Ragni Piene, Matematisk institutt, Universitetet i Oslo

Foredrag på Universitetets årsfest 1/9-95

MATEMATIKKENS MANGFOLDIGHETER

Jeg skal snakke litt om matematikk, men la meg først si noe om menneskene. Trangen til å søke etter strukturer og lovmessigheter er en sterk drift hos menneskene - noen sammenligner den i styrke med selvoppholdelsesdriften og seksualdriften. Matematikk representerer en viktig del av denne søken etter å forstå verden.

Denne trangen, eller drivkraften, er kanskje den sterkeste motiverende faktor for matematikere og i utgangspunktet avhenger den ikke av om matematikken har noen praktisk betydning.

Fra de tidligste tider har menneskene observert himmellegemenes posisjoner - som alle vet, var det lenge diskusjon om hvorvidt sola og planetene beveger seg rundt jorda eller om jorda og planetene beveger seg rundt sola. Kopernikus, som var den som i Europa gjenoppdaget den heliosentriske teorien, antok at planetenes baner var sirkler, ettersom en sirkel er den mest perfekte - og guddommelige - av alle kurver. Matematikeren Kepler mente også først at banene måtte være sirkler, og han laget en modell av solsystemet med fem innskrevne regulære polyhedra (de platonske legemer)(Fig. 1). Men da han studerte Tycho Brahes observasjoner og målinger, fant han at planetenes baner ikke kunne var sirkler, men ovaler - mer presist, ellipser - som er mindre fullkomne enn sirkler, så denne teorien møtte motstand!.

Selv om drivkraften i matematikken er en søken etter struktur, lovmessighet, forståelse og derfor en fascinasjon i seg selv, kan resultatene senere vise seg å ha stor praktisk betydning.

For et par tusen år siden var det noen som funderte på hva slags figurer man kunne lage ved å sette sammen regulære mangekanter. Hvis alle mangekantene skal være like, fins det bare fem slike - de fem platonske legemer. Arkimedes beskrev andre: for eksempel kan man sette sammen 20 regulære sekskanter og 12 regulære femkanter til en symmetrisk figur. (Her er en tegning Leonardo da Vinci laget av denne figuren: Fig. 2) Klassifiseringen av disse strukturene har i nåtid kommet til nytte i kjemi: for eksempel beskriver figuren på bildet molekylstrukturen til et spesielt karbon. Kjenner man molekylstrukturen, kan karbonet framstilles syntetisk. (En helt annen sak er at denne samme strukturen, i en annen utgave, etter hvert har oppnådd ganske stor popularitet over hele verden: Fig. 3)

Et eksempel fra medisin: computer-tomografi (CT). Hensikten med CT er å "røntgenfotografere" tverrsnitt av f.eks. hjernen (uten å skjære i den) For hvert "tverrsnitt" sender man en bunt av tynne røntgenstråler gjennom hjernen og måler styrken av strålene på den andre siden. Problemet er så å rekonstruere tverrsnittet på bakgrunn av denne datamengden. Metoden som brukes er basert på en matematisk teori som den bøhmiske matematikeren Radon

utviklet på begynnelsen av dette århundret uten tanke på praktiske anvendelser.

En lignende teknikk brukes nå i oljeleting. Istedenfor røntgenstråler bruker man seismikk, og "ekkoene" gir data som igjen gjør det mulig å rekonstruere tverrsnitt og dermed et tredimensjonalt bilde av geologien i havbunnen.

Vi mennesker beskriver strukturer og lovmessigheter ved abstraksjoner, og vi utvikler ny forståelse ved å bearbeide disse abstraksjonene. Dette gjelder ikke minst i matematikk.

Tallene - de hele positive tallene 1, 2, 3, 4, ... - er så daglidagse og naturlige at det er vanskelig å tenke seg at de har blitt "oppfunnet". Men faktisk er de menneskenes kanskje første abstraksjon - som det tok lang tid å utvikle. Neste abstraksjon var de elementære regneoperasjonene, og med dem fulgte behovet for å utvide tallbegrepet: man trengte brøker fordi man delte tall med hverandre. Det tok mye lengre tid før negative tall ble akseptert som begrep fordi tall skulle representere en størrelse.

Som historisk fotnote kan jeg nevne at nordmannen Caspar Wessel var den første som ga en geometrisk innføring av det som kalles komplekse tall. Han var yngre bror av Johan Herman Wessel, og det er i år 250 år siden han ble født. Han var landmåler og skrev bare en matematisk avhandling, trykt på dansk i 1799 (Fig. 4). Avhandlingen kunne vært banebrytende, men den fikk ingen historisk betydning fordi den forble så godt som ulest i nesten 100 år. I stedet er det den tyske matematikeren Gauss (han med normalfordelingskurven) som har blitt kreditert for denne oppdagelsen.

Hvordan tallene representeres, eller skrives, har også forandret seg gjennom tidene. Den skrivemåten vi bruker i dag - den hindu-arabiske - har ti som grunntall og sifrenes posisjon bestemmer tallet. (Babylonerne brukte 60 som grunntall, og restene av det finner vi i oppdelingen av en time i 60 minutter og ett minutt i 60 sekunder.) Den romerske måten å skrive tall på er annerledes - den store forskjellen er ikke at symbolene er bokstaver og ikke sifre (og lettere å hugge i marmor), men at tallene representeres på en helt annen måte. Fordelen ved den hindu-arabiske skrivemåten er at den egner seg til utregninger: Skal vi for eksempel addere to store tall, har vi en oppskrift - eller algoritme - for å gjøre dette. (Vi setter opp tallene under hverandre, legger sammen enerne først, fører opp eventuelle tiere, legger sammen tierne osv.) Tilsvarende algoritmer har vi for de andre regneartene. Romertall derimot egner seg ikke til slike algoritmer (istedet brukte man kulerammer)!

Abstraksjonsnivået i matematikken kan lett gå ut over fatteevnen. Men det abstrakte har stor praktisk betydning, som mange ofte ikke tenker på.

Utviklingen av algoritmer var viktig for at man skulle kunne regne med store tall og foreta beregninger utover hva kulerammene ga mulighet til. (For å demystifisere algoritme-begrepet - tenk på en algoritme som en strikkeoppskrift.) En parallell til denne situasjonen har vi i dag: Dagens datamaskiner har en svær kapasitet maskinmessig. De arbeider hurtig, de har

enorm hukommelse, de utfører det de blir instruert til, og de gjør (i prinsippet) ingen feil. Men de må instrueres, de må ha oppskrifter - algoritmer - for å vite hva de skal gjøre i hvert eneste skritt av en beregning eller tallbehandling, og det er veldig viktig at algoritmene er effektive og tidsbesparende. Regning med svære datamaskiner - tungregning - er nå blitt helt uunnværlig innen teknologi og konstruksjonsteknikk, men også innen nesten alle naturvitenskapene. Meteorologene bruker tungregning for å lage værvarsler, og de kan nå lage mye bedre varsler enn før...

Datamaskinenes kapasitet kombinert med deres muligheter til grafisk framstilling gjør at mye av den eksperimentelle forskningen som utføres innen naturvitenskap nå kan foretas virtuelt - som simulerte forsøk. Eksperimenter i vindtunneler og bølgetanker kan simuleres på en datamaskin. Det er i ferd med å utvikles dataprogrammer som simulerer blodstrømmene i hjertet. Datamaskinene har også åpnet for anvendelser av nyere geometri i andre sammenhenger enn de tekniske - numerisk simulering av planters vekst er et eksempel på bruk av fraktal-geometri (Fig. 5).

Uten å gå inn på de etiske sider ved faget (vi lever ikke på noen måte i uskyldens tid): matematikere var med på å utvikle atombomben. Kanskje kan vi nå bidra på en annen måte ved å forklare at de franske prøvesprengningene i hvert fall fra et vitenskapelig synspunkt, er unødvendige - forsøkene kan simuleres på datamaskiner.

Tilbake til strukturene og menneskenes søken etter en forståelse av vår fysiske verden.

La oss se på hvordan man tegnet kart på Wessels og Gauss' tid. Det foregikk ved triangulering: man målte avstandene mellom trianguleringspunkter i terrenget og avtegnet trekantene på et kart (Fig. 6). Men - et av problemene er at kartet er flatt, mens jorda er krum. Egentlig bedriver man derfor geometri på en kuleoverflate, og her er reglene annerledes enn i planet.

Det var den tyske matematikeren Riemann som i forrige århundre for alvor definerte abstrakte geometriske rom, eller mangfoldigheter som de kalles - igjen tilsynelatende et eksempel på matematikk for matematikkens egen del. Så viste det seg at denne matematikken var akkurat det Einstein trengte til sin relativitetsteori - tyngdekraften kan forklares geeometrisk, som krumningen til vårt fire-dimensjonale tid-rom.

Apropos Riemann så har vi et pussig sammentreff mellom poesi og matematikk. I Den guddommelige komedie opererer Dante med en modell av universet som to sfærer. Den ene har jorda som sentrum og inneholder alt det synlige, mens den andre, som han kaller den empyriske, er tilholdsstedet for englene. Går man fra jorda og forbi stjernene, ender man på primum mobile - overflaten, men derfra skuer man inn i den empyriske verden, som altså har den samme primum mobile som overflate. Uten å gå mer i detalj: hvis man tenker seg - som Riemann foreslo - at universet er endelig, men uten grenser, er dette omtrent slik det måtte være!

Et stort spørsmål i teoretisk fysikk er om man kan finne en "teori om alt" som gir en enhetlig beskrivelse av alle fysiske lover og all materie og rom og tid. Det siste forslaget er strengteori. Utgangspunktet for den er at den fysiske verden er bygget opp av bittesmå strenger som vibrerer på ulike vis. Den matematiske modellen er en 10-dimensjonal mangfoldighet som man kan tenke seg som følger: i hvert punkt og til hvert tidspunkt fins det en bitteliten sammenkrøllet 6-dimensjonal mangfoldighet. (Det fins de som mener denne teorien har mye til felles med middelalderens forestiling om engler dansende på et nålehode.) Dette er igjen et eksempel på hvordan fysikk og matematikk beriker hverandre - denne gangen mener fysikerne at den matematikken de trenger ennå ikke er utviklet, og strengteori har gitt spennende bidrag til matematikken.

Et mysterium er hvorfor matematikk ser ut til å være det ideelle språk for å beskrive og forklare naturens fenomener. Er det mennesket som har skapt en fantastisk matematikk som favner skaperverket, eller er det skaperverket som er så fascinerende matematisk logisk?

Modellen for solsystemet basert på Keplers, Galileos og Newtons arbeid, er en av de mest suksessfulle matematiske modeller til alle tider: Uoverens-stemmelser mellom modellen og den observerte virkeligheten kunne forklares dersom det fantes en til da uoppdaget planet, og man kunne dessuten si akkurat hvor denne planeten måtte være. Slik ble Neptun oppdaget i 1846.

Et nyere eksempel - fra partikkelfysikk (fysikk består for en stor del av matematiske ligninger): Diracs ligning (som forener kvantemekanikk og relativitetsteori) hadde - i tillegg til den "opplagte" løsningen, elektronet - en annen løsning, som måtte svare til en annen type partikkel. Noen år senere ble positronet oppdaget!

Et viktig problem i molekylærbiologi er å forstå strukturen til proteiner og DNA (deoxyribonuclei acid). Man kan tenke seg at dersom cellekjernen er på størrelse med en basketball, så er DNA som et langt og flokete fiskesnøre inne i denne ballen (Fig. 7). Innen det området i matematikk som kalles topologi har det blitt utviklet en teori for klassifisering av knuter og floker - denne kan anvendes på DNA-knuter for å bestemme om to er like, eller om én kan ha oppstått fra en annen via det som kalles rekonstruksjon eller rekombinasjon.

Matematikk alltid hatt en viktig funksjon som underholdning og rekreasjon - og spill og gåter har på sin side bidratt til å utvikle og popularisere matematikken. Følgende lille kuriositet kan være til ettertanke: Fra 1704 til 1841 utkom i England et lite dameblad eller almanakk, Ladies' Diary (Fig. 8). Bladet skulle bl.a. lære bort "skriving, aritmetikk, geometri, trigonometri, astronomi, algebra og alle andre matematiske vitenskaper". De første årene inneholdt det også andre ting - bl.a. biografier av berømte kvinner, medisinske husråd og matoppskrifter - men allerede i 1709 slo redaktøren fast at siden damene tilsynelatende foretrakk matematikk framfor matlaging, skulle bladet fra da av utelukkende beskjeftige seg med aritmetiske spørsmål og andre matematiske gåter.

Tall og regning er én side av matematikken - den andre er form og struktur. I den skriftlige matematikkens historie kan man snakke om to tradisjoner - den orientalske som la vekt på utregninger og algoritmer, og den greske som la vekt på form, struktur og bevis. Jeg har prøvd å belyse at matematikken har vokst fram som en vev av disse to tradisjonene - med den orientalske regnekunsten som innslaget i den greske renningen. Og - som et vevet tøystykke - at matematikk kan anvendes til nær sagt hva som helst, og - på samme tid! - være vakkert i seg selv og morsomt å produsere.

Takk for oppmerksomheten.