

UiO : **Matematisk institutt**

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Lars Willas Dreyer

Bølger i en slukstrøm

MEK3200 — Prosjektarbeid i mekanikk

Veileder: Karsten Trulsen



2020

Sammendrag

Artikkelen tar for seg bølgebevegelser i en bunnløs slukvirvel. Sluket modelleres ved en likevektsflate for en Rankine-virvel. Bidraget fra overflatespenning på denne likevektsflata vurderes, og en grense for når denne kraften kan neglisjeres blir utledet. Vi utleder også et ortogonalt koordinatsystem som følger slukets likevektsflate. Videre finner vi formen på Eulers trykklikning og Laplace-likningen i dette systemet. Til sist utledes dispersjonsrelasjonen for tyngde-kapillærbølger i den innerste delen av sluket.

Introduksjon

Et viktig konsept i fluidmekanikk og bølge teori er dispersjonsrelasjoner. Dette er en likning som forbinder en bølges frekvens og bølgetall. Foruten at disse to størrelsene forteller oss om hvor fort bølgene svinger i tid og rom, så vil en dispersjonsrelasjon også brukes til å finne en bølges fase- og gruppehastighet. En god innføring i bølge teori og viktigheten av dispersjonsrelasjoner kan blant annet finnes i [Ach90, kapittel 3]. Fenomenet vi ønsker å betrakte her er bølger på overflata av vann rundt en slukstrøm. Slike strømmer opptrer ofte i naturen og i hverdagen, for eksempel når en propp dras ut fra sluket i en fylt vask.

Vi kommer til å begynne med å utlede en matematisk formulering av sluket under antagelsen at sluket skaper en Rankine-virvel, altså en virvlingsfri, roterende strøm om origo. Med en likning for hvordan sluket er utformet, kan vi da utlede et ortonormalt sett med enhetsvektorer for å danne et koordinatsystem som følger sluket. Et slikt koordinatsystem er gunstig da det lar oss beskrive aksene til bølgeforplantningen. Mange problemstillinger i fluidmekanikk, også vår situasjon med overflatebølger, uttrykkes ved hjelp av partielle differensiallikninger og grensebetingelser. I denne artikkelen kommer vi til å se på Laplace-likningen, Eulers trykklikning og den kinematiske grensebetingelsen. Disse likningene er avhengige av koordinatsystemet man benytter seg av, og siden systemet vårt ikke er et alment brukt, må vi utlede hvordan likningene ser ut i vårt tilfelle.

Med de nye likningene på plass kan vi lete etter en dispersjonsrelasjon ved anta planbølger med liten amplitude og kun én frekvens. Vi kommer til å følge fremgangsmåten til [Tru19, kapittel 2.2] for å finne en dispersjonsrelasjon. Til slutt diskuterer vi hvor godt dispersjonsrelasjonen overenstemmer med virkeligheten og våre antagelse. Vi ser også på hva slags bølger dispersjonsrelasjonen beskriver.

Notasjon

I denne artikkelen kommer vi til å la (r, θ, z) betegne koordinatene i et sylindrisk koordinatsystem, og vi lar $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{k}})$ være deres respektive enhetsvektorer. Ethvert koordinatsystem har normaliseringsfaktorer, og for et koordinatsystem (x_1, x_2, x_3) lar vi h_1, h_2 og h_3 betegne disse. Enhetsvektorer betegnes i fet skrift med hatt, og eksempelvis vil $\hat{\mathbf{n}}_\eta$ være enhetsnormalvektor for en flate η . Trykk betegnes ved p , g er tyngdeakselerasjonen, mens \mathbf{k} er bølgevektoren og ω betegner en bølges frekvens.

Sluket

En velkjent forenklet modell av en virvel er Rankine-virvelen, som ofte defineres til å være et todelt hastighetsfelt. I sylinderkoordinater får feltet formen

$$\mathbf{u} = u_\theta(r)\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \text{der} \quad u_\theta = \begin{cases} \Gamma r, & r < a, \\ \frac{\Gamma a^2}{r}, & r \geq a. \end{cases} \quad (1)$$

Her er, Γ sirkulasjonen og r avstanden fra virvelens sentrum. I likning (1) er a overgangsradiusen mellom de to fasene i virvelen. Vi er i utgangspunktet interessert i et

bunnløst sluk, og kommer dermed til å i starten kun se på hastighetskomponenten for $r > a$. Dette har som konsekvens at a blir radien på hullet som sluket munner ut i. Dette gir oss følgende hastighetsfelt

$$\mathbf{u}(r) = \begin{cases} u_r &= 0, \\ u_\theta &= \frac{\Gamma a^2}{r}, \\ u_z &= 0. \end{cases} \quad (2)$$

Vi ønsker å benytte oss av hastighetsfeltet i likning (2) til å finne overflata til sluket som dannes av denne virvelen. Eulers likninger i sylinderkoordinater er velkjent, og hvis vi setter hastighetsfeltet vårt inn i likningen så sitter vi igjen med følgende system for trykket, p ,

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{\Gamma^2 a^4}{r^3}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (3)$$

Her er ρ vannets massetetthet. Ved å integrere opp likningene over, ser vi at p er konstant med hensyn på variasjoner i θ og at trykket i vannet må være på formen

$$p(r, z) = -\rho \frac{\Gamma^2 a^4}{2r^2} - \rho g z + p_0. \quad (4)$$

Vi har latt referansetrykket være p_0 , og vi ser at uendelig langt borte fra sluket blir vannets overflatetrykk likt lufttrykket. Vi krever at summen av kreftene ved overflata skal forsvinne, og tilsvarende som [Tru19, likning 52] får vi at

$$p - p_0 - \gamma \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\eta_0} = 0. \quad (5)$$

Hvis vi setter inn for p ser vi da at ved overflata reduseres likninga til

$$\rho g z = -\rho \frac{\Gamma^2 a^4}{2r^2} - \gamma \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\eta_0}. \quad (6)$$

I likninga over er det et ledd vi ikke har kontroll på, og det er bidraget fra overflatespenninga. Dette er en kraft som prøver å utjevne vannoverflata, og vi kan i den forstand si at den vil prøve å utjevne effekten av sluket på vannets krumning. Derfor kan vi anta at krumningen, K_0 , på et sluk uten overflatespenning er større enn krumningen, K , på et sluk med overflatespenning. Hvis vi lar $\eta_0(r, z)$ være definert ved

$$\eta_0 = z + \frac{\Gamma^2 a^4}{2gr^2}, \quad (7)$$

ser vi at ekvivalenflatene til η_0 vil korrespondere til ulike sluk upåvirket av overflatespenning. Langs disse flatene vil $\nabla \eta_0$ stå vinkelrett på overflata. Det betyr at normalvektoren er gitt som

$$\hat{\mathbf{n}}_{\eta_0} = \frac{\nabla \eta_0}{|\nabla \eta_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta^2/r^6}} \left(-\frac{\zeta}{r^3} \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{k}} \right). \quad (8)$$

Her har vi benyttet oss av substitusjonen

$$\zeta = \frac{\Gamma^2 a^4}{g}, \quad (9)$$

som kommer til å bli med oss gjennom resten av artikkelen. Med dette uttrykket for normalvektoren kan vi finne krumningen K .

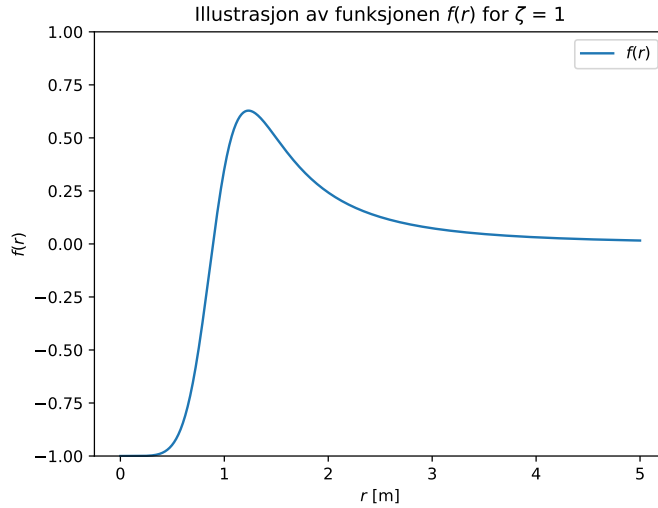
$$K = \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\eta_0} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left[-\frac{\zeta}{r^3} \left(\sqrt{1 + \frac{\zeta^2}{r^6}} \right)^{-1} \right] \quad (11)$$

$$= \frac{1}{r} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{r^6 + \zeta^2}} \left[\frac{3r^6}{r^6 + \zeta^2} - 1 \right] \right) \quad (12)$$

$$= \frac{1}{r} f(r) \quad (13)$$

Her har vi innført en hjelpefunksjon $f(r)$. Vi gjør en viktig observasjon, nemlig det at funksjonen f er oppad og nedad begrenset av henholdsvis $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ i $r = \sqrt[6]{\frac{7\zeta^2}{2}}$ og -1 i $r = 0$.¹ Vi lar r_m betegne r -koordinaten til f sitt toppunkt. I figur 1 ser man også at f avtar hurtig mot null ettersom r blir større.



Figur 1: Figuren viser $f(r)$ på intervallet $r \in [0, 5]$ for $\zeta = 1$. Som man kan se på grafen er den oppad og nedad begrenset, samt at den går mot null når $r \rightarrow \infty$.

Dette tyder på at vi kan finne en funksjon K_m som dominerer funksjonen for krumningsfunksjonen $K(r)$ overalt, men som fremdeles går mot 0 når r går mot uendelig. En tydelig kandidat for dette er en funksjon som går som $1/r$, men siden koordinatet r_m til det lokale toppunktet er avhengig av slukstyrken, så kan potensielt r_m være så stor at $f(r_m) > 1/r_m$. Vi prøver med en annen kandidat

$$K_m(r) = \frac{r_m}{r^2}.$$

For å se om K_m er egna må vi vite at $K_m(r) > K(r)$ for alle r . Fra definisjonen av K_m vet vi at $K_m > K$ hvis $r < r_m$, da $K_m(r_m) = 1 > \max_{r \in (0, r_m)} |K(r)|^2$ og K_m er en strengt

¹Øvre grense bekreftet ved WolframAlpha, se <https://www.wolframalpha.com/input/?i=maximum+of+%28%28sqrt%28x%5E6+%29%29+with+respect+to+x>

²Grunnen til at vi bruker absoluttverdi er at fortegnet på K kun bestemmer retninga på kraften. Vi kommer senere til å sette et retningsuavhengig krav på den kapillære krafta.

avtagende funksjon. Vi er dermed avhengig av at funksjonsverdien til K avtar raskere enn K_m . Vi ser at

$$\begin{aligned} K_m - K &= \frac{1}{r} \left(\frac{r_m}{r} - \frac{\zeta}{\sqrt{r^6 + \zeta^2}} \left[\frac{3r^6}{r^6 + \zeta^2} - 1 \right] \right), \\ &> \frac{1}{r} \left(\frac{r_m}{r} - \frac{3\zeta r^6}{(r^6 + \zeta^2)^{3/2}} \right), \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{r_m}{r} - \frac{3\zeta}{(r^2 + \zeta^2/r^4)^{3/2}} \right), \\ &> \frac{1}{r} \left(\frac{r_m}{r} - \frac{3\zeta}{r^3} \right). \end{aligned}$$

En funksjon som går mot null raskere enn r^{-4} , går definitivt raskere mot null enn en funksjon som går som r^{-2} . Vi kan dermed konkludere med at K_m må være større enn K for alle $r \in [0, \infty)$. Hvis vi betrakter kraftregnskapet ved overflata vi så i likning (6), ser vi at summen av kreftene på overflata kan forenkles til

$$\rho g z + \rho \frac{\Gamma^2 a^4}{2r^2} + \gamma \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}_{n_0} < \rho g z + \rho \frac{\Gamma^2 a^4}{2r^2} + \gamma K_m.$$

Likningen over setter den kapillære krafta til å være betydelig sterkere enn det den egentlig er. Dette er ikke et problem ettersom vi ønsker å finne ut av når man kan neglisjere overflatespenning, og siden K_m dominerer K overalt, vil alltid K kunne neglisjeres hvis K_m kan det. Krever vi at kreftene skal være i balanse, får vi ei overflate på formen

$$z(r) = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2} \zeta + \frac{r_m}{\rho g} \gamma \right). \quad (14)$$

Vi velger å kreve at hvis man skal kunne neglisjere de kapillære kreftene, må endringen i slukets høyde $z(r)$ høyst være en tiendedel av hva det ville vært uten overflatespenning. Det gir oss en likning på formen

$$\frac{\zeta}{2r^2} \geq 10\gamma \frac{r_m}{\rho g} \frac{1}{r^2}.$$

Vi husker at $r_m = \sqrt[6]{\frac{7\zeta^2}{2}}$, og vi kan løse ulikheten over for å få følgende stabilitetsbetingelse

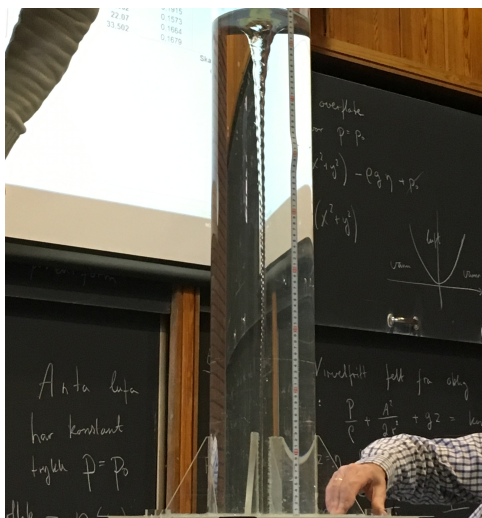
$$\zeta \geq c \left(\frac{\gamma}{\rho g} \right)^{3/2}, \quad \text{der } c = 20^{3/2} \sqrt[6]{7/2} \approx 110. \quad (15)$$

I [Ang18, p 52] måles vannets overflatespenning til å være $\gamma \approx 70.68 \cdot 10^{-3}$ N/m og vannets massetetthet til $\rho = 996.89$ kg/m³. Hvis vi benytter oss av den kjente verdien for jordas tyngdeakselerasjon, får vi følgende minsteverdi for ζ

$$\zeta_{min} \approx 2.141 \cdot 10^{-6} m^3. \quad (16)$$

En ytterligere interessant størrelse for oss å beregne er hvor stor ζ er for et faktisk sluk. Et eksempel på et slikt sluk kan man finne i denne videoen fra et eksperiment gjort i kurset "MEK1100 - Feltteori og vektoranalyse på UiO våren 2017. Et bilde av et slikt eksperiment finner vi på emnesiden for vårsemesteret 2016 og kan sees i figur 2. I likning (14) kan vi finne en likning for ζ gitt r og z . Denne blir

$$\frac{1}{2} \zeta + \frac{\gamma}{\rho g} \sqrt[6]{\frac{7}{2}} \zeta^{1/3} = -zr^2. \quad (17)$$



Figur 2: Bildet viser en slukvirvel en sylindrisk tank fylt med vann. I bunnen av sylindern er det et lite sluk med radius $a = 0.5$ cm. Sylindern har en radius på $r = 8.5$ cm, og vannet har en høyde $h = 94$ cm fra bunnen. Foto: UiO

Vi ønsker å løse likninga over for ζ med de overnevnte verdiene for γ og ρ for vann, den observerte dybden h og slukbredden a i figur 2. Ved $z = -h$ og $r = a$ har vi en likning for ζ som kan løses numerisk. Ved hjelp av biseksjonsmetoden finner vi at funksjonen over har en positiv rot i

$$\zeta_{sluk} = 4.63 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \quad (18)$$

Som er omlag 20 ganger sterkere enn minstekravet vi har satt for å kunne se vekk fra overflatespenning i beregningen av likevektsflata. Vi ser også at hvis vi kun er interesserte i positive verdier for ζ , vil den deriverte mhp. ζ av polynomet i likning (17) være strengt positiv. Dette betyr at ζ aldri faller under 0 etter ζ_{sluk} . Dermed er ζ_{sluk} den eneste gyldige løsningen av polynomet, og følgelig slukstyrken i figur 2.

Koordinatsystemet

Slukvirvelen vår er en kontinuerlig overflate, men med et singularært punkt ved $r = 0$. Dette medfører at velkjente koordinatsystemer egner seg dårlig til å forenkle problemet. Situasjonen vi er interessert i utarter seg på overflata av et slikt sluk, og et koordinatsystem tilpasset flaten vil sannsynligvis forenkle likningene vi ønsker å løse. Vi velger derfor å heller finne vårt eget koordinatsystem basert på en Rankine-virvel. I forrige seksjon fant vi at overflata til dette sluket parametriseres som (r, θ, z) der $r \in (0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ og z er gitt ved

$$z(r) = -\frac{\Gamma^2 a^4}{2g r^2}. \quad (19)$$

Vi ønsker å utlede et ortogonalt høyrehåndssystem som følger denne kurven, et tema som [Mat98, kapittel 6] gir en god og oversiktlig innføring i. I forrige seksjon fant vi at ekviskalarflatene til η_0 i likning (7) vil følge ulike sluk, og at disse vil ha normalvektorer, $\hat{\mathbf{n}}$, gitt ved

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla \eta_0}{|\nabla \eta_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta^2/r^6}} \left(-\frac{\zeta}{r^3} \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{k}} \right). \quad (20)$$

Siden $\hat{\mathbf{n}}$ står normalt på en kurve definert ved parametrene z, r , kan det være naturlig å se etter en kurve avhengig av de samme parametrene hvis normalvektor alltid står normalt

på $\nabla\eta_0$. Vi kaller denne kurven for χ , og krever at:

$$\nabla\eta_0 \cdot \nabla\chi = -\frac{\zeta}{r^3} \frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{\partial\chi}{\partial z} = 0. \quad (21)$$

Vi ser at hvis vi antar at χ har formen

$$\chi = z + \frac{1}{4} \frac{r^4}{\zeta}, \quad (22)$$

så løser χ likning (21). Dette betyr at gradienten til χ vil være en tangentvektor $\hat{\mathbf{n}}_\chi$ for sluket, og har formen

$$\hat{\mathbf{n}}_\chi = \frac{\nabla\chi}{|\nabla\chi|} = \frac{1}{\sqrt{1+r^6/\zeta^2}} \left(\frac{r^3}{\zeta} \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{k}} \right). \quad (23)$$

Siden vi vet at disse to kurvene har enhetsvektorer som står normalt på hverandre, kan disse være hensiktsmessige som grunnlag for et koordinatsystem. I utledningen av likningen for sluket viste vi også at formen på sluket ikke varierte med θ . Det gjør at vi kan definere et koordinatsystem (x_1, x_2, x_3) med enhetsvektorer $\hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{n}}_\chi$, $\hat{\mathbf{x}}_2 = \hat{\boldsymbol{\theta}}$ og $\hat{\mathbf{x}}_3 = \hat{\mathbf{n}}$.

Vi ser at $\hat{\mathbf{x}}_1$ følger sluket i alle punkter (r, θ, z) og at koordinatet x_1 må være lik kurven η_0 . Vektoren $\hat{\mathbf{x}}_3$ følger normalvektoren til sluket i alle punkter, og må ha koordinatet $x_3 = \chi$. Siden ingen av disse vektorene har en komponent i θ -retning, betyr dette at (x_1, x_2, x_3) er et ortogonalt koordinatsystem.

I tabell 1 ser vi en oppsummering av hvordan koordinatene (x_1, x_2, x_3) relateres til sylinderkoordinater, formen på enhetsvektoren og skaleringsfaktorene h_1, h_2 og h_3 . For å gjøre resonnementene lettere å følge og koordinatene mer intuitive, foreslår vi å tenke på x_1 som den lokalt oppfattede radien. Koordinatet uttrykker hvor langt fra selve sluket et punkt befinner seg. Tilsvarende vil x_2 være et rent vinkelkoordinat som uttrykker hvor i sluket man befinner seg ved en gitt avstand. Den lokale høyden, hvis akse også er den bølgen gjør utslag langsmed, har vi da latt betegnes ved x_3 .

Koordinat	Normaliseringsfaktor	Enhetsvektor
$x_1 = z + \frac{\zeta}{2R^2}$,	$h_1 = \sqrt{1 + R(v)^6/\zeta^2}$,	$\hat{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{h_1} \left(\frac{R(v)^3}{\zeta} \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{k}} \right)$,
$x_2 = \theta$,	$h_2 = R(v)$,	$\hat{\mathbf{x}}_2 = \hat{\boldsymbol{\theta}}$,
$x_3 = z + \frac{1}{4\zeta} R^4$	$h_3 = \sqrt{1 + \zeta^2/R(v)^6}$	$\hat{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{h_3} \left(-\frac{\zeta}{R(v)^3} \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{k}} \right)$

Tabell 1: Tabellen gir en oversikt over koordinatene som følger en slukstrøm uttrykt ved sylinderkoordinatene (r, θ, z) sammen med koordinatenes tilhørende enhetsvektorer og normaliseringsfaktorer. For en observatør på slukvirvelen vil x_1 oppfattes som retningen inn/ut fra sluket, x_2 vil være retninga der man verken forlytter seg opp eller ned i sluket og x_3 vil oppfattes som den lokale oppover-retninga.

Likningssystemet

Med et passende koordinatsystem og parametrisering av sluket etablert kan vi utlede likningene vi trenger. Vi kommer til å begrense oss til bølger med liten amplitude. Det vil si at det er en liten perturbasjon av slukets overflate η ved lokal høyde $x_3 = 0$. Dette gjør at overflata kan skrives som

$$\eta(x_1, x_2, t) = \eta_0 + \epsilon\eta_b(x_1, x_2, t) = \epsilon\eta_b(x_1, x_2, t), \quad (24)$$

der $\epsilon \ll 1$. Videre ser vi fra konstruksjonen av sluket at vi har et underliggende konservativt hastighetsfelt \mathbf{u}_s , og på toppen av denne strømmen har vi en liten bølgebevegelse \mathbf{u}_b . Ved å kombinere disse feltene får vi et hastighetsfelt

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = u_i(x_1, x_2, x_3, t)\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{u}_s(x_1, x_3) + \epsilon\mathbf{u}_b(x_1, x_2, x_3, t),$$

for $i = 1, 2, 3$ og $\epsilon \ll 1$. Siden slukfeltet er konservativ er det rimelig også å anta at bølgefeltet er det. Det betyr at hastighetsfeltet over kan skrives som gradienten til et hastighetspotensial ϕ . Siden derivasjon er en lineær operator gir det oss at hastighetspotensialet ϕ kan skrives som summen av potensialene til de to feltene \mathbf{u}_s og \mathbf{u}_b . Dette gir oss

$$\phi(x_1, x_2, x_3, t) = \phi_s(x_1, x_2, x_3) + \epsilon\phi_b(x_1, x_2, x_3, t). \quad (25)$$

Videre i seksjonen ønsker vi å utlede de generelle likningene som beskriver problemet vi er ute etter å løse. Siden vi jobber med et virvel- og divergensfritt felt, er det naturlig å benytte seg av potensialteori for å beskrive strømmingene. Et naturlig sted å starte er å finne Laplace-likninga i vårt nye koordinatsystem.

Laplace-likningen

Nå som vårt nye koordinatsystem har blitt definert, ønsker vi å se hvorvidt Laplace-likninga lar seg separere i det nye koordinatsystemet. Likninga er velkjent, nemlig $\nabla^2 f = 0$. Venstresida av likningen har følgende form i vårt nye koordinatsystem

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right), \\ &+ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right), \\ &+ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_2 h_1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial x_3} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

der $f = f(x_1, x_2, x_3)$. Vi vet fra definisjonen av koordinatsystemet at $h_1(x_1, x_3) = \sqrt{1 + R^6/\zeta^2}$, $h_2(x_1, x_3) = R$, $h_3(x_1, x_3) = \sqrt{1 + \zeta^2/R^6}$ og at siden $x_2 = \theta$, kan vi skrive om Laplace-likningen til

$$\frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) = 0. \quad (27)$$

Vi ønsker å se hvorvidt likning (27) er en separabel PDE. For å vise om dette er tilfellet antar vi en løsning f på formen $f = X_1(x_1)X_2(x_2)X_3(x_3)$. Hvis vi forkaster alle ikke-trivielle løsninger, kan vi dividere likningen over med f . Dette gir oss

$$\frac{h_2}{h_1 h_3 X_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_3 h_2}{h_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right) + \frac{h_2}{h_1 h_3 X_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \right) = -\frac{1}{X_2} \frac{\partial^2 X_2}{\partial x_2^2} = \lambda^2. \quad (28)$$

Dermed kan vi se at venstresida av likningen avhenger av x_1 og x_3 , mens høyresida kun avhenger av x_2 . Siden dette skal holde for alle (x_1, x_2, x_3) så må begge sidene være lik en felles konstant som vi setter til λ^2 . Dette betyr at vi kan separere ut effektene av slukets vinkelkoordinat x_2 . Vi legger også merke til at siden h_1, h_2 og h_3 alle avhenger av radien, avhenger de følgelig også av x_1 og x_3 . Dermed er ikke venstresida av likninga separabel, og andre verktøy er nødvendige for å løse likninga.

Laplace-likninga er en andreordens partiell differensiallikning og trenger derfor minst to grensebetingelser for å få en entydig løsning. Den første grensebetingelsen trenger ingen utledning da vi velger å kreve at bølgen skal dø ut i dypet. Vi antar at vannet er

(tilnærmet) uendelig dypt. Dette betyr at vi forventer at væsken bølgen forplanter seg i er i ro når man kommer tilstrekkelig langt unna overflata. Vi setter betingelsen

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 0 \quad \text{for } x_3 = \infty. \quad (29)$$

Å få begrenset hva som kan skje i dypet er hjelpsomt, men vi ønsker også å sette en randbetingelse ved overflata. En slik betingelse kalles i mekanikk for en kinematisk grensebetingelse.

Kinematisk grensebetingelse

Vi kommer til å anta at bakgrunnstrømmen er i likevekt og at selve sluket er i en stasjonær tilstand. Dette betyr at partiklene på overflata vil forbli på overflata. Matematisk modellerer vi dette ved å la F betegne en ekviskalarflate gitt ved

$$F = x_3 - \eta(x_1, x_2, t).$$

Skal vår overflatebevaringsantagelse holde, må den totalderiverte av F være null. Dette gir oss likningen

$$\frac{DF}{dt} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} - \nabla \phi \cdot \nabla \eta + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 0.$$

Likningen over kan omskrives til den fullverdige kinematiske grensebetingelsen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \eta = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \quad \text{for } x_3 = \eta. \quad (30)$$

Vi ønsker å finne et overflatekrav som ikke er direkte knyttet til bølgen, men heller på fastsatt flate. Vi Taylor-utvikler derfor likninga over rundt $x_3 = 0$. Et godt sted å starte er å sette inn uttrykkene våre i likning (24) og likning (25) for hhv. η og ϕ inn i likning (30). Da får vi

$$\epsilon \frac{\partial \eta_b}{\partial t} + \epsilon \nabla \phi_s \cdot \nabla \eta_b + \epsilon^2 \nabla \phi_b \cdot \nabla \eta_b = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi_s}{\partial x_3} + \frac{\epsilon}{h_3} \frac{\partial \phi_b}{\partial x_3}.$$

Vi velger først å forkaste leddet som er proposjonalt med ϵ^2 , da $\epsilon \ll 1$. Videre ser vi at siden $x_2 = \theta$, må hastighetsfeltet \mathbf{u}_s være likt i x_2 -retning som i θ -retning. Etersom \mathbf{u}_s kun har hastighet i x_2 retning, kan ikke hastighetspotensialet ϕ_s avhenge av noe annet enn x_2 . Dermed kan vi også eliminere dette leddet fra likningen. Deretter gjør vi en enkel justering av [Tru19, likning 65] for å få finne en generell Taylorutvikling av en funksjon $f(x_3)$ i et punkt $x_3 = \epsilon \eta_b$:

$$f(\epsilon \eta_b) = f(0) + \frac{\epsilon \eta_b}{h_3} \frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \frac{\epsilon^2 \eta_b^2}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial x_3^2} \right) + \dots \quad (31)$$

Taylorutvikler vi potensialfunksjonsleddene i likning (30), så sitter vi igjen med

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial \eta_b}{\partial t} + \epsilon \nabla \eta_b \cdot \nabla \left(\phi_s + \frac{\epsilon \eta_b}{h_3} \frac{\partial \phi_s}{\partial x_3} + \dots \right) \\ = \frac{\epsilon}{h_3} \frac{\partial \phi_b}{\partial x_3} + \frac{\epsilon^2 \eta_b}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi_b}{\partial x_3} \right) + \dots \end{aligned}$$

Det er viktig å understreke at likningen over kun gjelder for $x_3 = 0$. Vi ønsker å se på små bølger langs likevektsflata til sluket, og velger å betrakte den delen av problemet som er proposjonal med ϵ^1 . Vi får en kinematisk grensebetingelse på formen

$$\frac{\partial \eta_b}{\partial t} + \nabla \eta_b \cdot \nabla \phi_s = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi_b}{\partial x_3} \quad \text{for } x_3 = 0. \quad (32)$$

Likning (32) lar oss bestemme bølgeadferden nær overflata, men fiksert om et punkt $x_3 = 0$. Nå som vi har begge grensebetingelsene våre på plass, gjenstår det fremdeles en likning. Siden vi har to funksjoner, nemlig ϕ og η som opptrer i begge grensebetingelsene vi har utledet, trenger vi en ytterligere likning for å relatere hastighetspotensialet ϕ og overflata η . For å koble disse størrelsene sammen vender vi oppmerksomheten vår til kraftbalansen ved overflata. For våre formål beskrives den best ved Eulers trykklikning.

Eulers trykklikning

I sitt forelesningsnotat om ikke-lineære havbølger [Tru19, kap. 2.2] viser Trulsen utledninga av Eulers trykklikning for tyngde-kapillærbølger:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + g\eta + \frac{\gamma}{\rho} \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}_\eta = 0, \quad \text{for } x_3 = \eta. \quad (33)$$

Systemet vi betrakter er et sammensatt et, der vi har $\phi = \phi_s + \epsilon \phi_b$. Hvis vi setter inn for η og ϕ fra hhv. likning (24) og likning (25), får vi likninga

$$\epsilon \frac{\partial \phi_b}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi_s)^2 + \epsilon \nabla \phi_s \cdot \nabla \phi_b + \frac{\epsilon^2}{2}(\nabla \phi_b)^2 + \epsilon g\eta_b + \frac{\gamma}{\rho} \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}_\eta = 0.$$

Vi ser umiddelbart at siden $\epsilon \ll 1$, kan vi neglisjere leddet $\frac{\epsilon^2}{2}(\nabla \phi_b)^2$. Vi vender så oppmerksomheten vår mot overflatespenningsleddet. Her ønsker vi å finne normalvektoren til overflata. Slik som i utledninga av den kinematiske grensebetingelsen, definerer vi en ekviskalarflate $F = x_3 - \eta$. Vi finner normalvektoren ved

$$\hat{\mathbf{n}}_\eta = \frac{\nabla(x_3 - \eta)}{|\nabla(x_3 - \eta)|} = \frac{\left(-\frac{1}{h_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \hat{\mathbf{x}}_1 - \frac{1}{h_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{1}{h_3} \hat{\mathbf{x}}_3\right)}{\sqrt{\frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2}\right)^2}}.$$

Vi ønsker å finne divergensen av normalvektoren. For å forenkle arbeidet velger vi å allerede nå å begrense oss til et perturbert problem der vi holder oss til leddene som er proporsjonale med ϵ^1 . Vi setter inn likning (24) for η , og får

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}_\eta &= \frac{\left(-\frac{\epsilon}{h_1} \frac{\partial \eta_b}{\partial x_1} \hat{\mathbf{x}}_1 - \frac{\epsilon}{h_2} \frac{\partial \eta_b}{\partial x_2} \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{1}{h_3} \hat{\mathbf{x}}_3\right)}{\sqrt{\frac{1}{h_3^2} + \frac{\epsilon^2}{h_1^2} \left(\frac{\partial \eta_b}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{\epsilon^2}{h_2^2} \left(\frac{\partial \eta_b}{\partial x_2}\right)^2}}, \\ &\approx h_3 \left(-\frac{\epsilon}{h_1} \frac{\partial \eta_b}{\partial x_1} \hat{\mathbf{x}}_1 - \frac{\epsilon}{h_2} \frac{\partial \eta_b}{\partial x_2} \hat{\mathbf{x}}_2\right) + \hat{\mathbf{x}}_3. \end{aligned}$$

som reduseres til en normalvektor ${}^1\hat{\mathbf{n}}_\eta$ med størrelsesorden ϵ på formen

$${}^1\hat{\mathbf{n}}_\eta = -\frac{h_3 \epsilon}{h_1} \frac{\partial \eta_b}{\partial x_1} \hat{\mathbf{x}}_1 - \frac{h_3 \epsilon}{h_2} \frac{\partial \eta_b}{\partial x_2} \hat{\mathbf{x}}_2.$$

Som vi videre kommer til å kalle $\hat{\mathbf{n}}$ av hensyn til likningenes lesbarhet. Divergens i krumlinjede koordinatsystemer er definert ved

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 v_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 v_3) \right).$$

Hvis vi så setter inn $\hat{\mathbf{n}}$ for \mathbf{v} i uttrykket over, får vi

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3^2 \epsilon}{h_1} \frac{\partial \eta_b}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3^2 h_1 \epsilon}{h_2} \frac{\partial \eta_b}{\partial x_2} \right) \right), \\ &= -\frac{\epsilon}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right) - \frac{h_3 \epsilon}{h_2^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} + \frac{\epsilon}{h_1^2} \frac{\partial \eta_b}{\partial x_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1}.\end{aligned}$$

Divergensen til $\hat{\mathbf{n}}$ ender opp med et uttrykk som er slående likt laplace-operatoren vi fant tidligere. Den kan derfor skrives på en mer elegant måte som

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}_\eta = -h_3 \epsilon \nabla^2 \eta_b + \frac{\epsilon}{h_1^2} \frac{\partial \eta_b}{\partial x_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1}. \quad (34)$$

Hvis vi så vender oppmerksomheten tilbake til trykklikninga, ser vi at førsteordenslikninga³ blir

$$\frac{\partial \phi_b}{\partial t} + \nabla \phi_s \cdot \nabla \phi_b + g \eta_b - \frac{\gamma}{\rho} h_3 \nabla^2 \eta_b + \frac{\gamma}{\rho} \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial \eta_b}{\partial x_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} = 0 \quad (35)$$

Likninga over er riktignok definert ved $x_3 = \epsilon \eta_b$, men tilsvarende som for den kinematiske grensebetingelsen, kan vi her Taylor-utvikle ϕ_s og h_3 om $x_3 = 0$. Dette gir oss en likning om et fast punkt heller enn en om variabel overflate η_b . Taylorutviklinga vil her ha samme form som i likning (31), og hvis vi utvikler ϕ_b , ϕ_s , h_1 og h_3 om $x_3 = 0$ og forkaster alle ledd proporsjonale med ϵ , sitter vi igjen med en likning som er helt identisk med likning (35). Den er selvsagt utviklet om $x_3 = 0$. Med alle likningene på plass har vi nå alt vi trenger for å finne dispersjonsrelasjonen.

Dispersjonsrelasjon

Nå som vi har funnet likningene som beskriver systemet, gjenstår det bare å finne dispersjonsrelasjonen for bølgene. Systemet i sin helhet er gitt ved likning (27), likning (29), likning (32) og likning (35). Vi er likevel ikke helt klare til å finne en dispersjonsrelasjon, ettersom skaleringsfaktorene h_1 , h_2 og h_3 inngår i alle likningene foruten likning (29). Dette gjør regninga vår mer komplisert, siden vi ikke kjenner formen på disse i koordinatsystemet (x_1, x_2, x_3) . Vi ser derimot at i både h_1 og h_3 dukker det opp et forholdstall κ på formen

$$\kappa = \frac{\zeta}{R^3}. \quad (36)$$

Dette forholdstallet spiller ikke bare en viktig rolle i normaliseringsfaktorene h_1 og h_3 , men det er også stigningstallet til kurven som følger sluket. Avhengig av størrelsesordenen til forholdstallet κ^4 , kan en bølge befinne seg i et av tre ulike regimer. Det første regimet forekommer når κ er stor ($\kappa \gg 1$). Dette er karakteristisk for den innerste delen av sluket. I motsatt ende, der effekten av sluket knapt er merkbar, har vi en svært liten κ ($\kappa \ll 1$). Disse to scenariene beskriver den asymptotiske oppførselen til bølgene. Mellom disse er det et regime der κ er av en størrelsesorden som gjør at vi ikke uten videre kan forenkle likningene.

Foruten vårt nye forholdstall må vi også etablere hvordan bølgene våre kommer til å se ut. Vi ønsker å se på monokromatiske planbølger i $x_1 x_2$ -planet med utslag langs x_3 -aksen. I denne utregninga kommer vi til å anta at bølgenes frekvens er konstant i tid,

³I likninga er det egentlig bare et ledd som er av størrelsesorden 1 og ikke ϵ^n for $n \in \mathbb{N}$. Det er leddet $\frac{1}{2}(\nabla \phi_s)^2$. Det kan virke langt fra intuitivt at dette leddet blir ignorert, men dette leddet er faktisk bare bakgrunnstøyen som dukker opp på nytt. I Eulers trykklikning ser vi på kraftbalansen ved overflata. Det er også det vi gjorde da vi utledet formen på sluket. Det betyr at dette leddet er egentlig bare bestemmer hva slaks flate vi betrakter bølgene på.

⁴i den forstand at $\kappa \propto \epsilon^n$ for $n \in \mathbb{Z}$

og at innad i den delen av sluket vi ser på, holder den seg også konstant i rom. Vi kommer derimot ikke til å anta at bølgetallet forblir konstant langsmed sluket, men kan variere med posisjon. Bølgetallet representerer den romlige frekvensen til en bølge, og det er ikke en selvfølge at denne forblir konstant når man forflytter seg langs sluket. Vi innfører derfor en fastefunksjon χ ved

$$\chi = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{k}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} - \omega t. \quad (37)$$

Her er \mathbf{r}_0 et fastsatt referansepunkt og \mathbf{r} er en posisjonsvektoren i x_1x_2 -planet. Selv om vi ikke har antatt at bølgevektoren k er konstant, velger vi å anta at den er konstant lokalt. Videre definerer vi likningen til både overflatehevninga η og bølgens hastighetspotensiale ϕ_b ved

$$\phi_b(x_1, x_2, t) = \hat{\phi}_b(x_3)e^{i\chi}, \quad (38)$$

$$\eta_b(x_1, x_2, t) = \hat{\eta}_b e^{i\chi}. \quad (39)$$

Der vi har antatt at overflatehevningen η_b er en bølge med konstant amplitude $\hat{\eta}_b \in \mathbb{C}$, og at potensialfunksjonen ϕ_b sin amplitude kun varierer med x_3 . Med disse likningene på plass kan vi finne dispersjonsrelasjoner for systemet, og vi velger å fokusere på den delen av sluket nærest sentrum, der forholdstallet κ er stort.

Potensialets amplitude

Et naturlig sted å starte er å finne formen på amplitude-funksjonen $\hat{\phi}_b(x_3)$ i likning (38). For å finne denne funksjonen vender vi oppmerksomheten mot likning (27). Hvis vi setter inn ϕ_b for f og skriver ut uttrykkene for h_1 , h_2 og h_3 uttrykt ved R og κ , får vi en Laplace-likning gitt ved

$$\nabla^2 \phi_b = \frac{\kappa R}{1 + \kappa^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\kappa R \frac{\partial \phi_b}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial x_2^2} + \frac{\kappa R}{1 + \kappa^2} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{R}{\kappa} \frac{\partial \phi_b}{\partial x_3} \right) = 0. \quad (40)$$

Vi holder til i den indre delen av sluket, der $\kappa \gg 1$. Fra invers funksjonsteorem vet vi også at $\frac{\partial R}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial R} \right)^{-1} = \kappa^{-1} \approx 0$. Dette betyr at R er tilnærmet konstant i x_1 -retning. Disse observasjonene lar oss forenkle likningen over, og vi får

$$\nabla^2 \phi_b = R^2 \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial x_2^2} + \frac{R^2}{\kappa^2} \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial x_3^2} + \frac{R}{\kappa} \frac{\partial \phi_b}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{R}{\kappa} \right) = 0. \quad (41)$$

Vi vender deretter oppmerksomheten vår mot hastighetspotensialet i likning (40) og fasefunksjonen i likning (37). Fra analysens fundamentalteorem er $\nabla \chi = \mathbf{k} = k_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + k_2 \hat{\mathbf{x}}_2$. Gradienten i vårt koordinatsystem er definert ved

$$\nabla \chi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \hat{\mathbf{x}}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \chi}{\partial x_3} \hat{\mathbf{x}}_3, \quad (42)$$

men vi vet at gradienten til χ ikke har en x_3 -komponent. Dette betyr at χ ikke kan være en funksjon av x_3 . Hvis vi setter inn likning (38) for ϕ_b i likning (41), får vi

$$R^2 \hat{\phi}_b \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} e^{i\chi} + \hat{\phi}_b \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} e^{i\chi} + \frac{R^2}{\kappa^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_b}{\partial x_3^2} e^{i\chi} + \frac{R}{\kappa} \frac{\partial \hat{\phi}_b}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{R}{\kappa} \right) e^{i\chi} = 0. \quad (43)$$

Videre vet vi at siden $\kappa \gg 1$, vil leddet proporsjonalt med κ^{-2} være forsvinnende lite. Vi velger derfor å se bort fra dette videre i beregningene våre. Størrelsesordenen på κ betyr også at normaliseringsfaktorene h_1 og h_3 tilnærmes til

$$h_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa^2}} \approx 1, \quad h_3 = \sqrt{1 + \kappa^2} \approx \kappa. \quad (44)$$

Dermed ser vi at siden $h_2 = R$, kan vi skrive om de to første leddene i likning (43) til

$$R^2 \hat{\phi}_b \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} e^{i\chi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} e^{i\chi} \right) = -R^2 k^2 \hat{\phi}_b e^{i\chi} + iR^2 (\nabla \cdot \mathbf{k}) \hat{\phi}_b e^{i\chi}. \quad (45)$$

Vi sitter nå igjen med en førsteordens ordinær differensiallikning for bølgeamplituden $\hat{\phi}_b(x_3)$. Siden x_3 er kontinuerlig og glatt vet vi fra invers funksjonsteorem at

$$\frac{\partial R}{\partial x_3} = \frac{1}{\frac{\partial x_3}{\partial R}} = \frac{1}{\kappa} = \kappa.$$

Videre ser vi også fra definisjonen av κ at den deriverte av R/κ med hensyn på x_3 blir

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{R}{\kappa} = \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{R^4}{\zeta} = 4 \frac{R^3}{\zeta} \frac{\partial R}{\partial x_3} = 4 \frac{\kappa}{\kappa} = 4.$$

Vi vet også at siden bølgevektoren \mathbf{k} er tilnærmet konstant lokalt, så blir divergensen av denne vektoren 0 i regimet vi ser på nå. Likning (43) kan dermed forenkles til

$$\frac{1}{\kappa} \frac{1}{\hat{\phi}_b} \frac{\partial \hat{\phi}_b}{\partial x_3} = \frac{R}{4} k^2. \quad (46)$$

Før vi kan løse likningen over trenger vi et uttrykk for $R(x_1, x_3)$ lokalt slik at vi både kan sette passende grenser for integralene og senere evaluere funksjonen. Lokalt vet vi at R kan tilnærmes til kun å være en funksjon av x_3 .⁵ Siden den deriverte av R med hensyn på x_3 lokalt er κ , betyr det at vi burde finne et uttrykk for R hvis deriverte oppfyller dette kriteriet. En slik funksjon er

$$R = \sqrt[4]{\zeta x_3 + D}. \quad (47)$$

En siste hindring for å invertere R er å bestemme verdien på D , og dermed si hva slags verdier av x_3 som er mulige å få. Globalt kan x_3 være et vilkårlig reelt tall, men vi begrenser oss her til en del av sluket der R er ganske liten. Vi velger dermed å la D være slik at $x_3 = 0$ gjør at R blir slukbredde a . Dette gjør at $x_3 = 0$ samsvarer til den innerste delen av slukvirvelen. Fra dette får vi at den lokale tilnærmingen av R

$$R(x_3) = \sqrt[4]{4\zeta x_3 + a^4}. \quad (48)$$

Løsningsmåten for en differensiallikning på formen vi ser i likning (46) er velkjent. Hvis vi integrerer begge sider fra 0 og til x_3 , får vi

$$\hat{\phi}_b(x_3) = \hat{\phi}_b(0) \exp \left(\int_0^{x_3} \frac{R(s)}{4} k^2 h_3 ds \right). \quad (49)$$

Vi bruker den lokale verdien for h_3 og utfører et variabelskifte. Dermed blir uttrykket over

$$\hat{\phi}_b(x_3) = \hat{\phi}_b(0) \exp \left(\int_{R(0)}^{R(x_3)} \frac{R'}{4} k^2 \kappa \frac{dR'}{\kappa} \right), \quad (50)$$

$$= \hat{\phi}_b(0) \exp \left(\int_a^R \frac{R'}{4} k^2 dR' \right). \quad (51)$$

Integralet over kan beregnes, og vi får følgende uttrykk for amplituden $\hat{\phi}_b$

$$\hat{\phi}_b(x_3) = \hat{\phi}_b(0) \exp \left(\left[\frac{\sqrt{4\zeta x_3 + a^4} - a^2}{8} \right] k^2 \right). \quad (52)$$

Nå som vi kjenner amplituden på bølgene, kan vi vende oppmerksomheten vår mot dispersjonsrelasjonen.

⁵ Ser man og på enhetsvektorene $\hat{\mathbf{x}}_1$ og $\hat{\mathbf{x}}_3$ ser man at disse er lokalt nesten er rettet hhv. langs r -aksen og z -aksen.

Likningen

Vi har nå alt vi trenger for å finne dispersjonsrelasjonen til bølgene i den innerste delen av sluket. Vi begynner med å vende oppmerksomheten vår mot Eulers trykklikning, og vi ser at hvis vi setter inn for ϕ_b og η_b i likning (35), får vi

$$-i\omega\hat{\phi}_b(0)e^{i\chi} + \nabla\phi_s \cdot \nabla\phi_b + g\hat{\eta}_b e^{i\chi} - \frac{\gamma}{\rho}\kappa\hat{\eta}_b\nabla^2(e^{i\chi}) - \frac{\gamma}{\rho}\hat{\eta}_b\frac{\partial\kappa}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}e^{i\chi} = 0. \quad (53)$$

Med litt regning kan vi skrive ut likningen over til en mer tydelig likning for amplitudene $\hat{\eta}_b$ og $\hat{\phi}_b(0)$. Lar vi k_1 betegne bølgevektorens komponent i x_1 -retning, sitter vi igjen med

$$-i\omega\hat{\phi}_b(0) + i\hat{\phi}_b(0)\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{k} + g\hat{\eta}_b - i\frac{\gamma}{\rho}\hat{\eta}_b\kappa \left(ik^2 + \nabla \cdot \mathbf{k} \right) - 3\frac{k_1}{\kappa R} \hat{\eta}_b = 0. \quad (54)$$

Vi vet at \mathbf{k} er lokalt konstant, så divergensen til \mathbf{k} blir lik 0. Hvis vi vender oppmerksomheten vår mot den kinematiske grensebetingelsen, vil vi etter innsettelse av uttrykkene våre for ϕ_b og η_b i likning (32) ende opp med

$$-i\omega\hat{\eta}_b e^{i\chi} + i\hat{\eta}_b(\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{k})e^{i\chi} = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial\hat{\phi}_b}{\partial x_3}e^{i\chi}. \quad (55)$$

Fra likning (46) så har vi allerede et uttrykk for høyresida i likninga over, og ved innsetting får vi

$$-i\omega\hat{\eta}_b + i\hat{\eta}_b(\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{k}) - \hat{\phi}_b(0)\frac{R}{4}k^2 = 0. \quad (56)$$

I både likning (56) og likning (53) dukker det opp to hittil ukjente, men viktige størrelser for problemet vårt. Maksimalhøyden på overflatehevninga $\hat{\eta}_b$ og amplituden på bølgepotensialet helt innerst i sluket $\hat{\phi}_b(0)$. Disse to likningene danner altså et likningssett med to ukjente, som på matriseform blir

$$\begin{pmatrix} -i\omega + i\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{k} & g + \frac{\gamma}{\rho}\kappa(k^2 - i(\nabla \cdot \mathbf{k})) - i\frac{3k_1}{R} \\ -\frac{R}{4}(k^2 - i(\nabla \cdot \mathbf{k})) & -i\omega + i(\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_b(0) \\ \hat{\eta}_b \end{pmatrix} = 0 \quad (57)$$

Vi har satt nullpunktet til x_3 slik at når $x_3 = 0$, så er R lik radien a til selve sluket. Hvis vi ønsker at amplitudene til bølgebevegelsen skal være større enn null må vi finne ikke-trivielle løsninger til likning (57). Dette forutsetter at matrisen over har determinant lik 0, og fra determinanten så finner vi dispersjonsrelasjonen vår.

Teorem 6.1. *I vann med tetthet ρ og overflatespenningskoeffisient γ , så er dispersjonsrelasjonen for tyngde-kapillærbølger i en Rankine-slukvirvel med minsteradius a og virvelhas-tighet u_s gitt ved*

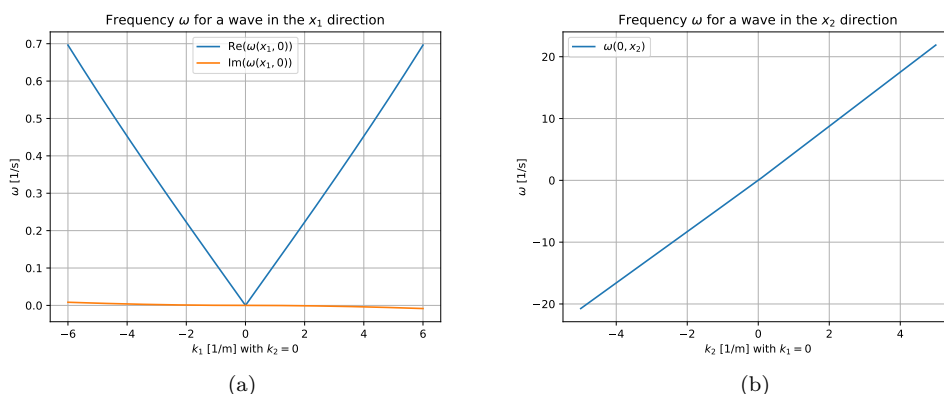
$$(\omega - \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{k})^2 = \frac{ak^2}{4} \left(g + \frac{\gamma\zeta}{\rho a^3} \left(k^2 - i\frac{3k_1 a^2}{\zeta} \right) \right)$$

I Teorem 6.1 har vi funnet en dispersjonsrelasjon for den innerste delen av en slukvirvel, der veggene er nærmest vertikale og roterer fortest. En kjent dispersjonsrelasjon er den for dyptvannsbølger, der $\omega^2 = gk$. Dette ser vi ikke her, og vi ser til og med at hvis overflatespenninga γ hadde vært null, ville vi fått ikke-dispersive tyngdebølger i dette området. Dette kan virke unaturlig ved første øyekast, men en mulig forklaring på dette er at tyngdekraften her er retta samme vei som flata bølgene forplanter seg på. Dermed må det sies at tyngdekraften fungerer som en sentripetalakselerasjon, som ikke er en kraft som forårsaker disperse bølger.

Mer problematisk er det komplekse overflatespenningsleddet. Slike ledd kalles evanescente ledd, og dukker som regel opp når vi ser på bølger ved en vegg. Slike bølger har størst amplitude inntil veggen, og avtar eksponensielt ut fra den. Vi har ingen slik vegg, og det er dermed ikke helt klart hva den fysiske tolkningen av dette leddet er. Det er derimot verdt å legge merke til at dette leddet er et anisotrop ledd, og kan tyde på at bølgeforplantninger langsmed slukvirvelen vil møte på mer motstand fra overflatespenninga enn bølger som kun forplanter seg rundt i samme høyde av sluket. Overflatespenning er også en konservativ kraft, og et ledd som muligens medfører energidissipasjon er urovekkende. Det er derimot vanskelig å si om dette leddet er stort nok til å skape virkelige problemer, eller om dette muligens er en konsekvens av at vi har et sluk som trekker vannmasser inn. Det evanescente leddet forsvinner nærmest fullstendig langt vekk fra sluket, som også kan peke på at det er sluket som forårsaker denne energidissipasjonen.

Numerisk analyse

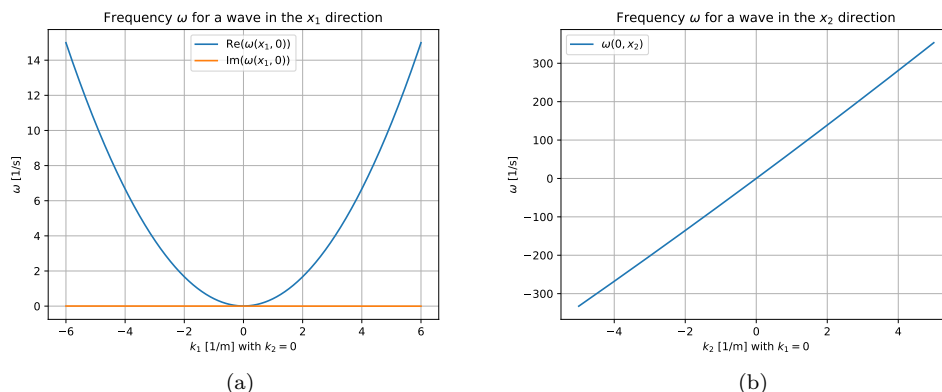
For å kunne analysere dispersjonsrelasjonen nærmere har vi da plottet $\omega(k_1, k_2)$ med ulike parametre. I figur 3 ser vi et plott av dispersjonsrelasjonen i Teorem 6.1 for slukparametrene vi fant for figur 2. Figur (a) viser en kurve som er tilnærmet linær på begge sider av knekkpunktet i $k_1 = 0$. Dette skyldes nok at vann er tungt og overflatespenningstallet lite, slik at tyngde da blir den dominerende kraften i domenet. Dette gir en $\omega \propto \sqrt{g}|k|$, og vi får en linær graf. I figur (b) er det tilsvarende lineært, men uten et knekkpunkt. Dette skyldes at dopplerleddet er betydelig større enn tyngde- og overflatespenningsleddet, og vi får så godt som en rett linje.



Figur 3: Figurene over viser frekvensen til en tyngde-kapillærbølge som forplanter seg i x_1 -retning (figur (a)) og i x_2 -retning (figur (b)). Slukparametrene er de til sluket i figur 2, med $\zeta = 4.63 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$, slukradius $a = 0.5 \text{ cm}$, overflatespenning $\gamma = 72 \text{ mN}$, tyngdeakselerasjon $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ og massetetthet $\rho = 997 \text{ kg/m}^3$.

For å få tydeligere frem effektene av overflatespenning har vi i figur 4 justert parametrene noe, og i figur (a) ser vi nå en mye tydeligere bøy fra de kapillære kreftene enn i figur 3. Vi ser og at den imaginære delen av ω er mye større, som tyder på at bølgen her opplever kraftigere anisotrope effekter enn i figur 3. I figur (b) er dispersjonsrelasjonen fremdeles så godt som lineær. Det betyr at dopplerleddet fremdeles er betydelig større enn tyngde- og overflatespenningsleddet, og peker på at man i slike sluk antageligvis må forvente at dopplereffekter dominerer innerst i sluket.

Vi har i programmet antatt at bakgrunnstrømmen har hatt positivt fortegn, og vi ser at bølgenes gruppe- og fasehastighet faller godt sammen i figur (b) i figur 3 og at



Figur 4: Figurene over viser frekvensen til en tyngde-kapillærbølge som forplanter seg i x_1 -retning (figur (a)) og i x_2 -retning (figur (b)). Slukparametrene er satt til slukradius $a = 0.5$ cm, overflatespenning $\gamma = 720$ mN, tyngdeakselerasjon $g = 9.81/2$ m/s² og massetetthet $\rho = 997$ kg/m³. Slukstyrken ζ ble satt til $\zeta = 0.024$ for å være marginalt større enn minsteverdien for ζ gitt ved likning (15)

frekvensen på bølger i figur (b) er betydelig større enn i figur(a). Dette tyder på at vi kommer til å se bølger som i all hovedsak forplanter seg langsmed rotasjonsretninga, og at energien forplantes samme vei. Men det er likevel bølgebevegelse i x_1 -retning, som tyder på at det burde kunne være mulig å observere små forplattninger opp eller ned sluket i et skrått mønster.

Konklusjon

I denne artikkelen har vi funnet et koordinatsystem som følger sluket. Vi har også formulert en grense for hvor sterkt sluket kan være for at koordinatsystemet skal gjøre seg gjeldende. Disse resultatene gjorde at vi klarte å utlede dispersjonsrelasjonen for tyngde-kapillærbølger i den innerste delen av en slukvirvel. Så vidt vi vet er ikke dette gjort før, og det er derfor hovedresultatet i artikkelen.

I dispersjonsrelasjonen fant vi to overraskelser. Den første er at tyngdekraften ikke lenger bidrar til å gjøre bølgene dispersive, men heller fungerer som en ren sentripetalkraft. Den andre overraskelsen var at overflatespenningen resulterte i et evanescent ledd. Hva som forårsaker dette leddet fant vi ingen god forklaring på, og dette er et fenomen som kan undersøkes mer i detalj.

I våre numeriske beregninger fant vi at dopplereffekten gjorde seg svært dominerende, selv ved drastiske justeringer i de fysiske parametrene. Vi ser likevel tegn til at det er bølgebevegelse også på tvers av virvelen. Resultatet av dette er at man skal kunne observere bølger som går litt på skrå i sluket, og dette er det også tegn på i videoen fra "MEK1100 - Feltteori og vektoranalyse" som vi nevnte tidligere i artikkelen.

I utledningen av dispersjonsrelasjonen har vi både sett bort i fra lokale variasjoner i bølgevektoren \mathbf{k} og vi har begrenset oss til den innerste delen av sluket. En utvidelse av analysen til å dekke mer generelle bølger eller større deler av sluket er for omfattende til å kunne gjøres her. En fullstendig beskrivelse av slukvirvelens koordinatsystem er og en mulighet for videre forskning.

Referanser

- [Ach90] Acheson, D. J. *Elementary fluid dynamics*. Oxford applied mathematics and computing science series. Clarendon Press, 1990.
- [Ang18] Angulo Cruz, Milton Eduardo. «Surface Tension Measurement by Maximum Bubble Pressure Method». 2018.
- [Mat98] Matthews, P.C. *Vector calculus*. Springer undergraduate mathematics series. Springer, 1998.
- [Tru19] Trulsen, Karsten. *Lecture notes: Nonlinear Wave Theory*. 2019. URL: <https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MEK4350/h19/pensumliste/nonlinear.pdf> (sjekket 10.03.2020).

Appendiks: Kode

Alle programmer med dokumentasjon kan man finne i følgende GitHub-repository.

Finne nullpunkter

Det følgende programmet, skrevet i Julia, ble brukt for å finne nullpunktene til likning (17)

```
using Roots
using GR

function zetafunc(r)
    #Function for zeta with inserted values for physical parameters
    a = 0.5
    b = 72e-3/(997*9.81)*(7/2)^(1/6)
    c = 94e-2*(0.5e-2)^2
    return a .* r + b.* r.^(1/3) .- c
end

function main()
    #=
    Finding the zero of the function. A large domain is given
    to ensure that we don't ignore any roots
    =#
    zeta = find_zero(zetafunc, (0,100), Bisection())
    println("The root of zeta function is ", zeta)
end
main()
```

Plotting av dispersjonsrelasjon

Dispersjonsrelasjonen ble plottet med følgende program

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# PARAMETERS
a = 0.005
zeta = 0.024
gam = 72e-2
```

```

rho = 997
n = 1000
g = 9.81/2

# CALCULATING OMEGA IN BOTH DIRECTIONS
k1 = np.linspace(-6,6,n)
k2 = np.linspace(-5, 5, n)
omega1 = np.sqrt((a*k1**2)/4 * ( g + \
(gam*zeta/(rho*a**3))*( k1**2 - 3j *k1*a**2/zeta)))
omega2 = np.sqrt((a*k2**2)/4 * ( g + \
(gam*zeta/(rho*a**3))*( k2**2))) + k2*np.sqrt(zeta*g)/a

# PLOTTING
plt.plot(k1, np.real(omega1), k1, np.imag(omega1))
plt.grid()
plt.legend(["Re($\omega(x_1,0)$", "Im($\omega(x_1,0)$)"])
plt.xlabel("$k_1$ [1/m] with $k_2 = 0$")
plt.ylabel("$\omega$ [1/s]")
plt.title("Frequency $\omega$ for a wave in the $x_1$ direction")
plt.show()

plt.plot(k2, omega2)
plt.grid()
plt.legend(["$\omega(0,x_2)$"])
plt.xlabel("$k_2$ [1/m] with $k_1 = 0$")
plt.ylabel("$\omega$ [1/s]")
plt.title("Frequency $\omega$ for a wave in the $x_2$ direction")
plt.show()

```
