

Einstein flislegging

Aperiodisk flislegging med flisa *hatten*

Kristian Ranestad (UiO), etter Noah Hessen Bjerke

31.10.2024

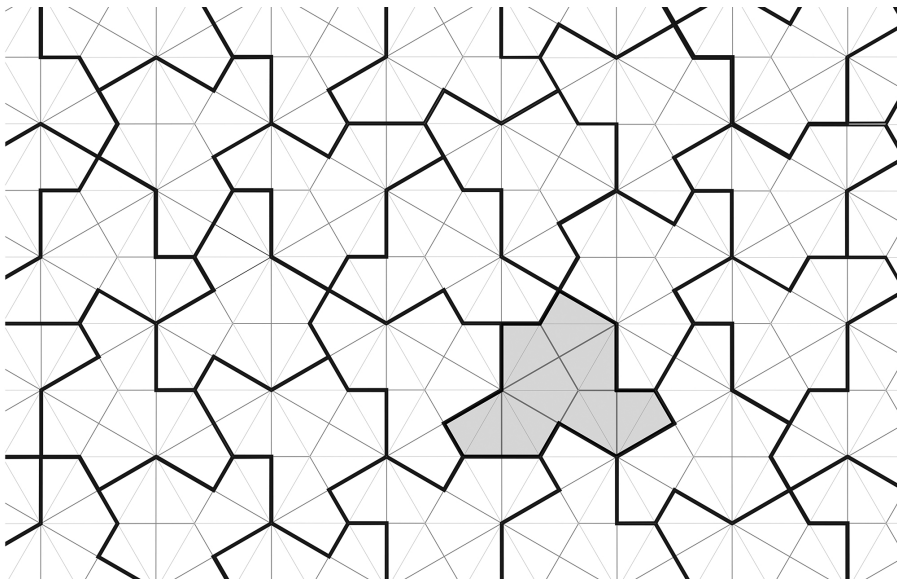
I november 2022 oppdagde David Smith *hatten* . Den løste *einstein* problemet, som hadde vært uløst i 50 år.

I november 2022 oppdagde David Smith *hatten* . Den løste *einstein* problemet, som hadde vært uløst i 50 år.

- Aperiodisk flislegging- litt historie
- Flislegging med regulære og konvekse mangekanter
- *Hatten*
- Polyfliser, kombinatorikk og hierarki

Flislegging med mangekantede fliser

- **Periodisk:** Dersom flisleggingen gjentar seg (uendelig mange ganger under translasjoner).
- **Aperiodisk flislegging:** Ikke periodisk



Aperiodisk flislegging- Litt Historie

Aperiodiske fliser: Ei endelig mengde (ei eller flere) mangelkanta fliser kalles aperiodisk dersom de bare tillater *aperiodisk* flislegging.

Aperiodisk flislegging- Litt Historie

Aperiodiske fliser: Ei endelig mengde (ei eller flere) mangelkanta fliser kalles aperiodisk dersom de bare tillater *aperiodisk* flislegging.

Fins de?

Aperiodisk flislegging- Litt Historie

Aperiodiske fliser: Ei endelig mengde (ei eller flere) mangelkanta fliser kalles aperiodisk dersom de bare tillater *aperiodisk* flislegging.

Fins de?

- 1964 - Robert Berger - 20 426 fliser

Aperiodisk flislegging- Litt Historie

Aperiodiske fliser: Ei endelig mengde (ei eller flere) mangelkanta fliser kalles aperiodisk dersom de bare tillater *aperiodisk* flislegging.

Fins de?

- 1964 - Robert Berger - 20 426 fliser
- Redusert til 104 fliser

Aperiodisk flislegging- Litt Historie

Aperiodiske fliser: Ei endelig mengde (ei eller flere) mangelkanta fliser kalles aperiodisk dersom de bare tillater *aperiodisk* flislegging.

Fins de?

- 1964 - Robert Berger - 20 426 fliser
- Redusert til 104 fliser
- 1971 - Raphael M. Robinson - 6 fliser

Aperiodisk flislegging- Litt Historie

Aperiodiske fliser: Ei endelig mengde (ei eller flere) mangelkanta fliser kalles aperiodisk dersom de bare tillater *aperiodisk* flislegging.

Fins de?

- 1964 - Robert Berger - 20 426 fliser
- Redusert til 104 fliser
- 1971 - Raphael M. Robinson - 6 fliser
- 1974 - Roger Penrose - 2 fliser

Aperiodisk flislegging- Litt Historie

Aperiodiske fliser: Ei endelig mengde (ei eller flere) mangelkanta fliser kalles aperiodisk dersom de bare tillater *aperiodisk* flislegging.

Fins de?

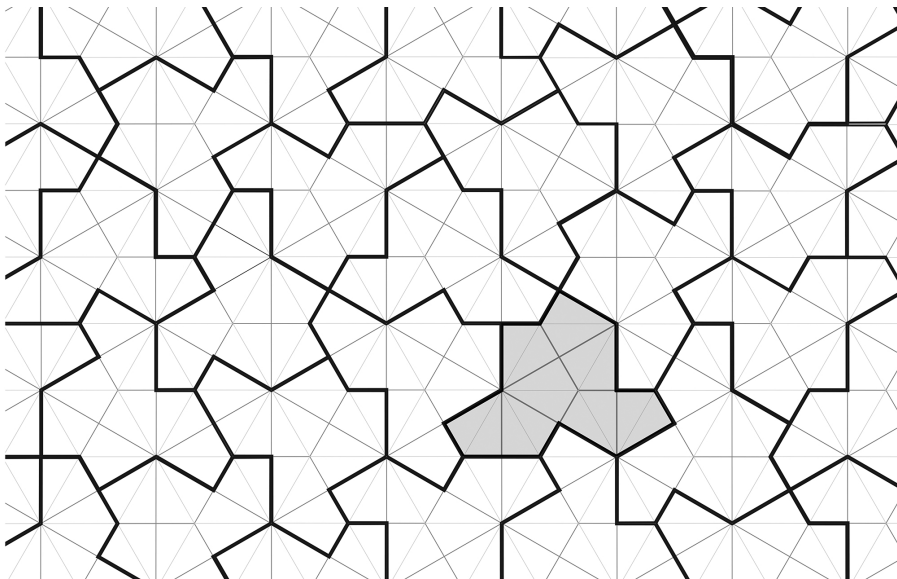
- 1964 - Robert Berger - 20 426 fliser
- Redusert til 104 fliser
- 1971 - Raphael M. Robinson - 6 fliser
- 1974 - Roger Penrose - 2 fliser
- *Einstein* problemet, Fins det med ei aperiodisk flis?

Aperiodisk flislegging- Litt Historie

Aperiodiske fliser: Ei endelig mengde (ei eller flere) mangelkanta fliser kalles aperiodisk dersom de bare tillater *aperiodisk* flislegging.

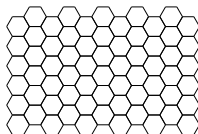
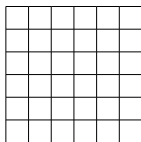
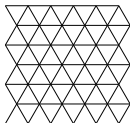
Fins de?

- 1964 - Robert Berger - 20 426 fliser
- Redusert til 104 fliser
- 1971 - Raphael M. Robinson - 6 fliser
- 1974 - Roger Penrose - 2 fliser
- *Einstein* problemet, Fins det med ei aperiodisk flis?
- 2023 - David Smith et al. - 1 flis - *Hatten*



Regular mangekanter som flislegger *kant i kant*

Kant i kant: Ei flislegging er *kant i kant* hvis hver kant er kanten til nøyaktig to fliser.



Hvorfor bare trekanter, kvadrater og sekskanter?

Se på vinkelsummen der $n \geq 3$ eller flere fliser møtes. Vinkelen i en regulær m -kant er

$$\frac{180(m-2)}{m},$$

så

$$\frac{360}{n} = \frac{180(m-2)}{m}.$$

Da er

$$3 \leq n = \frac{2m}{m-2},$$

så

$$m \leq 6.$$

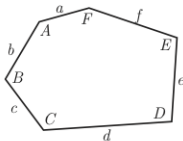
Hvis $m = 5$, så er $n = \frac{10}{3}$ ikke et helt tall. Så de eneste som er mulig er

$$m \in \{3, 4, 6\}$$

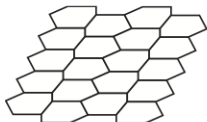
Konvekse mangekanter som flislegger *kant i kant*

Bare m -kanter med $m < 7$ er mulig!

Av 6-kanter er der tre typer. (K. Reinhardt (1918))



(a) A labeled hexagon



(b) $A + B + C = 2\pi$;
 $a = d$



(c) $A + B + D = 2\pi$;
 $a = d$; $c = e$



(d) $A = C = E = 2\pi/3$;
 $a = b$; $c = d$; $e = f$

5-kanter

Karl Reinhardt (1918): Der er fem typer!

type 1

$$A + B + C = 360^\circ.$$



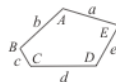
type 2

$$A + B + D = 360^\circ, \\ a = d.$$



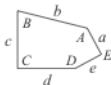
type 3

$$A = C = D = 120^\circ, \\ a = b, d = c + e.$$



type 4

$$C = E = 90^\circ, \\ a = e, c = d.$$



type 5

$$A = 120^\circ, \\ C = 60^\circ, \\ a = b, c = d.$$

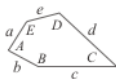


Flere 5-kanter

Richard B. Kerschner (1968): Der er tre til!

type 6

$$\begin{aligned}A + B + D &= 360^\circ, \\ A &= 2C, \\ a = b = e, c &= d.\end{aligned}$$



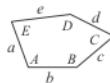
type 7

$$\begin{aligned}2B + C &= 360^\circ, \\ 2D + A &= 360^\circ, \\ a = b = c &= d.\end{aligned}$$



type 8

$$\begin{aligned}2A + B &= 360^\circ, \\ 2D + C &= 360^\circ, \\ a = b = c &= d.\end{aligned}$$



MATHEMATICAL GAMES

*On tessellating the plane
with convex polygon tiles*

by Martin Gardner

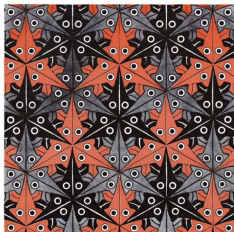
"Many of the brightly coloured, tile-covered walls and floors of the Alhambra in Spain show us that the Moors were masters in the art of filling a plane with similar interlocking figures, bordering each other without gaps. What a pity that their religion forbade them to make images!"

—M. C. Escher

Imagine that you have an infinite supply of jigsaw puzzle pieces, all identical. If it is possible to fit them together without gaps or overlaps to cover the entire plane, the piece is said to tile

the plane, and the resulting pattern is called a tessellation. From the most ancient times such tessellations have been used throughout the world for floor and wall coverings and as patterns for furniture, rugs, tapestries, quilts, clothing and other objects. The late Dutch artist M. C. Escher amused himself by tessellating the plane with intricate shapes that resemble birds, fish, animals and other living creatures (see illustration below).

A tile that tessellates obviously can have an infinite variety of shapes, but by imposing severe restrictions on the shape the task of classifying and enumerating tessellations is reduced to something manageable. Geometers have been particularly interested in polygonal tiles, of which even the simplest present form-



Tessellation by M. C. Escher

112

© 1975 SCIENTIFIC AMERICAN, INC.

Martin Gardner, Scientific American 1975

"At this point," writes Kershner, "either [Reinhardt's] technique or his fortitude failed him, and he closed the thesis with the statement that in principle it ought to be possible to complete the consideration of pentagons along the lines of his considerations up to that point, but it would be very tedious and there was always the possibility that no further types would emerge. Indeed, it is quite clear that Reinhardt and everyone else in the field thought that the Reinhardt pentagon list was probably complete.

"For reasons that I would have difficulty explaining I have been intrigued by this problem for some 35 years. Every five or 10 years I have made some kind of attempt to solve the problem. Some

two years ago I finally discovered a method of classifying the possibilities for pentagons in a more convenient way than Reinhardt's to yield an approach that was humanly possible to carry to completion (though just barely). The result of this investigation was the discovery that there were just three additional types of pentagon...that can pave the plane. These pavings are totally surprising. The discovery of their existence is a source of considerable gratification."

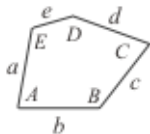
Kershner's paper does not include a proof that there are no other convex pentagons that tile the plane, "for the excellent reason," reads the editor's introductory note, "that a complete proof would require a rather large book."

En 5-kant til

Marjorie Rice (1977):

type 9

$$\begin{aligned}2E + B &= 360^\circ, \\ 2D + C &= 360^\circ, \\ a &= b = c = d.\end{aligned}$$



Marjorie Rice

Enda en 5-kant til

Richard James (1978):

type 10

$$\begin{aligned}A &= 90^\circ, B + E = 180^\circ, \\2D + E &= 360^\circ, \\2C + B &= 360^\circ, \\a &= b = c + e.\end{aligned}$$

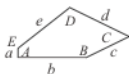


Enda tre 5-kanter til

Marjorie Rice (1978):

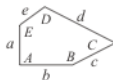
type 11

$$\begin{aligned}A &= 90^\circ, \\C + E &= 180^\circ, \\2B + C &= 360^\circ, \\d &= e = 2a + c.\end{aligned}$$



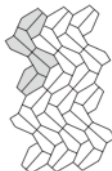
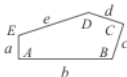
type 12

$$\begin{aligned}A &= 90^\circ, \\C + E &= 180^\circ, \\2B + C &= 360^\circ, \\2a &= d = c + e.\end{aligned}$$



type 13

$$\begin{aligned}A = C &= 90^\circ, \\2B = 2E &= 360^\circ - D, \\2c &= 2d = e.\end{aligned}$$

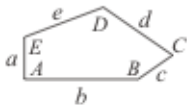


Enda en 5-kant til

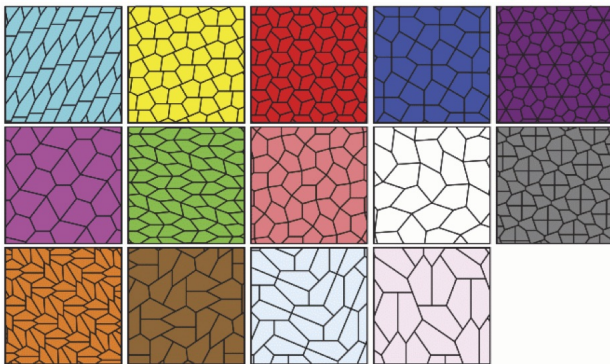
Rolf Stein (1985):

type 14

$$\begin{aligned}A &= 90^\circ, \\ C + E &= 180^\circ, \\ 2B + C &= 360^\circ, \\ 2a &= 2c = d = e.\end{aligned}$$

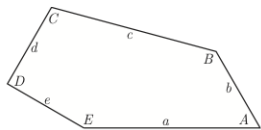


Så i 2015: Fjorten 5-kanter



En 5-kant til

Casey Mann, Jennifer McLoud-Mann, David Von Derau
(2015):



(a)

$$A = 60^\circ$$

$$B = 135^\circ$$

$$C = 105^\circ$$

$$D = 90^\circ$$

$$E = 150^\circ$$

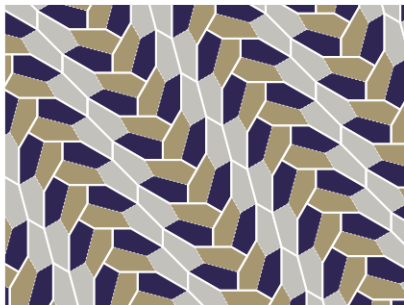
$$a = 1$$

$$b = 1/2$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$$

$$d = 1/2$$

$$e = 1/2$$



(b)

A 3-block transitive tiling by the Type 15 pentagon. The thick white lines outline the 3-block, and the colors of the tiles indicate the transitivity classes of pentagons.

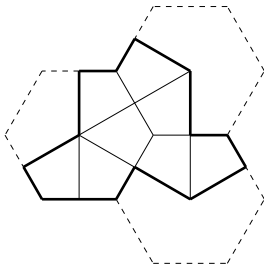
Der er ingen flere

Michael Rao (2017)



Så en *einstein* kan ikke være konveks!

David Smith: *Hatten*



Hva er det å bevise?

To ting: At *hatten* kan brukes til å flislegge hele planet, og at denne flisleggingen er aperiodisk

Hva er det å bevise?

To ting: At *hatten* kan brukes til å flislegge hele planet, og at denne flisleggingen er aperiodisk

- Lage vilkårlig store polyfliser som induktivt dekker hele planet.

Hva er det å bevise?

To ting: At *hatten* kan brukes til å flislegge hele planet, og at denne flisleggingen er aperiodisk

- Lage vilkårlig store polyfliser som induktivt dekker hele planet.
- To viktige definisjoner og resultater: Kombinatorisk ekvivalens og en entydig hierarkisk egenskap.

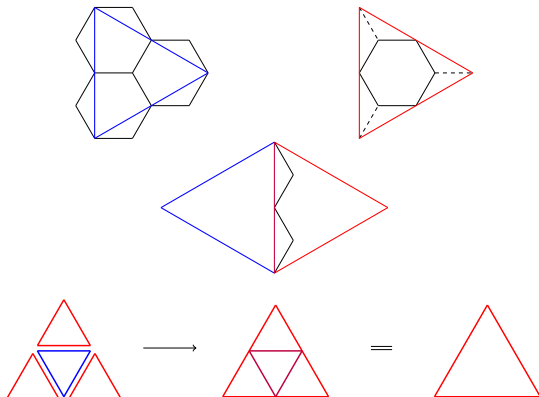
Hva er det å bevise?

To ting: At *hatten* kan brukes til å flislegge hele planet, og at denne flisleggingen er aperiodisk

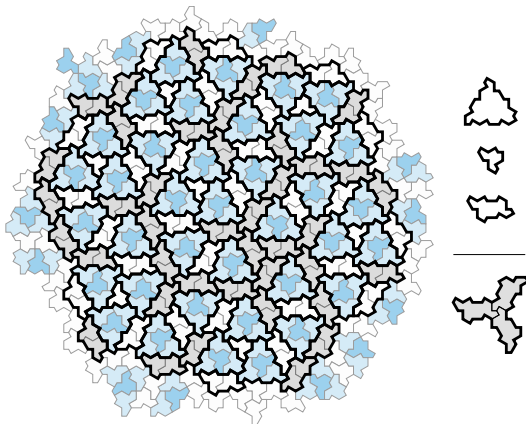
- Lage vilkårlig store polyfliser som induktivt dekker hele planet.
- To viktige definisjoner og resultater: Kombinatorisk ekvivalens og en entydig hierarkisk egenskap.
- Fylle inn detaljer og fullføre beviset.

Poly 6-kanter

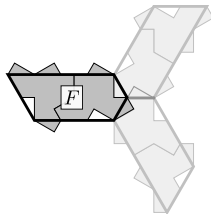
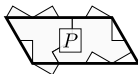
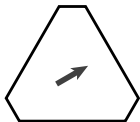
Polyflis: I en flislegging kan endelig mange fliser danne en sammenhengende *polyflis*.



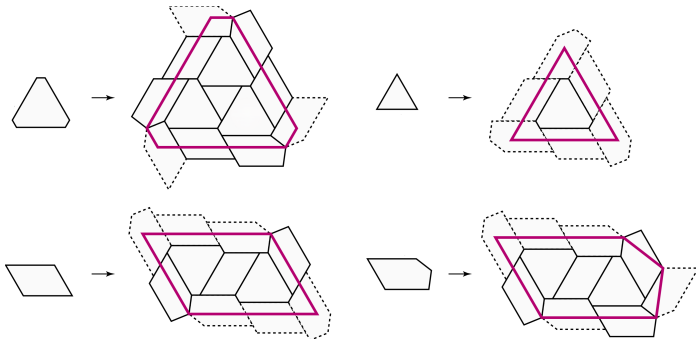
Flislegging med polyfliser



Flislegging med polyfliser



Flislegging med polyfliser



Kombinatorisk ekvivalens

To flislegginger $\mathcal{T}$ og $\mathcal{T}'$ er *kombinatorisk ekvivalente* hvis der er en bijeksjon mellom flisene og mellom kantene som bevarer relasjonen mellom flisene og kantene.

Kombinatorisk ekvivalens

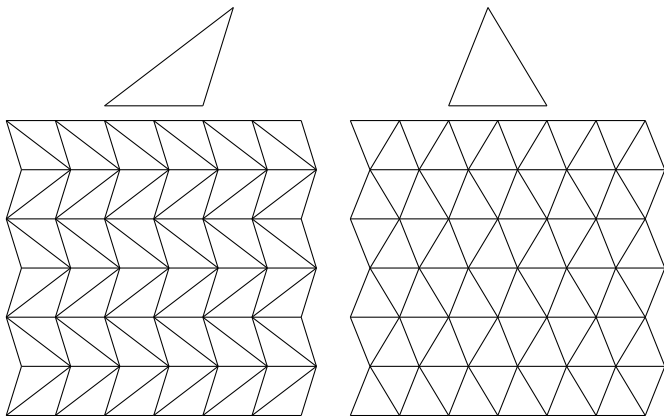
To flislegginger $\mathcal{T}$ og $\mathcal{T}'$ er *kombinatorisk ekvivalente* hvis der er en bijeksjon mellom flisene og mellom kantene som bevarer relasjonen mellom flisene og kantene.

Der er en ordentlig (engelsk) definisjon...

Kombinatorisk ekvivalens

Two tilings are *combinatorially equivalent* if there exists a bijection between their tiles, and a bijection between the maximal line segments in the unions of the boundaries of the tiles, such that corresponding tiles and line segments in the two tilings are in the same orientation, corresponding tiles adjoin corresponding line segments, on the same side of those line segments, in the two tilings, and corresponding tiles on the corresponding sides of corresponding line segments appear in the same order along those segments. [2023, David Smith et al.]

Kombinatorisk ekvivalens



Entydig hierarkisk egenskap

Hovedideen i beviset

Entydig hierarkisk egenskap

En flislegging $\mathcal{T}$ har den *entydige hierarkiske egenskapen* hvis følgende fire betingelser gjelder:

Entydig hierarkisk egenskap

En flislegging $\mathcal{T}$ har den *entydige hierarkiske egenskapen* hvis følgende fire betingelser gjelder:

- 1 Der fins en flislegging $\mathcal{T}'$ med polyfliser fra $\mathcal{T}$, slik at hver flis i $\mathcal{T}'$ består av minst to fliser fra $\mathcal{T}$.

Entydig hierarkisk egenskap

En flislegging $\mathcal{T}$ har den *entydige hierarkiske egenskapen* hvis følgende fire betingelser gjelder:

- 1 Der fins en flislegging $\mathcal{T}'$ med polyfliser fra $\mathcal{T}$, slik at hver flis i $\mathcal{T}'$ består av minst to fliser fra $\mathcal{T}$.
- 2 Flisleggingene $\mathcal{T}'$ og $\mathcal{T}$ er kombinatorisk ekvivalente.

Entydig hierarkisk egenskap

En flislegging $\mathcal{T}$ har den *entydige hierarkiske egenskapen* hvis følgende fire betingelser gjelder:

- 1 Der fins en flislegging $\mathcal{T}'$ med polyfliser fra $\mathcal{T}$, slik at hver flis i $\mathcal{T}'$ består av minst to fliser fra $\mathcal{T}$.
- 2 Flisleggingene $\mathcal{T}'$ og $\mathcal{T}$ er kombinatorisk ekvivalente.
- 3 Der er en surjektiv avbildning $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ slik at $x \subset f(x)$.

Entydig hierarkisk egenskap

En flislegging $\mathcal{T}$ har den *entydige hierarkiske egenskapen* hvis følgende fire betingelser gjelder:

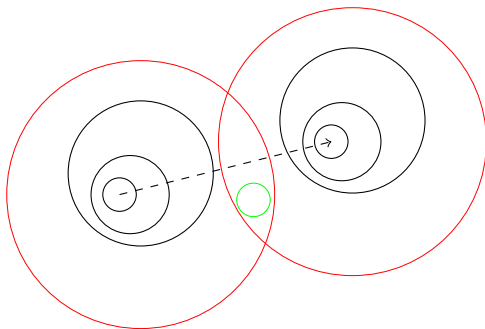
- 1 Der fins en flislegging $\mathcal{T}'$ med polyfliser fra $\mathcal{T}$, slik at hver flis i $\mathcal{T}'$ består av minst to fliser fra $\mathcal{T}$.
- 2 Flisleggingene $\mathcal{T}'$ og $\mathcal{T}$ er kombinatorisk ekvivalente.
- 3 Der er en surjektiv avbildning $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ slik at $x \subset f(x)$.
- 4 For hver $x \in \mathcal{T}$, er der en entydig mengde fliser $U \subset \mathcal{T}$ slik at $x \in U$ og $\bigcup_{u \in U}$ er kongruent med $f(x)$.

Entydig hierarkisk egenskap $\implies$ Aperiodisk flislegging

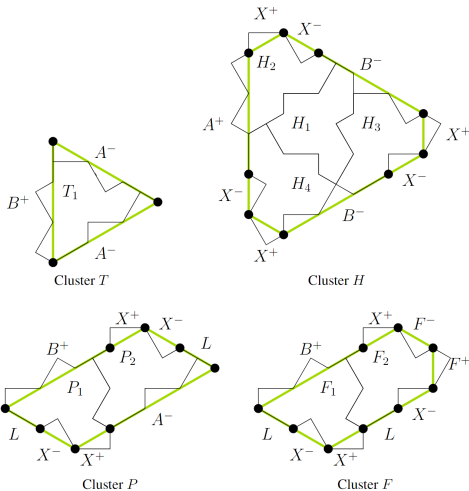
Bevis ved motsigelse.

Entydig hierarkisk egenskap $\implies$ Aperiodisk flislegging

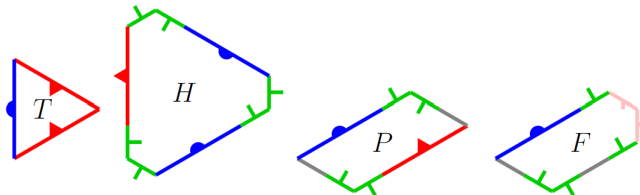
Bevis ved motsigelse.



Polyfliser med *Hatten*

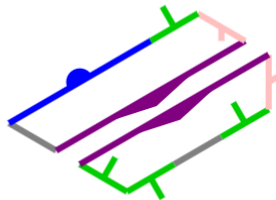
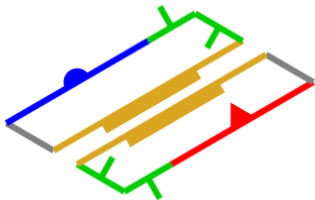


Polyfliser med *Hatten*

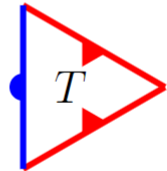
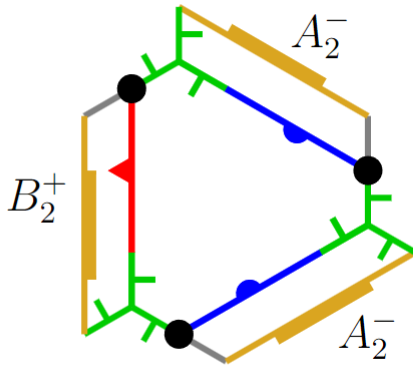


Polyfliser med *Hatten*

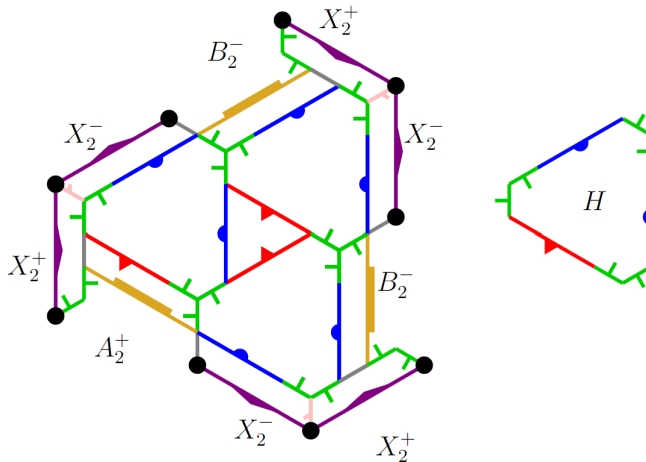
Hjelpebilde: halvering av P og F polyflisene



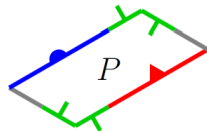
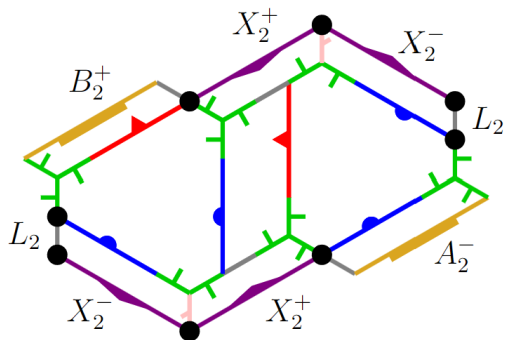
Polyfliser med *Hatten*



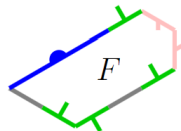
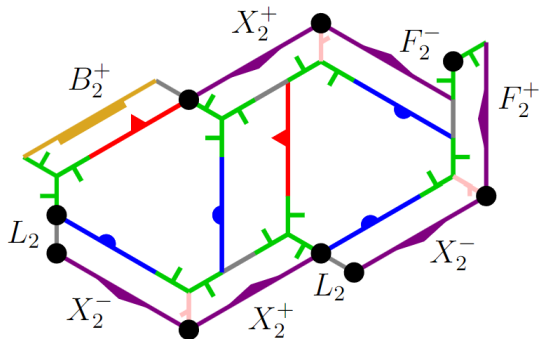
Polyfliser med *Hatten*



Polyfliser med *Hatten*



Polyfliser med *Hatten*



Viktig melding: Datakraft-assistanse

Er de nye polyflisene kombinatorisk ekvivalente med de gamle?

Viktig melding: Datakraft-assistanse

Er de nye polyflisene kombinatorisk ekvivalente med de gamle?

Ja! - Hvert tilfelle er sjekket med datakraft [2023, David Smith et al.]

Viktig melding: Datakraft-assistanse

Er de nye polyflisene kombinatorisk ekvivalente med de gamle?

Ja! - Hvert tilfelle er sjekket med datakraft [2023, David Smith et al.]

Har flisleggingen den hierarki-egenskapen?

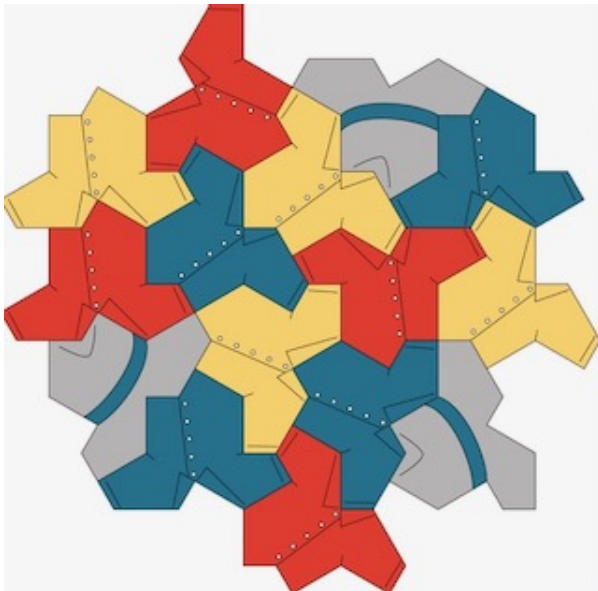
Viktig melding: Datakraft-assistanse

Er de nye polyflisene kombinatorisk ekvivalente med de gamle?

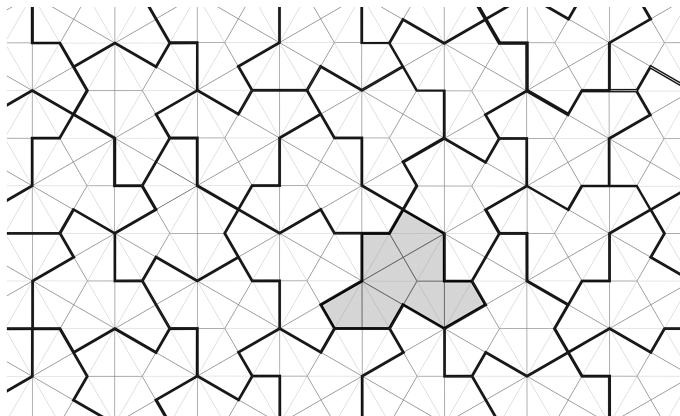
Ja! - Hvert tilfelle er sjekket med datakraft [2023, David Smith et al.]

Har flisleggingen den hierarki-egenskapen?

Ja! - Hvert tilfelle er sjekket med datakraft [2023, David Smith et al.]







Takk til Noah Hessen Bjerke, og for oppmerksomheten.

Doris Schattschneider: Tiling the Plane with Congruent Pentagons, Math. Magazine, Vol 51, NO. 1, 1978

David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan, Chaim Goodman-Strauss: An aperiodic monotile. 2023. arXiv: 2303.10798 [math.CO]

Teruhisa Sugimoto: Convex polygons for aperiodic tiling, Research and Communications in Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 8., Issue 1, 2017, pages 69-79