Computational components of the revised beginning math courses at the University of Oslo

Øyvind Ryan
Matematisk institutt, UIO

18. April, 2024

Courses at UIO

- MAT1100 Kalkulus. First semester.
- MAT1110 Kalkulus og lineær algebra Second semester. (Enkel matlab/python for lineær algebra, 2D/3D plotting, symbolske beregninger)
- MAT1120 Lineær algebra (Enkel matlab/python for lineær algebra). Third semester
- IN1900 Introduksjon i programmering for naturvitenskapelige anvendelser

New courses:

- MAT1105 Lineær algebra og numeriske metoder (new, first semester). Matematisk logikk. Innføring i lineær algebra i euklidske rom. Matlab/Python. Interpolasjon. Numerisk derivasjon/integrasjon.
- MAT1125 Videregående lineær algebra (new. third semester)

Terminated course: MAT-INF1100 Modellering og beregninger (first semester).

- Vis at *aktiveringsfunksjonen* $\sigma(x) = 1/(1+e^{-x})$ tilfredsstiller $\sigma'(x) = \sigma(x)(1-\sigma(x))$.
- Finn gradienten til $f(\mathrm{x}) = |\mathrm{x}-\mathrm{y}|^2$, der $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ er en variabel, $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ en konstant vektor.
- Anta at W er $n \times n$, og $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^n$. Vi vet at Jacobimatrisen til $\mathrm{F}(\mathrm{x}) = W\mathrm{x} + \mathrm{b}$ er $\mathrm{F}'(\mathrm{x}) = W$. Finn Jacobimatrisen til $\mathrm{G} : \mathbb{R}^{n^2+n} \to \mathbb{R}^n$ definert ved

$$\mathrm{G}\left(w_{11}, \ldots, w_{1n}, \ldots, w_{n1}, \ldots, w_{nn}, b_1, \ldots, b_n\right) = W\mathrm{x} + \mathrm{b}.$$

  (x er nå konstant, w_{ij}, b_i variable).
- Anta U, V, X matriser. Vis "blokkmatriseproduktformelen"

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I_1 & O & O \\ \hline O & U & V \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c} I_1 & O & O \\ \hline O & I_2 & O \\ \hline O & O & X \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_1 & O & O \\ \hline O & U & VX \end{array}\right)$$

- Implementasjon som kombinerer disse for å regne ut gradienten til et nevralt nett v.h.a. kjerneregelen.
- Mulige utvidelser: Eksperimentering med mange steg for konkrete data. Når W er filtre. valg av learning rate

Linar algebra angle to numerical methods

En *Vandermondematrise* er en $m \times n$ matrise på formen

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{m-1} & x_{m-1}^2 & \cdots & x_{m-1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Vis at slike matriser er inverterbar hvis $m = n$ og alle x_i er forskjellige.

Sammenheng Vandermondematriser og interpolasjon

Polynomet

$$p_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n.$$

som interpolerer f i $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$,...,$(x_n, f(x_n))$ kan finnes ved å løse

$$\begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Sammenheng Vandermondematriser og numerisk derivasjon

Anta at vi vet $n+1$ funksjonsverdier $f(a+m_ih)$, $0 \leq i \leq n$, der $\{m_i\}_{i\neq 0}$ er forskjellige heltall, alle $\neq 0$, og der $m_0 = 0$ (vi antar altså spesielt at $f(a)$ er kjent). La også p_n være det interpolerende polynomet av grad $\leq n$ i disse punktene. La også

$$V = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 & \dots & m_n^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & \dots & m_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ m_1^n & m_2^n & \dots & m_n^n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Da har vi at

$$\begin{pmatrix} h^1 p_n^{(1)}(a)/1! \\ h^2 p_n^{(2)}(a)/2! \\ \vdots \\ h^n p_n^{(n)}(a)/n! \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V^{-T}\mathrm{e} & V^{-T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(a) \\ f(a+m_1h) \\ \vdots \\ f(a+m_nh) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

V^{-T} er kort notasjon for $(V^{-1})^T$, e en søylevektor med bare enere.

Sammenheng Vandermondematriser og numerisk integrasjon

La

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1^2 & 2^2 & \dots & k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1^k & 2^k & \dots & k^k \end{pmatrix},$$

og la p_k være polynomet av grad $\leq k$ definert på $[a, a+kh]$ som interpolerer f i $a, a+h, ..., a+kh$. Definer

$$\mathrm{a}^T = h \begin{pmatrix} \frac{k}{1} & \frac{k^2}{2} & \dots & \frac{k^{k+1}}{(k+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V^{-T}\mathrm{e} & V^{-T} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Vi har at

$$\int_a^{a+kh} p_k(x)\,dx = \mathrm{a}^T \begin{pmatrix} f(a) \\ f(a+h) \\ \vdots \\ f(a+kh) \end{pmatrix}. \tag{4}$$