

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE. — *Faisceaux plats et purs sur la base : un théorème de finitude.* Note (*) de Mme RAGNI PIENE, présentée par M. René Garnier.

Soient S un schéma affine intègre, X un S -schéma de type fini, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$ -module cohérent qui est S -plat et S -pur [(1), 3.3.3]. On verra ici que pour étudier la cohérence de l'image directe de $\mathcal{M}$ sur S il suffit d'étudier la cohérence de l'image directe sur $\text{Spec}(K)$ de la restriction de $\mathcal{M}$ à la fibre générique, i. e. à $X \otimes K$, où K est le corps des fractions de l'anneau de S . Plus précisément, on a le résultat suivant :

THÉORÈME. — Soient A un anneau noethérien, $f: X \rightarrow S = \text{Spec}(A)$ un morphisme de type fini, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$ -module cohérent qui est A -plat et A -pur.

On suppose que, pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$, $\Gamma(X_{\mathfrak{p}}, \mathcal{M}_{\mathfrak{p}})$ est un $A_{\mathfrak{p}}$ -module de type fini. Alors $M = \Gamma(X, \mathcal{M})$ est un A -module de type fini.

Démonstration. — On montre d'abord que pour tout point s de S , il existe un voisinage étale élémentaire affine ($S' = \text{Spec}(A')$, s') de (S , s) tel que si $X' = X \times_S S'$ et si $\mathcal{M}'$ est l'image réciproque de $\mathcal{M}$ sur X' , alors $\Gamma(X', \mathcal{M}')$ est un sous-module d'un A' -module libre. On en déduit que $\Gamma(X', \mathcal{M}')$ est un A' -module de type fini, et on conclut en considérant un recouvrement fini de S par des voisinages étales de ce type.

Rappelons le résultat suivant [(1), 3.3.2, 3.3.11] :

LEMME 1. — Soient A un anneau noethérien, $f: X \rightarrow S = \text{Spec}(A)$ un morphisme de type fini, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$ -module cohérent et A -plat.

Soient $x \in X$ et $s = f(x)$. Il existe un voisinage étale élémentaire affine (Y , y) de (X , x) et un voisinage étale élémentaire affine ($S' = \text{Spec}(A')$, s') de (S , s) tels que :

(i) on ait un diagramme commutatif de schémas pointés

$$\begin{array}{ccc} (Y, y) & \longrightarrow & (X, x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (S', s') & \longrightarrow & (S, s) \end{array}$$

(ii) si $\mathcal{N}$ est l'image réciproque de $\mathcal{M}$ sur Y , alors $\Gamma(Y, \mathcal{N})$ est un A' -module libre.

On en déduit que pour tout point x_s dans la fibre de f en s , $X \otimes k(s)$, il existe un diagramme commutatif de schémas pointés

$$\begin{array}{ccc} (Y_{x_s}, y_{x_s}) & \xrightarrow{v_{x_s}} & (X, x_{x_s}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (S_{x_s}, s_{x_s}) & \longrightarrow & (S, s) \end{array}$$

où (Y_α, y_α) [resp. (S_α, s_α)] est un voisinage étale élémentaire affine de (X, x_α) [resp. (S, s)] et tel que l'image réciproque de $\mathcal{M}$ sur Y_α est un $\mathcal{O}_{S_\alpha}$ -module libre. Comme $X \otimes k(s)$ est noethérien, il existe un ensemble fini I , tel que $X \otimes k(s)$ soit contenu dans la réunion des $v_\alpha(Y_\alpha)$, $\alpha \in I$.

Prenons ensuite un voisinage étale élémentaire affine (S', s') de (S, s) qui domine chacun des (S_α, s_α) pour $\alpha \in I$, et posons

$$X' = X \times_S S', \quad Y'_\alpha = Y_\alpha \times_{S_\alpha} S', \quad Y' = \coprod_{\alpha \in I} Y'_\alpha.$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & Y' & \\
 u' \downarrow & \searrow u & \\
 X' & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 S' & \longrightarrow & S
 \end{array}$$

(★)

Remarques :

1. Soit $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \times_X X'$. Comme (S', s') est un voisinage étale élémentaire affine de (S, s) , $\mathcal{M}$ est pur le long de $X \otimes k(s)$ si et seulement si $\mathcal{M}'$ est pur le long de $X' \otimes k(s')$ [(1), 3.3.3].

2. Soit U' l'image de Y' dans X' . U' est un ouvert et contient la fibre $X' \otimes k(s')$.

LEMME 2. — Soient S un schéma noethérien, X un S -schéma de type fini, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$ -module cohérent, U un ouvert de X qui contient $X \otimes k(s)$ pour un point s de S .

Si $\mathcal{M}$ est pur le long de $X \otimes k(s)$, alors U contient $\text{Ass}(\mathcal{M}/S)$ au-dessus d'un voisinage de s .

LEMME 3. — Soient X un schéma algébrique sur un corps k , $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module cohérent, U un ouvert de X .

Si $\mathbf{P}(X, \mathcal{F}, U, k)$ est la propriété que $\text{Ass}(\mathcal{F}) \subset U$, alors $\mathbf{P}$ est une propriété constructible (EGA, IV, 9.2.1).

La démonstration du lemme 3 est analogue à celle de EGA, IV, 9.8.3.

Démonstration du lemme 2. — Soit

$$E = \{ t \in S \mid \text{Ass}(\mathcal{M} \otimes k(t)) \subset U \}.$$

D'après le lemme 3, l'ensemble E est localement constructible dans S (EGA, IV, 9.2.3). E est alors constructible car S est noethérien.

Pour prouver le lemme 2, il suffit de montrer que E contient un voisinage ouvert du point donné s . Comme E est constructible, il suffit pour cela de montrer que toute généralisation de s est dans E (EGA, O_{III}, 9.2.5).

Soit $g : (\tilde{S}, \tilde{s}) \rightarrow (S, s)$ un hensélisé de S en s , et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X} = X \times_S \tilde{S} & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{S} & \xrightarrow{g} & S
 \end{array}$$

Soit $\tilde{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} \times_X \tilde{X}$. Dire que $\mathfrak{M}$ est pur le long de $X \otimes k(s)$ équivaut à dire que tout ouvert de $\tilde{X}$ qui contient $\tilde{X} \otimes k(\tilde{s})$ contient alors $\text{Ass}(\tilde{\mathfrak{M}}/\tilde{S})$. Comme la propriété **P** considérée dans le lemme 3 est constructible, il en résulte que $g(\tilde{S}) \subset E$ [EGA, IV, 9.2.2 (iv)]. Comme toutes les générations de s sont dans $g(\tilde{S})$, ceci achève la démonstration du lemme 2.

Revenons à la démonstration du théorème.

D'après le lemme 2, en remplaçant au besoin S' par un voisinage ouvert affine de s' , on peut supposer qu'on a un diagramme ($\star$) tel que

$$\text{Ass}(\mathfrak{M}'/S') \subset U' = u'(Y').$$

A fortiori on a $\text{Ass}(\mathfrak{M}') \subset U'$, de sorte que l'application restriction

$$\Gamma(X', \mathfrak{M}') \rightarrow \Gamma(U', \mathfrak{M}')$$

est injective (EGA, IV, 3.1.8).

Comme le morphisme $u' : Y' \rightarrow U'$ est fidèlement plat, on a aussi une injection (EGA, IV, 2.2.8)

$$\Gamma(U', \mathfrak{M}') \rightarrow \Gamma(Y', u'^* \mathfrak{M}') = \Gamma(Y', u^* \mathfrak{M}).$$

On sait que $\Gamma(Y', u^* \mathfrak{M})$ est un A' -module libre, A' étant l'anneau de S' . Comme A' est plat sur A , on a (EGA, III, 1.4.15)

$$\Gamma(X, \mathfrak{M}) \otimes_A A' = \Gamma(X', \mathfrak{M}').$$

Posons $M = \Gamma(X, \mathfrak{M})$ et $M' = M \otimes_A A'$. On a donc montré que M' est un sous-module d'un A' -module libre.

Soit $A \rightarrow \prod_{p \in \text{Ass}(A)} A_p = B$ l'application canonique, qui est injective. Par hypothèse,

$$\prod_{p \in \text{Ass}(A)} \Gamma(X_p, \mathfrak{M}_p) = \prod_{p \in \text{Ass}(A)} M_p = M \otimes_A B$$

est un B -module de type fini.

$A \rightarrow A'$ étant plat, l'homomorphisme $A' \rightarrow B' = B \otimes_A A'$ est injectif.

$M' \otimes_{A'} B'$ est un B' -module de type fini, et M' est un sous- A' -module d'un A' -module libre.

Le fait que M' est de type fini sur A' , résulte alors du lemme suivant :

LEMME 4. — Soient R un anneau noethérien, $\varphi : R \rightarrow R'$ un homomorphisme injectif d'anneaux, P un sous- R -module d'un R -module libre.

On suppose que $P \otimes_R R'$ est un R' -module de type fini. Alors P est de type fini sur R .

Démonstration. — On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{j} & R^{(j)} \\ p \downarrow & & \downarrow \varphi^{(j)} \\ P \otimes_R R' & \xrightarrow{j'} & R'^{(j)} \end{array}$$

où p est l'homomorphisme canonique et $j' = j \otimes_R R'$.

Comme $P \otimes_R R'$ est de type fini sur R' , il existe une partie finie I de J telle que $j(P \otimes_R R') \subset R'^{(I)}$.

Cela entraîne qu'on a aussi

$$\varphi^{(J)}(j(P)) \subset R'^{(I)}.$$

Comme $R \rightarrow R'$ est injectif,

$$\varphi^{(J)-1} \varphi^{(J)}(j(P)) = j(P) \subset \varphi^{(J)-1}(R'^{(I)}) = R^{(I)}.$$

P est alors un sous-module d'un R -module de type fini, donc est lui-même de type fini sur R .

Fin de la démonstration du théorème. — En prenant un recouvrement fini de $S = \text{Spec}(A)$ par des voisinages étales élémentaires affines $S' = \text{Spec}(A')$ tels que $M \otimes_A A' = \Gamma(X, \mathcal{M}) \otimes_A A'$ soit un A' -module de type fini, on conclut que M est un A -module de type fini.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — Soient A un anneau noethérien intègre de corps des fractions K , X un schéma lisse sur $\text{Spec}(A)$ à fibres géométriquement intègres.

Si $\Gamma(X_K, \mathcal{O}_{X,K})$ est un K -espace vectoriel de dimension finie, alors $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est un A -module de type fini.

En effet, si $f: X \rightarrow S$ est un morphisme de schémas qui est lisse et dont les fibres sont géométriquement intègres, alors $\mathcal{O}_X$ est S -plat et S -pur [(1), 3.3.3].

(*) Séance du 20 décembre 1971.

EGA : A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, *Éléments de Géométrie algébrique*, Publ. Math. I. H. R. S., nos 4, 8, 11, ...

(1) M. RAYNAUD et L. GRUSON, *Critères de platitude et de projectivité* (Inv. math., 13, fasc. 1/2, 1971).

Matematisk Institutt,
Universitetet i Oslo, Blindern,
Oslo 3, Norvège.