

UNIVERSITETET I OSLO

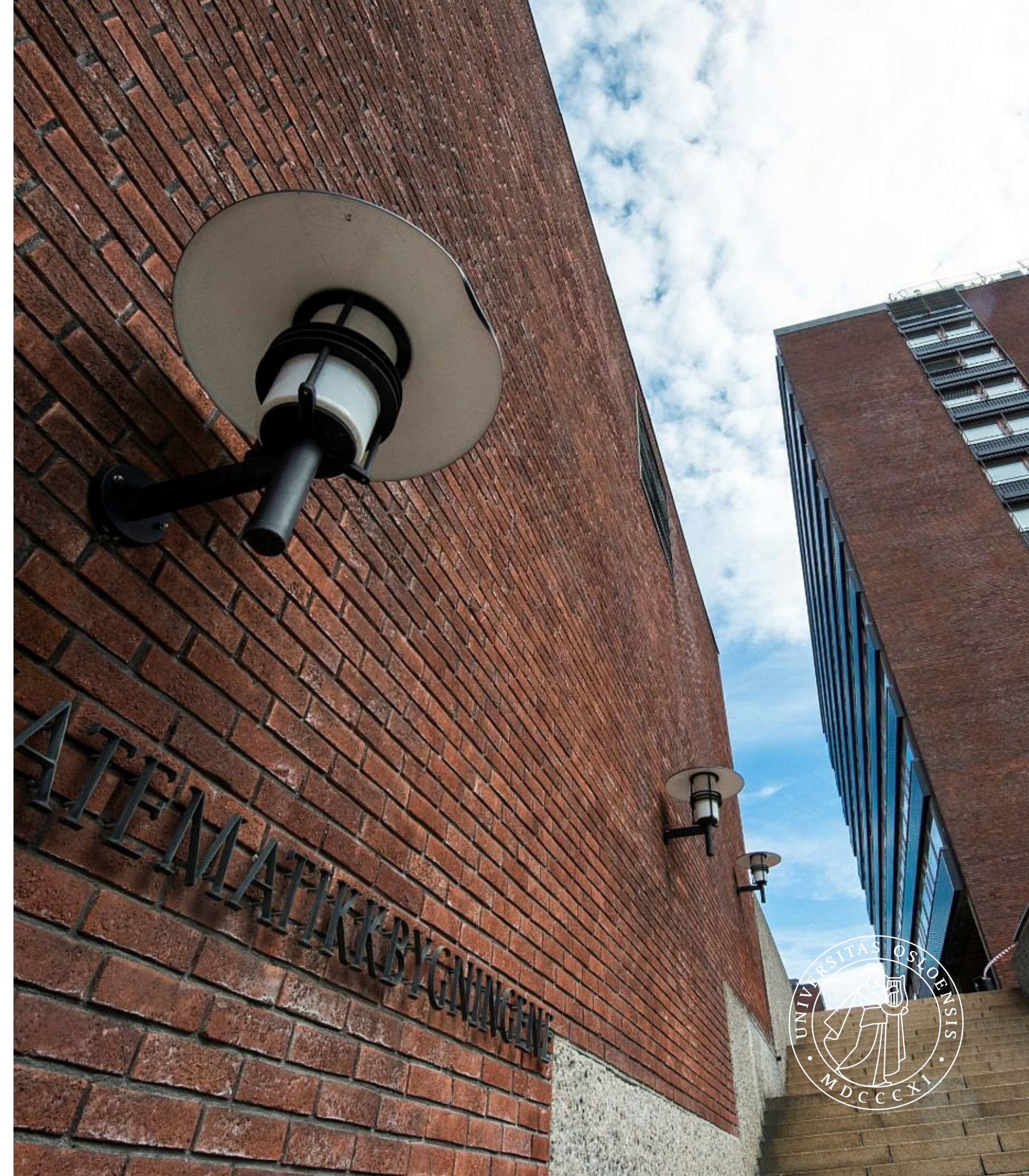
Matematikk: Data, Modellering, og beregninger(DMB)

Øyvind Ryan

Førstelektor og programleder for DMB

Matematisk Institutt

14. januar 2026



Innhold

- Hva er viktig når man skal velge et studium?
- Hva er DMB?
- Abelkonkurransen
- Hva kan du bli?

Litt om meg

- Begynte på UIO 1988.
- Master 1993. PhD 1997 i operatoralgebraer.
- Valgte tema for master/phd “i blinde”
- Jobbet i industri fra 1997-2004. Lite bruk for det jeg lærte av matematikk
- Returnerte til UIO 2004
- Hvorfor valgte jeg matematikk? Video med en tilsvarende historie



UNIVERSITETET
I OSLO

On the Construction of Free Random Variables

Oyvind Ryan*

Department of Mathematics, University of Oslo,
P.O.B. 1053, Blindern, 0316 Oslo, Norway
E-mail: ryan@math.uio.no

Received January 14, 1997; revised January 14, 1997; accepted June 2, 1997

We investigate some ways to obtain free families of random variables from an initial free family in a tracial noncommutative probability space. The random variables in this initial free family are multiplied on the left and the right by certain operators from an algebra free from the entire family. Aspects of freeness related to this algebra are also considered. © 1998 Academic Press

1. INTRODUCTION AND STATEMENT OF MAIN RESULTS

Our aim is to consider some of the ways to construct free families of random variables from a free family $(\{a_i\})_{i=1}^n$ in a tracial noncommutative probability space (A, ϕ) . The random variables will be multiplied on the left and the right by random variables from a $*$ -algebra D free from the entire family. This means that we look at families of the form (with d_{ij} nonzero choices from D)

$$(\{d_{i1}^* a_1 d_{i2}\}, \dots, \{d_{i1}^* a_n d_{i2}\}, D), \quad (1)$$

or simply

$$(\{d_{i1}^* a_1 d_{i2}\}, \dots, \{d_{i1}^* a_n d_{i2}\}), \quad (2)$$

when deleting the $*$ -algebra D from our considerations. Here we have written d_{i1}^* instead of d_{i1} for the sake of convenience in our calculations and results. Throughout the paper we will denote the operator $d_{i1}^* a_i d_{i2}$ by x_i . The families in (1) and (2) will be subject to an analysis of when freeness can occur. We find necessary and sufficient conditions for this in many cases, trying to make the picture as complete as possible. The conditions

* Sponsored by the Norwegian Research Council, Project No. 100693/410.

Hva er viktig når man skal velge et studium?

- Velg det du synes er gøy.
- Finn en god rutine som passer deg
- Tenk på jobbmuligheter, men ikke for mye
- Diskuter og bli inspirert av andre

Hva er DMB (Data, Modellering, og Beregninger)?

Lær hvordan du kan bruke matematikk, data, algoritmer og kunstig intelligens (AI) til å løse noen av våre største samfunnsutfordringer.

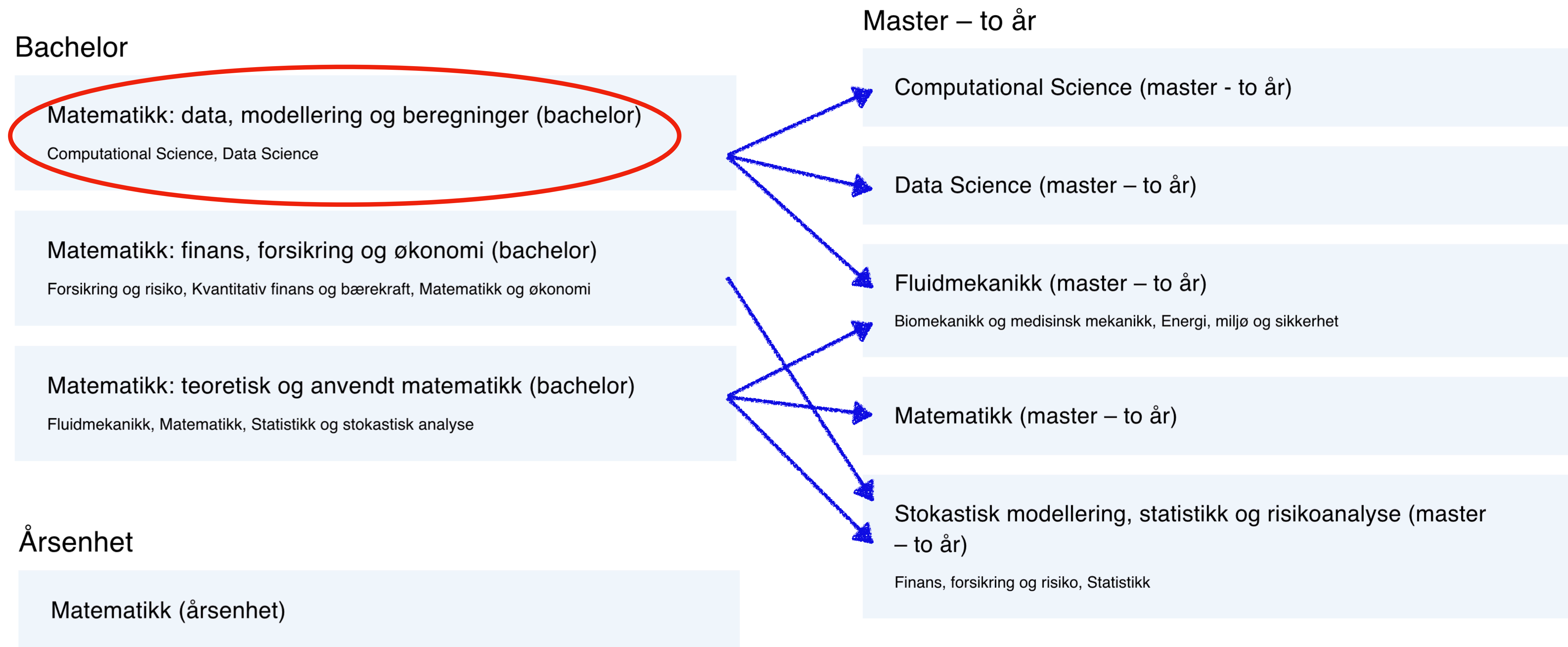
Fundamentet:

- matematikk
 - informatikk (programmering)
 - statistikk (dataanalyse)
 - numeriske beregninger.
-
- Studieretning Data Science: mer om metoder for å samle inn, analysere og tolke store mengder av data.
 - Studieretning Computational Science: mer om hvordan du bruker numeriske metoder til å lage matematiske modeller.



UNIVERSITETET
I OSLO

Studieprogrammene i matematikk ved UiO



Oppbygging av DMB

Studieretninger:

- Computational Science
- Data Science

6. semester	Utviklingssemester		
5. semester	<u>MAT3110 – Innføring i numerisk analyse</u>	<u>EXPHIL03 – Examen philosophicum</u>	Se studieretning
4. semester	Se studieretning	<u>STK2100 – Maskinlæring og statistiske metoder for prediksjon og klassifikasjon</u>	Se studieretning
3. semester	<u>MAT1125 – Videregående lineær algebra</u>	Se studieretning	Fritt emne
2. semester	<u>MAT1110 – Kalkulus og lineær algebra</u>	<u>STK1100 – Sannsynlighetsregning og statistisk modellering</u>	<u>IN1010 – Objektorientert programmering</u>
1. semester	<u>MAT1100 – Kalkulus og HMS-emner</u>	<u>MAT1105 – Lineær algebra og numeriske metoder</u>	<u>IN1900 – Introduksjon i programmering for naturvitenskapelige anvendelser</u>
	10 studiepoeng	10 studiepoeng	10 studiepoeng

CS: IN-kurs
DS: ST-kurs

Første kurs forskjellig fra TAM

MAT1105, MAT1125

- Kurs tilrettelagt for de som skal ta bachelor/master i matematikk
- Både TAM og DMB tar MAT1105 parallelt med IN1900 (Introduksjon i programmering for naturvitenskapelige anvendelser)
- Programmeringen fra IN1900 koordineres med matematikken fra MAT1105
- Kurslitteraturen i MAT1105/MAT1125 er skrevet av Ulrik og meg



UNIVERSITETET
I OSLO

26

CHAPTER 2. MATRISER OG MATRISEMULTIPLIKASJON

der $1 \leq k, l \leq n$. Spesielt er

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

Matrisen H_n får man ved hjelp av funksjonen `hilbert(n)` i pakken `scipy.linalg`. La oss lage denne ved hjelp av syntaksen over. Først skriver vi

```
y = np.arange(1,5)
y
```

```
array([1, 2, 3, 4])
```

Her fikk vi en vektor med 4 elementer, uten at denne tolkes i rader og søyler. Med kommandoen `np.reshape` kan denne tolkes som en radvektor (en 1×4 -matrise):

```
y.reshape((1,-1))
```

```
array([[1, 2, 3, 4]])
```

eller som en søylevektor (en 4×1 -matrise):

```
y.reshape((-1,1))
```

```
array([[1],
       [2],
       [3],
       [4]])
```

Tallet -1 betyr at antall rader/søyler blir beregnet automatisk, ut fra kravet om at det skal være kun én rad eller søyle. Hilbertmatrisen får vi da med

```
x = y.reshape((1,-1))
1/(x + x.T - 1)
```

```
array([[1.          , 0.5          , 0.33333333, 0.25          ],
       [0.5          , 0.33333333, 0.25          , 0.2          ],
       [0.33333333, 0.25          , 0.2          , 0.16666667],
       [0.25          , 0.2          , 0.16666667, 0.14285714]])
```

Hvis vi omvendt vil konvertere en rad- eller søylevektor tilbake til en vektor (uten tolkning i rader og søyler), så kan også dette gjøres ved hjelp av `reshape`:

```
x.reshape(-1)
```

```
array([1, 2, 3, 4])
```

2.1. VEKTORISERTE OPERASJONER PÅ MATRISER

27

Vi skal vende tilbake til Hilbertmatrisen senere, da det vil vise seg at den er ekstra sårbar med tanke på avrundingsfeil på en datamaskin. Dette gjør at den er vanskelig å bruke i numeriske beregninger. ♣

Example 2.5. Vandermondematriser. Matrisen

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^n \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

kalles for en *vandermondematrise*, og $x_1, \dots, x_m$ kalles dens *generatorer*. Vandermondematriser fås altså ved å samle potenser av generatorene i hver rad. Slike matriser trenger ikke være kvadratiske - antall generatorer (m) kan være forskjellig fra antall potenser ($n + 1$). Disse matrisene vil dukke opp senere i forbindelsene med interpolasjon, og numerisk derivasjon og -integrasjon. Samler vi generatorene til vandermondematrisen i søylevektoren x , og potensene $0, \dots, n$ i radvektoren p , så får vi matrisen i Equation 2.1 ved å skrive

```
p = np.arange(0,n+1).reshape((1,-1));
V = x**p
```

♣

Example 2.6. Fouriermatrisen Matriser kan, som vektorer, ha komplekse komponenter. La oss se på et eksempel på en kompleks matrise. *Fouriermatrisen*, F_N , er definert som $N \times N$ -vandermondematrisen med generatorer $\{e^{-2\pi i k/N}\}_{k=0}^{N-1}$. F_N har altså komponenter $e^{-2\pi i kn/N}$, der $0 \leq k, n < N$, og den kan regnes ut ved hjelp av koden

```
p = np.arange(0,N).reshape((1,-1))
F = np.exp( -2*np.pi*1j*p.T*p )
```

I eksponenten her har vi vektorisert multiplikasjon av en søylevektor med en radvektor. Dette gir oss alle mulige verdier for kn . Her brukes eksponential-funksjonen vektorisert, det vil si at e^A gir matrisen med komponent (k, n) lik $e^{a_{kn}}$.

Fouriermatrisen er veldig nyttig med tanke på anvendelser mot lyd. I denne settingen er ofte N veldig stor, så stor at det kanskje ikke er plass til hele matrisen F_N i minnet på datamaskinen! Det viser seg at Fouriermatrisen kan omskrives slik at man kan bruke den i beregninger likevel. ♣

Hva har mange på MAT1100U felles?

Abelkonkurransen!

- 1988: meg
- 2008: Jørgen Vold Rennemo (nå professor i Algebra, geometri og topologi ved UIO)
- 2009: Andreas Våvang Solbrå (tidligere masterstudent hos meg)
- 2012-2015: Johan Sokrates Wind (tidligere PhD-student hos meg)
- 2016: Anna Margrete Sletsjøe

Hva kan du bli? Og hva gjør en stipendiat?

Studerte: Master i Computational Science (CS:AMRA)
Arbeidssted: Bane Nor
Rådgiver vedlikeholdsplan

Maiken

Studerte: Master i Computational Science (CS:AMRA)
Arbeidssted: optimeringsgruppen ved Institutt for Informatikk ved UIB
Arbeidsoppgaver: Tar PhD. Bruk av metaheuristikk og maskinlæring for å optimere layout av offshore vindkraftparker. Introduksjon av høydeforskjeller mellom turbiner for å redusere vake-effekten, hvor nedstrøms turbiner mottar lavere vindhastigheter.

Martin

Studerte: Master i Computational Science (CS:AMRA)
Arbeidssted: Cognite AS
Arbeidsoppgaver: Software engineer

Mathias

Studerte: Master i Computational Science (CS:AMRA)
Arbeidssted: Norges Bank Investment Management
Arbeidsoppgaver: Data Analyst

Øystein

Lykke til med valget!