) Linjer parallelle med z -aksen.

(d) $\frac{1}{3}\pi\beta a^3$

5.6 Areal $\frac{1}{2} \left(ac + ab + bc + \sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2} \right)$

Volum $\frac{1}{6}abc$

Kapittel 6.3

6.1 (a) 0

(b) $-\frac{2(x+y+z)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

(c) $(yz+xz+xy)e^{xyz}$

6.2 (a) **0**

(b) $\frac{2x(z^2 - y^2)\mathbf{i} + 2y(x^2 - z^2)\mathbf{j} + 2z(y^2 - x^2)\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$

(c) $[(xz - xy)\mathbf{i} + (xy - yz)\mathbf{j} + (yz - xz)\mathbf{k}]e^{xyz}$

6.3 $(n+2)r^n$

6.4 **0**

6.5 $(n+3)r^n$

6.6 **0**

Kapittel 7.7

7.2 Det finnes uendelig mange riktige svar, Helmholtz dekomposisjoner er ikke unike.

7.3 Her er forslag som ikke er unike:

(a) $\phi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ og $\mathbf{A} = \mathbf{0}$

(b) $\phi = \frac{1}{2}(-2x^2 + y^2 + z^2)$ og $\mathbf{A} = \mathbf{0}$

Kapittel 8.3

8.1 0

8.2 0

8.3 6

8.4 1

8.5 $\frac{1}{4}$

8.6 $\frac{1}{3}$

Kapittel 9.5

Kapittel 10.3

Kapittel 11.1

11.1 $\psi = -A\theta + B \ln R$ og $\mathbf{v} = \frac{A}{R}\mathbf{i}_R + \frac{B}{R}\mathbf{i}_\theta$.

11.2 $\psi = -\frac{2y}{x^2 + y^2}$ og $\mathbf{v} = \nabla\phi = \frac{2(x^2 - y^2)\mathbf{i} + 4xy\mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^2}$.

11.3 For $\phi = \phi(r)$:

$$\phi = -\frac{A}{r} + B \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \nabla\phi = \frac{A}{r^2}\mathbf{i}_r.$$

For $\phi = \phi(\theta)$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{A}{\sin\theta} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \nabla\phi = \frac{A}{r}\mathbf{i}_\theta.$$

Det går faktisk an å finne følgende uttrykk for $\phi(\theta) = \frac{A}{2} \ln \frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta + 1}$.

For $\phi = \phi(\varphi)$:

$$\phi = A\varphi + B \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \nabla\phi = \frac{A}{r \sin\theta}\mathbf{i}_\varphi.$$

11.4 Dersom vi plasserer kilden i $\mathbf{a} = \epsilon\mathbf{k}$ og sluket i $\mathbf{b} = -\epsilon\mathbf{k}$, så har vi $|\mathbf{r} - \mathbf{a}| = \sqrt{R^2 + (z - \epsilon)^2}$ og $|\mathbf{r} - \mathbf{b}| = \sqrt{R^2 + (z + \epsilon)^2}$ hvor $R^2 = x^2 + y^2$. Vi multipliserer kilden og sluket med en styrke $\frac{1}{\epsilon}$ og lar ϵ bli vilkårlig liten i superposisjonen

$$\phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z + \epsilon)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - \epsilon)^2}}}{\epsilon}$$

Dette er et $\frac{0}{0}$ uttrykk, og vi kan bruke L'Hôpitals regel med å derivere både teller og nevner med hensyn på ϵ

$$\phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{-(z + \epsilon)}{\sqrt{R^2 + (z + \epsilon)^2}^3} - \frac{(z - \epsilon)}{\sqrt{R^2 + (z - \epsilon)^2}^3}}{1} = -\frac{2z}{r^3}$$

Kapittel 12.8

12.1 (a) Partikkelbaner og strømlinjer er ulike fordi feltet ikke er stasjonært.

Vi må løse

$$\frac{dx}{dt} = \beta x \cos(\alpha t) \quad x(0) = x_0$$

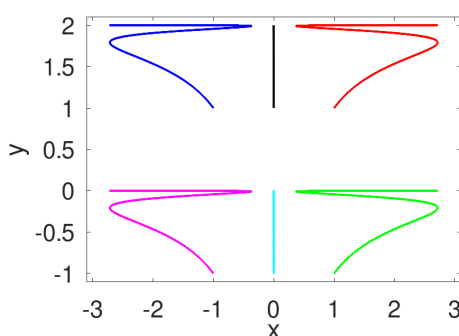
$$\frac{dy}{dt} = \gamma e^{-\alpha t} \quad y(0) = y_0$$

Begge likningene er separable,

$$\frac{dx}{x} = \beta \cos(\alpha t) dt \quad \text{og} \quad dy = \gamma e^{-\alpha t} dt$$

og vi finner løsning

$$x(t) = x_0 e^{\frac{\beta}{\alpha} \sin(\alpha t)} \quad \text{og} \quad y(t) = y_0 + \frac{\gamma}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$$



Figur for $\alpha = 1$ og $\beta = 1$ og $\gamma = 1$ for seks mulige startpunkter:

$$x_0 = 1, y_0 = 1$$

$$x_0 = -1, y_0 = 1$$

$$x_0 = -1, y_0 = -1$$

$$x_0 = 1, y_0 = -1$$

$$x_0 = 0, y_0 = 1$$

$$x_0 = 0, y_0 = -1$$

(b)

$$\frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

hvor

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -i\alpha\beta x \sin(\alpha t) - j\alpha\gamma e^{-\alpha t}$$

og

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = i\beta^2 x \cos^2(\alpha t)$$

12.2

$$\frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = (\alpha R^2 \mathbf{i}_\theta) \cdot \nabla (\alpha R^2 \mathbf{i}_\theta) = (\alpha R^2) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\alpha R^2 \mathbf{i}_\theta) = -\alpha^2 R^3 \mathbf{i}_R$$

12.3 Lokaldervivert

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

Konvektivt derivivert

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\omega^2 r \mathbf{i}_r - 2\omega v_0 \mathbf{i}_\theta$$

Personen vil altså bli akselerert både inn mot sentrum og motsatt rettet rotasjonsretningen. Hun vil derfor føle at hun blir kastet både utover og framover i karusellens rotasjonsretning.

- 12.4 Normalvektor og flatelement $\mathbf{n}d\sigma = \left(2\frac{hx}{a^2}\mathbf{i} - \mathbf{k}\right) dx dy$ dersom man parameteriserer med x og y , eller $\mathbf{n}d\sigma = \left(\mathbf{i} - \frac{a}{2\sqrt{hz}}\mathbf{k}\right) dy dz$ dersom man parameteriserer med y og z . Dette er ikke de eneste måtene å parameterisere på.

Trykkraft fra vannet på demningen

$$\mathbf{F}_{\text{vann}} = \int_{\text{demning}} p \mathbf{n} d\sigma = bh(p_0 + \frac{1}{2}\rho gh)\mathbf{i} - ab(p_0 + \frac{2}{3}\rho gh)\mathbf{k}$$

Summen av trykkraft fra vann på den ene siden og luft fra den andre siden

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}\rho gbh^2\mathbf{i} - \frac{2}{3}\rho gabh\mathbf{k}$$

Oppgaven kan også løses ved å se på kraftbalansen på et kontrollvolum avgrenset av demningen, vannoverflaten, og et vertikalt plan. Dette er ekvivalent med å anvende Gauss sats, krever ikke å finne normalvektor eller flatelement til demningen.

- 12.5 Massebevaring: Integrert fluks er bevart, $v_1\pi R_1^2 = v_2\pi R_2^2$, så $v_2 = v_1(\frac{R_1}{R_2})^2$.

Bernoullis likning: $\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$, så $p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left[1 - (\frac{R_1}{R_2})^4\right]$.

- 12.6 Partikkelakselerasjonen:

Lokaldervert $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$ (da feltet er stasjonært) og konvektivt derivert $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -c^2 \mathbf{i}_r$.

Følgelig er akselerasjonen til en vannpartikkel $\frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -c^2 \mathbf{i}_r$.

Fra Eulers likning $\frac{D\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\mathbf{k}$ finner vi trykket

$p = \rho c^2 r - \rho g z +$ en konstant.

Ved den frie overflaten, $z = \eta(r)$, der hvor vann møter luft, setter vi $p = p_0$ som er det konstante lufttrykket, og finner formen på den frie overflaten

$$\eta(r) = \frac{c^2 r}{g} + \text{enkonstant}$$

Vi har funnet at overflaten skal ha formen til et kremmerhus, det stemmer ikke helt med fotografiet, men kanskje det omtrent stemmer i et avgrenset område av fotografiet?

- 12.7 Feltet er stasjonært, da er partikkelbanene lik strømlinjene, og vi skal regne ut partikkel-akselerasjonen

$$\frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\alpha^2 R^3 \mathbf{i}_R$$

Eulers likning

$$\frac{D\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g}$$

hvor $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ er tyngdens akselerasjon og $\nabla p = \mathbf{i}_R \frac{\partial p}{\partial R} + \frac{\mathbf{i}_\theta}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial z}$.

Bruk partikkelakselerasjonen vi fant, splitt opp likninga i tre komponenter

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \rho \alpha^2 R^3 \quad \text{og} \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

og finn

$$p(R, \theta, z) = \frac{\rho \alpha^2}{4} R^4 - \rho g z + c$$

hvor c er en konstant.

Ved overflaten $z = \eta(R, \theta)$ er trykket lik lufttrykket $p = p_0$, om vi setter dette inn kan vi løse

$$\eta(R, \theta) = \frac{\alpha^2}{4g} R^4 + \frac{c - p_0}{\rho g}$$

Vi kan bestemme konstanten c ved å insistere på at det totale volumet av vann i koppen er bevart

$$\int_0^{\frac{D}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\eta(R, \theta)} R \, dz \, d\theta \, dR = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 h$$

og derfor

$$\frac{c - p_0}{\rho g} = h - \frac{\alpha^2}{12g} \left(\frac{D}{2} \right)^4$$

og vi får svaret

$$\eta(R, \theta) = h + \frac{\alpha^2}{4g} R^4 - \frac{\alpha^2}{12g} \left(\frac{D}{2} \right)^4$$

Kunne vi ha brukt Bernoullis likning? Hastighetsfeltet har virvling, derfor fungerer Bernoullis likning kun langs strømlinjer, men strømlinjene er kun sirkler rundt z -aksen. Derfor vil ikke Bernoullis likning kunne si noe om hvordan ting endrer seg som funksjon av radius R . Bernoullis likning hjelper oss ikke her!

12.8 Eulers likning

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}$$

hvor $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ er tyngdens akselerasjon og $\nabla p = \mathbf{i}_R \frac{\partial p}{\partial R} + \frac{\mathbf{i}_\theta}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial z}$.

Vi har $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$, og $\mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{U}{\sqrt{Ra}} e^{\frac{R}{a}} \frac{\partial}{\partial \theta}$, og $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{U^2}{a} e^{\frac{2R}{a}} \mathbf{i}_R$.

Vi splitter opp likninga i sine tre komponenter

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \rho \frac{U^2}{a} e^{\frac{2R}{a}} \quad \text{og} \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

og vi finner

$$p(R, \theta, z) = \frac{\rho U^2}{2} e^{\frac{2R}{a}} - \rho g z + c$$

hvor c er en konstant.

Ved overflaten $z = \eta(R, \theta)$ er trykket lik lufttrykket $p = p_0$. Vi setter inn og finner

$$\eta(R, \theta) = \frac{U^2}{2g} e^{\frac{2R}{a}} + \frac{c - p_0}{\rho g}$$

Vi kan bestemme konstanten c ved å insistere på at det totale volumet av vann i koppen er bevart

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\eta(R, \theta)} R \, dz \, d\theta \, dR &= \pi a^2 h \\ 2\pi \int_0^a \frac{U^2 R}{2g} e^{\frac{2R}{a}} + \frac{c - p_0}{\rho g} R \, dR &= \pi a^2 h \\ 2\pi \left[\frac{U^2 a^2}{4g} (e^2 + 1) + \frac{c - p_0}{\rho g} \frac{a^2}{2} \right] &= \pi a^2 h \\ \frac{c - p_0}{\rho g} &= h - \frac{U^2}{4g} (e^2 + 1) \end{aligned}$$

Til slutt får vi svaret

$$\eta(R, \theta) = \frac{U^2}{2g} e^{\frac{2R}{a}} + h - \frac{U^2}{4g} (e^2 + 1)$$

Kunne vi ha brukt Bernoullis likning? Hastighetsfeltet har virvling, derfor fungerer Bernoullis likning kun langs strømlinjer, men strømlinjene er kun sirkler rundt z -aksen. Derfor sier ikke Bernoullis likning noe om hvordan ting endrer seg som funksjon av radius R . Så nei, Bernoullis likning hjelper oss ikke her!

12.9 Den frie overflaten synker $\frac{dh}{dt} = -V$.

Vannet er inkompressibelt $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Innsatt i Gauss sats gir dette at innkommende fluks i overflaten er lik utgående fluks i utløpet. Dersom vi kan anta at V og v er konstant i tverrsnittet har vi

$$AV = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 v$$

Kan vi bruke Bernoullis likning? Tettheten er konstant. Vi kan anta at vannet er nesten ideelt, friksjonen vil ikke være stor. Vi kan anta at tømmingen er nesten stasjonær, fordi overflaten vil synke langsomt. Uansett om det er virvling eller ikke, la oss følge strømlinjer som går fra overflaten til utløpet. Så det burde være rimelig å satse på at Bernoullis likning kan brukes som en god tilnærming.

La oss se på strømlinjer fra overflaten til utløpet. I begge ender av strømlinjene er trykket lik lufttrykket p_0 . Dersom vi kan anta at prosessen er stasjonær og friksjonsfri har vi Bernoullis likning

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gh = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} - gL$$

Vi får

$$g(h + L) = \frac{v^2}{2} \left[1 - \left(\frac{\pi D^2}{4A} \right)^2 \right]$$

men ettersom $\left(\frac{\pi D^2}{4A} \right)^2 \ll 1$ i vårt tilfelle kan vi med god tilnærming skrive

$$g(h + L) = \frac{v^2}{2} = \frac{V^2}{2} \left(\frac{4A}{\pi D^2} \right)^2$$

eller

$$\sqrt{g(h + L)} = -\frac{dh}{dt} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{4A}{\pi D^2}$$

Denne likninga er separabel. La oss separere h og t og integrere fra full til tom tank

$$-\int_h^0 \frac{dh'}{\sqrt{h' + L}} = \int_0^t \sqrt{2g} \frac{\pi D^2}{4A} dt'$$

som gir

$$t = \frac{8A(\sqrt{h + L} - \sqrt{L})}{\sqrt{2g}\pi D^2}$$

Vi har gjort to antakelser som er svært gode:

- $D^2 \ll A$
- Vi kan i praksis se bort fra vannet som er igjen i utløpsrøret.

Vi har gjort tre antakelser som er mer tvilsomme:

- Bernoullis likning kan kun brukes for stasjonært hastighetsfelt, men tømningen av karet er ikke stasjonær fordi overflaten synker.
- Vi har antatt konstant hastighet i tverrsnittet ved den frie overflaten og ved utløpet.
- Vi har antatt at det ikke er friksjon.

Vår erfaring fra demonstrasjonsforsøket gjort i en forelesning var at disse “tvilsomme” antakelsene ga en feil på noen få prosent. Kanskje feilen blir enda mindre for tømningen av bassenget ettersom arealet A er mye større enn tverrsnittet av utløpet?

12.10

$$\frac{2b^2}{5a^2\sqrt{2g}} \left(h_0^{\frac{5}{2}} - h_1^{\frac{5}{2}} \right)$$

Kapittel 13.2

13.1 Vi må løse Laplace likning $\nabla^2 T = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial T}{\partial R} \right) = 0$ for $a \leq R \leq b$ med randkrav $T(a) = T_a$ og $T(b) = T_b$.

Vi får $T(R) = \delta \ln R + \gamma$ og randkravene gir $\delta = \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}}$. Det er ikke nødvendig å bestemme γ .

Varmeflukstettheten er gitt ved Fouriers lov $\mathbf{q} = -k \nabla T = -k \mathbf{i}_R \frac{\partial T}{\partial R} = -k \frac{\delta}{R} \mathbf{i}_R$.

Den integrerte varmekstettheten er $Q = \int \mathbf{q} \cdot \mathbf{i}_R d\sigma$ hvor $d\sigma = R d\theta dz$.

Den integrerte varmekstettheten per rørlengde blir $\int_0^{2\pi} -k \frac{\delta}{R} \mathbf{i}_R \cdot \mathbf{i}_R R d\theta = -2\pi k \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}}$.

13.2 Varmeflukstettheten er $\mathbf{H} = k\alpha T_0 \frac{|x|}{x} e^{-\alpha|x|} \mathbf{i}$ for $x \neq 0$. Denne peker vekk fra origo.

Den tidsderivate av temperaturen er $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \alpha^2 T_0 e^{-\alpha|x|}$ for $x \neq 0$. Denne er positiv for $x \neq 0$, så temperaturen stiger i tid overalt utenom origo.

Bibliografi

- [1] V. Bjerknes. *Teoretisk fysikk*. H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard), 1929.
- [2] B. Gjevik and M. W. Fagerland. *Feltteori og vektoranalyse*. Farleia Forlag, 2018.
- [3] T. Lindstrøm and K. Hveberg. *Flervariabel analyse med lineær algebra*. Gyldendal, 2015.
- [4] J. E. Marsden and A. J. Tromba. *Vector calculus*. W. H. Freeman and Company, 2003.
- [5] P. C. Matthews. *Vector calculus*. Springer, 1998.
- [6] K. Rottmann. *Matematisk formelsamling*. Universitetsforlaget, 2019.
- [7] H. M. Schey. *Div, grad, curl and all that*. W. W. Norton & Company, 1973.

Register

- akselerasjon, 12
- arbeid, 52
- Arkimedes prinsipp, 124, 125
- asimut, 118, 120
- asimutal koordinat, 118, 120

- barotrop, 163
- Bernoullis likning, 153
- Buckinghams Pi teorem, 26

- Cauchy–Riemanns likninger, 130
- Coriolis kraft, 6
- Coulomb gauge, 86
- curl, 77

- datamaskin, 28
- del, 38
- dimensjonsanalyse, 26
- dipol, 134
- divergens, 74
- dyade, 5
- dyadiske produkter, 92
- dynamisk grensebetingelse, 148
- dynamisk randkrav, 148

- ekspansjon, 75
- ekviskalarflate, 45
- elektromagnet, 15
- enhetsvektor, 5
- enkelt sammenhengende område, 100
- Eulers likning, 145

- fart, 5
- fasit, 179
- felt, 6
- fluks, 63
- flukstetthet, 63
- friksjonskraft, 6
- fysiske dimensjoner, 20
- fysiske enheter, 20

- gauge, 86, 91, 129
- gauge invariants, 86
- gauge transform, 86, 91
- Gauss lov, 97
- Gauss sats, 95
- GeoGebra, 28
- gnuplot, 28
- Green’s andre identitet, 124
- Green’s første identitet, 124
- Greens sats, 103

- hastighet, 5
- Helmholtz dekomposisjon, 90
- hydrostatisk trykk, 66
- høyrehånd, 10

- ideelt fluid, 145
- indre energi, 170
- integrert fluks, 63
- isotropt, 66

- Joule, 52
- Julia, 28

- kalori, 170
- kartesiske koordinater, 109
- Kelvins teorem, 161
- kilde, 132
- kogger, 33
- konservativt felt, 42, 55, 103
- kontinuitetslikning, 142
- kontraksjon, 75
- kontrollvolum, 142
- krumlinjede koordinater, 10
- krumlinjet, 11
- kryssprodukt, 9
- kulekoordinater, 118

- Laplace likning, 83
- Laplace operator, 83

$\text{\LaTeX}$, 28
 Leibniz regel, 161
 Lorentz kraft, 6

 materiell derivert, 138
 Matlab, 28

 nabla, 38
 Navier–Stokes likning, 145
 Newtons gravitasjonslov, 6, 96, 105
 nord, 15

 Octave, 28
 ordinær derivert, 37
 ortogonal, 8
 overflatespenning, 148

 partiell derivert, 37
 partikkelbane, 12
 partikkelderivert, 138
 Poisson likning, 83
 polar vinkel koordinat, 118
 polare koordinater, 10
 posisjonsvektor, 5
 potensial, 103
 prograd, 15, 79, 81
 prosess, 6
 punktkilde, 132
 punktsluk, 132
 punktvirvel, 132
 Python, 28

 quiver, 33

 retningsderivert, 39
 retrograd, 15, 81
 rettlinjede koordinater, 8
 rettlinjet, 8
 rettvinklet koordinatsystem, 9
 rotasjon som stivt legeme, 13

 sentripetalakselerasjon, 14, 17
 Simon Stevin, 125
 sirkulasjon, 55
 skalar, 5
 skalarpotensial, 42, 103
 skalarprodukt, 8
 skjærstrøm, 81, 88
 sluk, 132

 solenoid, 15, 75
 spesifikk, 170
 spesifikk varme, 170
 spesifikk varmekapasitet, 171
 Stokes sats, 99
 strømfunksjon, 86
 strømrør, 89
 sylinderkoordinater, 120
 sør, 15

 temperatur, 170
 tensor, 5
 termisk energi, 170
 termodynamisk tilstandslikning, 170
 tetraeder, 73
 TikZ, 28
 Toricellis lov, 157, 158
 totalt differensial, 38
 trykk, 66
 trykkraft, 66

 varme, 170
 varmekapasitet, 171
 vektor, 5
 vektorpotensial, 85
 vest, 15
 vindingstall, 56
 vinkelfart, 13
 vinkelhastighetsvektor, 13
 virvling, 77
 volumetrisk varme, 170

 øst, 15