

ESTETIKK I MATEMATIKK

KRISTIAN RANESTAD

ABSTRACT. Det vakre spiller en vesentlig motiverende og veiledende rolle i matematikken. Med eksempler fra geometri, tallteori og et gammelt puslespill viser jeg hvordan matematiske begreper, resonnementer og resultater har en estetisk karakter.

1. OM DET VAKRE

- Er du opptatt av estetikk?
- Hva mener du, om jeg ser mye på kunst?
- Ja, nei. . . .

Jeg spurte en matematikkstudent hvor viktig det vakre er i matematikk for henne.

- Hvor viktig det er? Hvis det ikke var vakkert hadde i hvert fall ikke jeg giddet å jobbe med det.

Klarere kan det vel ikke sies hvor viktig estetikk er i matematikk. Men da ikke snevert tolket som geometriske mønstre i bilder. Snarere som noe som gjennomsyrrer hele faget. Dette er temaet for denne forelesningen.

Jeg spurte studenten hvordan matematikk er vakkert.

- Det er vakkert å tenke på. På en måte er det bildene som jeg ser for meg inne i hodet som er vakre.

Vurderingen av det vakre er selvsagt subjektiv, så jeg får snakke for meg selv. Det vakre viser seg for meg på tre forskjellige måter i matematikk,

- i begreper
- i resonnementer
- i resultater

Jeg vil vise eksempler på alle tre.

Begreper: Matematikk som redskap abstraherer og systematiserer problemstillinger. Begrepene er effektive abstraksjoner. De fanger det vesentlige og forenkler mange problemstillinger. Her er noen eksempler:

Positive/negative tall. Addisjon er vesentlig i handel og eiendomsforvaltning. Positive tall brukes på formue, negative tall uttrykker gjeld. Negative tall forenkler regning med formue og gjeld. Det forenkler er vakkert.

Rasjonale og irrasjonale tall. Oppdeling i like deler gir opphav til brøker, mens de irrasjonale tallene fyller ut punktene på tallinja. De irrasjonale tallene dukker også naturlig opp som måltall, til for eksempel diagonalen i et kvadrat med heltallig sidekant. Denne effektive funksjonen gjør disse begrepene vakre.

Mangekanter. Naturlige geometriske begreper for plane områder som enkelt er begrenset av rette linjer. Typisk for disse er at de er lettere å snakke om ved hjelp av bilder enn ord.

Sirkelen. Dette er kanskje det første en tenker på som et vakkert matematisk begrep. Den er visuell, veldig mye brukt i matematikk og går tilbake til Platon som eksempel fra hans ide-verden. Fins det noe vakrere.

Resonnementer/beviser: Her vil jeg gi et enkelt eksempel fra heltallene. Et primtall er et positivt heltall som bare er delelig med 1 og seg selv.

Hvorfor fins det da uendelig mange primtall?

Hvis ikke kan vi samle alle i en endelig liste, ta produktet av alle og legge til en:

$$N = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \dots \cdot P_n + 1$$

Resultatet er ikke delelig med noen av primtallene som vi har listet opp, for deler vi med et av dem får vi rest 1. Så en faktorisering av N må inneholde andre primtall.

Vi har dermed en motsigelse som viser at der må være uendelig mange primtall.

Et logisk vakkert bevis.

Resultater: De vakre resultatene er for meg de som er overraskende og enkle. Et slikt resultat som vi kjenner fra skolematematikken er Pytagoras' setning. Den gir en overraskende og enkel sammenheng mellom sidekantene i en rettvinklet trekant. To andre resultater som er tilsvarende overraskende og enkle er Pick's formel og Euler's formel.

Pick's formel skal vi se nærmere på nedenfor, mens Euler's formel vil bli presentert og diskutert i Geir Ellingsrud's verksted.

2. OPPTELLING I KOMBINATORIKK OG GEOMETRI

I resten av foredraget vil jeg utdype med et par eksempler det som for meg er vakkert i matematikk. Felles for disse er at opptelling spiller en overraskende vesentlige rolle. Å telle er kanskje vårt første møte med matematikk, derfor var det naturlig for meg å plukke disse eksemplene.

I det første eksempelet vil jeg vise det gamle puslespillet "Stomachion" og presentere og skissere et bevis for Pick's formel. Deretter skal vi med utgangspunkt i rettvinklede trekanter med heltallige sidelengder se på såkalte kongruente tall. Det beste resultatet om kongruente tall beskriver dem ved hjelp av antall heltallsløsninger av bestemte likninger, så igjen spiller opptelling en rolle.

Stomachion (Arkimedes' kvadrat). Stomachion, også kalt Arkimedes' kvadrat er et gammelt gresk puslespill. Det består av 14 biter som kan settes sammen til et kvadrat. Bitene er alle trekanter, firkanter

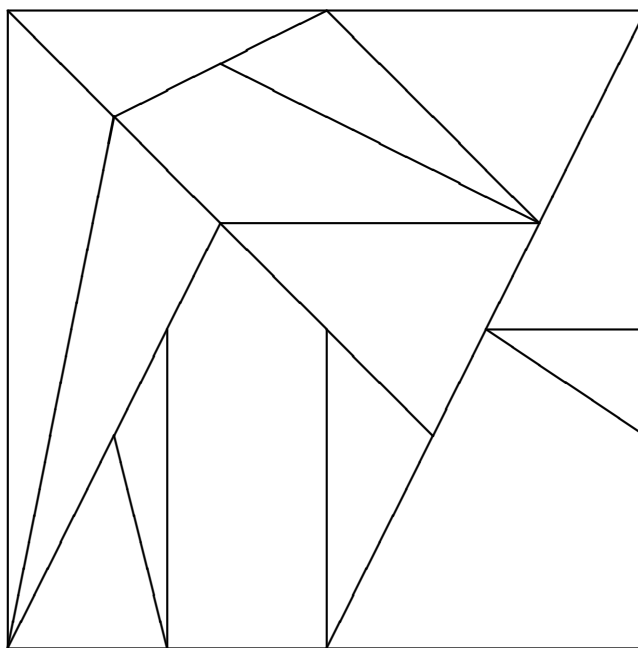


FIGURE 1. Stomachion

eller femkanter og kan også settes sammen til andre figurer. Sånn

sett ligner det på det kinsesiske tangram, men det har altså flere brikker. Arkimedes' navn knyttes til dette puslespillet, fordi en i gamle manuskripter har funnet at han var opptatt av det. Det er ikke klart om han faktisk er opphavsmannen til spillet, men det som kanskje er mer interessant er hvorfor han kan ha vært opptatt av dette spillet. Nyere gransking av de gamle manuskriptene, noen av disse ble gjenopdaget for bare få år siden, viser at han var opptatt av antall måter puslespillet kan legges på.

For meg illustrerer dette et skille mellom et matematisk problem og et kunstnerisk problem: Å finne antall måter brikkene kan settes sammen til et kvadrat er et matematisk problem, mens det å sette brikkene sammen til en vakker figur er et kunstnerisk problem.

Begge problemene har en estetisk dimensjon. Den estetiske dimensjonen i det matematiske problemet ligger i de geometriske begrepene og de kombinatoriske resonnementene som skal til for å telle opp løsningene. Det vakre ved resultatet er at det er så stort: Hvis en ikke tar hensyn til symmetri, så kan brikkene settes sammen til et kvadrat på utrolige 17136 forskjellige måter. Tar en hensyn til rotasjoner og ombyttinger av like brikker, blir tallet 536. Noe mindre, men likefullt et imponerende stort antall.

En kan spekulere i om Arkimedes var interessert i puslespillet fordi det hadde nettopp et overraskende stort antall løsninger. En av løsningene er vist på figur 1.

Jeg skal ikke her gå inn i de ulike måtene en kan legge puslespillet på, men bare vise noe av det geometriske verktøyet som kan brukes til dette.

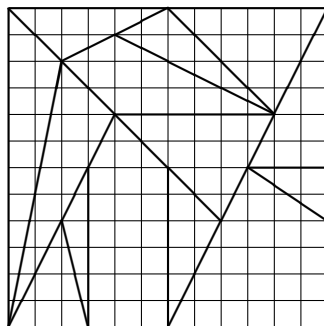


FIGURE 2. Stomachion i rutenett

Det viktigste er at det fins et underliggende rutenett eller gitter, som består av 12×12 kvadratiske ruter, slik at for hver løsning vil

alle hjørnene til alle brikkene eller mangekantene ligge i gitterpunkter, altså hjørner i rutene. Dette er vist i figur 2.

Med dette rutenettet er det nå mulig å finne lengdene til alle sidekantene til brikkene, størrelsen til alle vinklene og ikke minst arealet til hver enkelt brikke. Jeg skal her konsentrere meg om det siste, altså arealene. For Georg Pick oppdaget på 1890-tallet en vakker formel for arealet til en mangekant med hjørner i gitterpunkter til et rutenett.

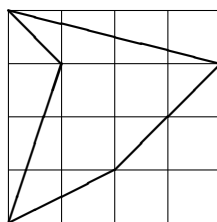


FIGURE 3. Mangekant med hjørner i gitterpunkter til et rutenett

Setning 1. Pick's formel. *En mangekant med hjørner i gitterpunkter til et rutenett har et areal som er gitt av formelen*

$$A = I + \frac{1}{2}R - 1$$

der I er antall gitterpunkter i det indre av mangekanten, mens R er antall gitterpunkter som ligger på randa av mangekanten.

Femkanten i figur 3 har 5 indre gitterpunkter, og 6 gitterpunkter på randa, så i følge formelen er arealet

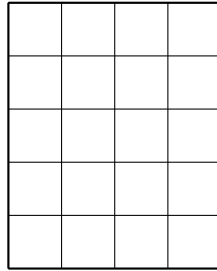
$$A = 5 + \frac{1}{2} \cdot 6 - 1 = 7$$

det vil si det samme som arealet til 7 ruter i rutenettet.

Jeg skal skissere et bevis for denne formelen. Beviset følger en strategi som er enkel og ofte effektiv. Den består i å vise formelen først for rektangler og trekanter, og deretter for mangekanter som er satt sammen av rektangler og trekanter. Siden alle mangekanter faktisk kan deles opp i trekanter og rektangler blir konklusjonen at formelen gjelder for alle.

La oss begynne med et rektangel med sidekanter langs linjer i rutenettet. For enkelhets skyld ser vi på et eksempel. Helt tilsvarende kan det gjøres med et hvert annet rektangel.

Et rutenett med 4×5 ruter har selvsagt areal lik 20 ruter. Antall indre punkter i dette rutenettet er $3 \cdot 4 = 12$, mens antall gitterpunkter

FIGURE 4. Et rektangulært rutenett med $4 \times 5 = 20$ ruter

på randa er 18, så formelen gir

$$12 + \frac{1}{2} \cdot 18 - 1 = 20$$

som er antall ruter i rutenettet.

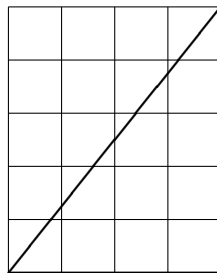


FIGURE 5. En rettvinklet trekant i et rutenett

Den rettvinklede trekanten en får ved å trekke en diagonal i dette rektangelet, slik som i figur 5 har selvsagt et areal som er halve arealet til hele, altså lik 10 ruter.

Siden det ikke er noen gitterpunkter på diagonalen, er antall indre gitterpunkter i trekanten akkurat halvparten av antall gitterpunkter i rektangelet, altså 6. Antall gitterpunkter på randa er akkurat en mer enn halvparten av antallet randpunkter til rektangelet, altså 10. Formelen gir derfor

$$6 + \frac{1}{2} \cdot 10 - 1 = 10,$$

så den stemmer også i dette tilfellet. Dersom trekanten ikke er rektangulær, kan vi likevel få plass til den inne i et rektangulært rutenett. I figurene 6 og 7 er det to eksempler på slike trekanter.

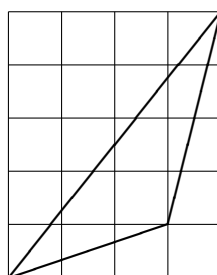


FIGURE 6. Stumpvinklet trekant i et rutenett

I figur 6 kan en enkelt dele området av rutenettet som ikke dekkes av trekanten i rettvinklede trekanter og rektangler, så en finner arealet av trekanten ved å trekke arealet av disse bitene fra arealet til hele rutenettet. Arealet til hele rutenettet er 20, mens de fire bitene har areal $1, 2, \frac{3}{2}$ og 10. Derfor er arealet til trekanten $5\frac{1}{2}$. Antall indre punkter i denne trekanten er 5, mens antall punkter på randa er 3, så formelen gir

$$5 + \frac{1}{2}3 - 1 = 5\frac{1}{2}$$

og stemmer.

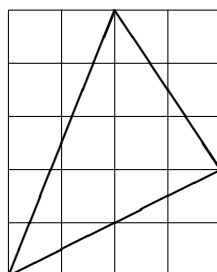


FIGURE 7. Spissvinklet trekant i et rutenett

I figur 7 er regningen helt tilsvarende, prøv!

Det avgjørende steget i beviset er å vise at dersom formelen gjelder for to mangekanter som ikke overlapper hverandre, men har en felles kant, så gjelder den også for mangekanten en får ved å slå de to mangekantene sammen. Et eksempel er vist i figur 8. Antall indre gitterpunkt i den første mangekanten kaller vi I_1 , og antall randpunkt på den samme kaller vi R_1 . Tilsvarende er I_2 og R_2 henholdsvis antall indre og antall randpunkt til den andre mangekanten. Siden de

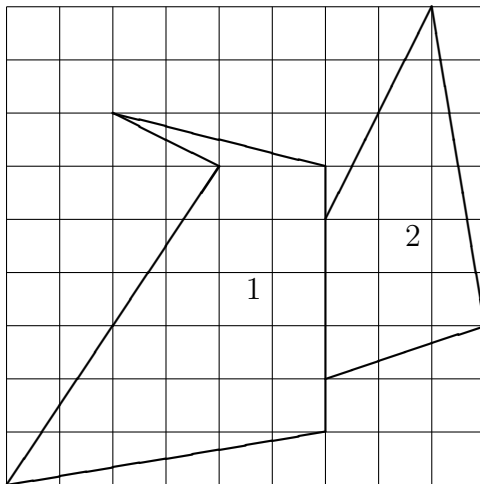


FIGURE 8. Sammensatt mangekant

to mangekantene har ei felles rand så har de også et antall felles randpunkt, dette kaller vi F . Endepunktene til den felles randa, er selvsagt gitterpunkter, men det kan godt være flere gitterpunkter på fellesranda. I eksemplet er $F = 4$. Nå antar vi at Pick's formel gjelder for de to mangekantene hver for seg. Det vil si at arealet A_1 til den første er

$$A_1 = I_1 + \frac{1}{2}R_1 - 1,$$

mens arealet til den andre mangekanten er

$$A_2 = I_2 + \frac{1}{2}R_2 - 1.$$

Arealet til den sammensatte mangekanten er selvsagt

$$A = A_1 + A_2.$$

Antall indre gitterpunkter i den sammensatte mangekanten er

$$I = I_1 + I_2 + (F - 2),$$

siden disse består av de indre punktene til den første og den andre mangekanten i tillegg til alle punktene på den felles randa som ikke er endepunkter. Antall randpunkter på den sammensatte mangekanten er

$$R = R_1 - F + R_2 - F + 2,$$

fordi de består av randpunktene på hver av de to mangekantene som ikke er på den felles randa i tillegg til de to endepunktene til denne

felles randa. Setter vi dette inn i formelen får vi

$$\begin{aligned} I + \frac{1}{2}R - 1 &= I_1 + I_2 + (F - 2) + \frac{1}{2}(R_1 - F + R_2 - F + 2) - 1 \\ &= (I_1 + \frac{1}{2}(R_1 - 1)) + (I_2 + \frac{1}{2}(R_2 - 1)) = A_1 + A_2 = A. \end{aligned}$$

Så dersom formelen gjelder for de to mangekantene hver for seg, gjelder den også for den sammensatte mangekanten. Siden vi allerede har vist at formelen for rektangler og trekanter (vi har egentlig bare vist formelen i eksempler, men det generelle beviset er helt analogt), så kan vi nå argumentere for at den gjelder for alle mangekanter: En mangekant med hjørner i gitterpunkter, kan nemlig alltid deles opp i trekanter og rektangler. Et eksempel er vist i figur 9.

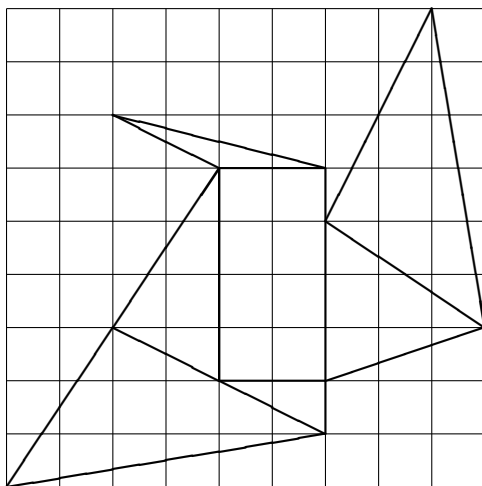


FIGURE 9. Oppdeling av en mangekant i trekanter og rektangler

Vi kan da starte med en trekant eller rektangel, og legge til de andre en etter en. I hvert steg viser argumentet over at den formelen gjelder for den sammensatte mangekanten. Fortsetter vi til vi har fått med hele mangekanten vi startet med, er vi ferdige. Slik har vi nå vist Pick's formel.

I dette eksempelet synes jeg ikke bare formelen er vakker. Også strategien og de ulike stegene i beviset er vakre. Kanskje er det fordi det bruker både bokstavregning (utregningen av formelen for den sammensatte mangekanten), geometri (oppdelingen av en mangekant i trekanter og rektangler) og logikk (induksjonsbeviset, det vil si strategien i beviset).

Nå skal vi se på et annet eksempel.

Konguente tall. Pytagoras' setning kjenner vi godt fra skolematematikken. Den sier at summen av kvadratene av sidelengdene til katetene i en rettvinklet trekant er lik kvadratet av lengden til hypotenusen.

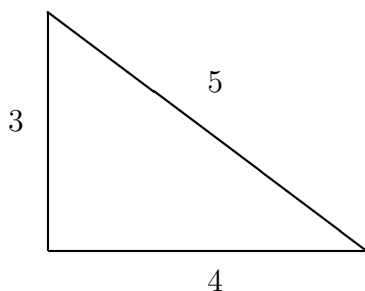


FIGURE 10. Rettvinklet trekant med heltallige sidelengder

Et eksempel vi ofte ser er trekanten med sidelengder 3, 4 og 5. De tre heltallene 3, 4 og 5 kalles naturlig nok et Pytagoreisk talltrippel. En kan da lure på om det fins andre rettvinklede trekanter med heltallige sidelengder, altså om det fins flere Pytagoreiske talltripler. Faktisk er det ikke vanskelig å liste opp alle. Nemlig, for hvert par av to forskjellige positive heltall p og q er

$$a = p^2 - q^2, b = 2pq, c = p^2 + q^2$$

nettopp sidelengder i en rettvinklet trekant. For eksempel gir $p = 2$ og $q = 1$, de tre tallene

$$3 = 2^2 - 1^2, 4 = 2 \cdot 2 \cdot 1, 5 = 2^2 + 1^2$$

som vi nevnte over.

Et gammelt problem som går tilbake i hvert fall til gresk antikk, gjelder såkalte konguente tall. Et positivt heltall kalles **konguent** dersom det er arealet til en rettvinklet trekant der sidelengdene alle er rasjonale. Dersom alle sidelengdene i en rettvinklet trekant er heltallige, vil selvsagt arealet være heltallig. Derfor kan vi med lista av Pytagoreiske talltripler (a, b, c) finne uendelig mange kongruente tall: For et par av heltall p, q er $a = p^2 - q^2$ og $b = 2pq$ lengdene til katetene i en rettvinklet trekant, så arealet til denne trekanten er

$$A = \frac{1}{2}(p^2 - q^2) \cdot 2pq = pq(p^2 - q^2)$$

som naturligvis er et helt tall. Etter definisjonen er dette heltallet kongruent. Så alle heltall som kan skrives på formen $pq(p^2 - q^2)$ er kongruente. For $p = 2$ og $q = 1$ blir for eksempel $A = 6$, så 6 er et kongruent tall. Siden p og q kan variere fritt, så fins det uendelig

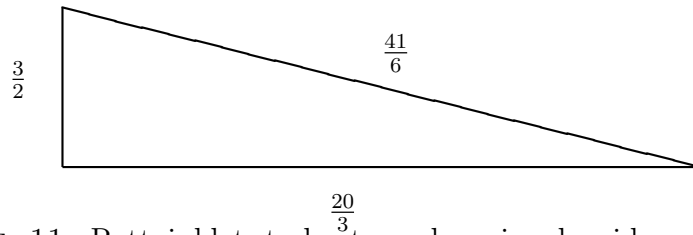


FIGURE 11. Rettvinklet trekant med rasjonale sidelengder og areal 5

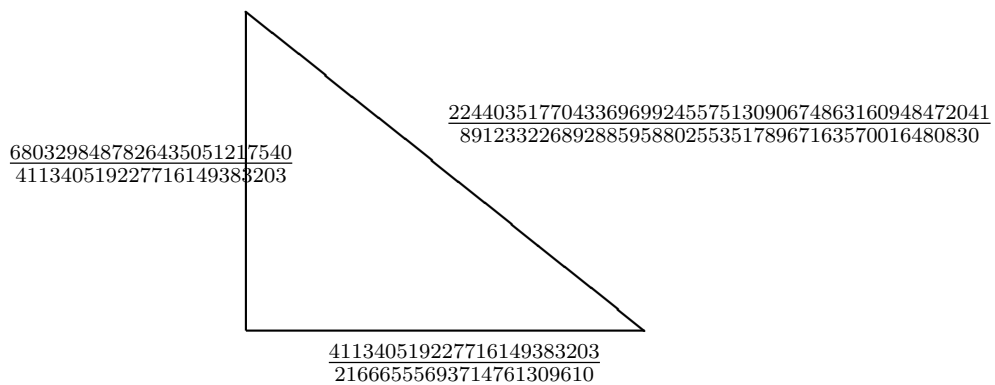


FIGURE 12. Rettvinklet trekant med rasjonale sidelengder og areal 157 (etter Don Zagier)

mange kongruente tall. Men det fins enda flere enn dem som har formen $pq(p^2 - q^2)$. For eksempel kan ikke 5 skrives på den formen, men 5 er også kongruent, siden

$$\frac{3}{2}, \frac{20}{3}, \frac{41}{6}$$

er sidekanter i en rettvinklet trekant ($\frac{3}{2}^2 + \frac{20}{3}^2 = \frac{41}{6}^2$) og arealet til denne trekanten er

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{20}{3} = 5.$$

Det gamle problemet er å finne alle kongruente tall. Siden det er uendelig mange, så gjelder problemet om en kan finne en enkel måte å sjekke om et tall er kongruent eller ikke.

157 er for eksempel kongruent, men som vist i figur 12 har sidelengdene i den enkleste rettvinklede trekanten som viser dette tellere og

nevnere med mange sifre, så trekanten som viser om et tall er kongruent er ikke nødvendigvis så lett å finne.

I 1983 viste Jerrold Tunnell to setninger som karakteriserer kongruente tall:

Setning 2. *Hvis n er kongruent, odde og kvadratfritt, altså ikke delelig med noe kvadrattall, da har likningen*

$$2x^2 + y^2 + 8z^2 = n$$

akkurat dobbelt så mange heltallsløsninger som likningen

$$2x^2 + y^2 + 32z^2 = n.$$

Setning 3. *Hvis $n = 2m$ er et kongruent partall som også er kvadratfritt, da har likningen*

$$4x^2 + y^2 + 8z^2 = m$$

akkurat dobbelt så mange heltallsløsninger som likningen

$$4x^2 + y^2 + 32z^2 = n.$$

For eksempel med $n = 5$ har ingen av likningene i Setning 2 heltallsløsninger, mens med $n = 6$ har ingen av av likningene i Setning 3 heltallsløsninger.

I begge tilfelle tror man at setningene også gjelder i den logisk motsatte retningen, altså at dersom et tall oppfyller konklusjonen så er det faktisk også kongruent. Dette avhenger imidlertid av et annet problem som det er utlyst en million dollar for å løse, det så kalte Birch, Swinnerton-Dyer problemet.

Å finne antall heltallsløsninger i de gitte likningene er ikke så vanskelig, så for meg er disse setningene både overraskende og vakre. Samtidig er som sagt problemet fortsatt ikke helt løst, men henger sammen med et av de viktigste uløste problemene i matematisk forskning idag. Derfor er det naturlig å avslutte her.

Litteratur. Den enkleste referansen til Pick's formel og til kongruente tall er å søke på internett etter "Pick's fomula" og "congruent numbers".

Her er to skriftlige referanser:

Ranestad, Kristian: "Pick's formel", Normat 43 (1995), no. 3, 136–142,

Om kongruente tall og Tunnells setninger:

Koblitz, Neil: “ Introduction to elliptic curves and modular forms,”
Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 97. Springer-Verlag,
New York, 1993.

MATEMATISK INSTITUTT, UNIVERSITETET I OSLO P.O.Box 1053, BLINDERN,
0316 OSLO

E-mail address: `ranestad@math.uio.no`