GEOMETRI I PLANET

KRISTIAN RANESTAD

ABSTRACT. Dette kompendiet er laget for et etterutdanningskurs i geometri, og det gir bakgrunn for og supplerer forelesningene i kurset samtidig som det inneholder relevante oppgaver inkludert dem som deltakerne skal arbeide med i løpet av kurset.

1. Innledning

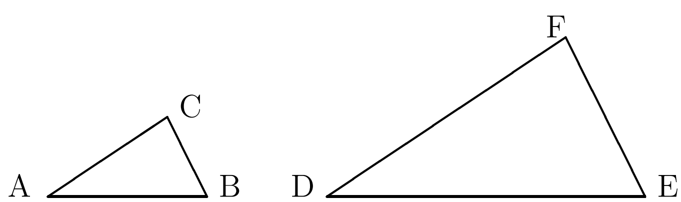
Kurset er delt i fire deler, og kompendiet følger denne oppdelingen. De fire delene er

- Skjæringssetninger
- Bevis i geometri
- Periferivinkler
- Konstruksjon med dynamisk programvare

Formlike trekanter står sentralt blant de grunnleggende begrepene og resultatene i trekantgeometri som kurset bygger på.

1.1. **Formlike trekanter.** *To trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike, dersom vinklene er parvis like, altså $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ og $\angle C = \angle F$ og de tilsvarende sidekantene er proporsjonale, det vil si*

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}.$$



FIGUR 1. Formlike trekanter

Vi skal ofte bruke følgende setning for formlike trekanter.

Date: April 17, 2007.

Setning 1. (Formlikhetsetningen) *To trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike hvis og bare hvis et av følgende fire kriterier er oppfyllt:*

(1) *Trekantene har to parvis like vinkler.*
(2) *Trekantene har en lik vinkel, og de tilhørende sidekantene er proporsjonale, for eksempel er $\angle A = \angle D$ og $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$.*
(3) *Sidekantene er parvis proporsjonale, for eksempel er $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.*
(4) *Forholdet mellom lengdene til sidekantene er det samme i de to trekantene, for eksempel er $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ og $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$.*

Vi skal ikke vise denne setningen her (det ville lede oss rett inn i en diskusjon om aksiomatisk oppbygning av geometri), men ta den for gitt.

2. Skjæringssetninger

Den samlende skjæringssetningen i trekantgeometri er Cevas setning.

2.1. Cevas setning.

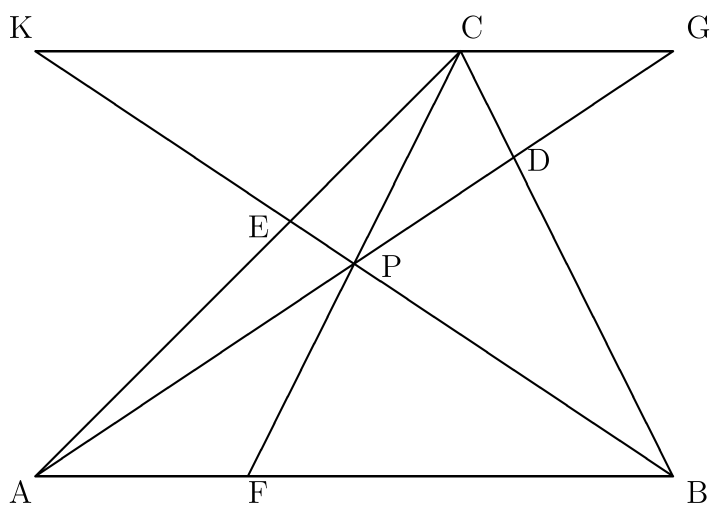
Setning 2. (Ceva) *La D, E, F være punkter på sidekantene henholdsvis BC, AC og AB i trekanten $\triangle ABC$. Da går linjene AD, BE og CF gjennom samme punkt hvis og bare hvis produktrelasjonen*

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

holder.

Bevis. Legg merke til "hvis og bare hvis" i setningen. Vi må altså vise begge retninger, både at linjene går gjennom samme punkt hvis produktrelasjonen holder, og at produktrelasjonen holder hvis linjene går gjennom samme punkt.

Vi begynner med å vise det siste. Trekk ei linje gjennom C parallell med AB, og forleng AD og BE til skjæring i henholdsvis G og K med denne linja.



Figur 2. Cevas setning

Da er følgende par av trekanter formlike, ved toppvinkler og samsvarende vinkler ved parallelle linjer.

$$\triangle ABD \sim \triangle CDG$$
$$\triangle ABE \sim \triangle CKE$$
$$\triangle AFP \sim \triangle GCP$$
$$\triangle FBP \sim \triangle CKP$$

De har altså parvis like vinkler og forholdet mellom de tilsvarende sidekantene er parvis proporsjonale:

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{CG}, \quad \frac{CE}{EA}=\frac{CK}{AB}$$
$$\frac{AF}{CG}=\frac{FP}{CP}, \quad \frac{CK}{FB}=\frac{CP}{FP}$$

Mulipliserer vi de to venstresidene i de to siste ligningene med hverandre, og tilsvarende med høyre sidene får vi

$$\frac{AF}{CG}\cdot\frac{CK}{FB}=1 \quad \text{så} \quad \frac{AF}{FB}=\frac{CG}{CK}$$

Multipliserer vi venstresiden i den siste ligningen, med venstresidene i de to første ligningene over, og tilsvarende med høyresidene får vi:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{CG}{CK}\cdot\frac{AB}{CG}\cdot\frac{CK}{AB}$$

Men på høyre side er faktorene i teller de samme som faktorene i nevner, så vi kan forkorte og får

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

Dermed er "bare hvis" delen av setningen vist.

For å vise "hvis" delen av setningen antar vi at produktrelasjonen holder for punktene D, E, F (uten å anta at de tre linjene har et felles punkt). Altså at

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

Anta så videre at AD og BE møtes i punktet P, og at forlengelsen av linja CP treffer AB i H. Av første del vet vi at produktrelasjonen holder for punktene D, E, H, så

$$\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

Setter vi de to venstre sidene i produktrelasjonene lik hverandre kan vi forkorte og få

$$\frac{AF}{FB}=\frac{AH}{HB}$$

Nå legger vi til 1, skrevet på en spesiell måte, på begge sider og får

$$\frac{AF}{FB} + \frac{FB}{FB} = \frac{AH}{HB} + \frac{HB}{HB},$$

$$\frac{AF + FB}{FB} = \frac{AH + HB}{HB}$$

og

$$\frac{AB}{FB} = \frac{AB}{HB}.$$

Derfor er $FB = HB$, så F og H er samme punkt. Dermed er også "hvis" delen av setningen vist. □

Denne setningen gjelder litt mer generelt. Punktene D, E, F kan ligge på forlengelsen av linjene i trekanten utenfor trekanten. Fortsatt gjelder setningen

Setning 3. (Ceva) *La D, E, F være punkter på sidekantene henholdsvis BC, AC og AB i trekanten $\triangle ABC$ eller på forlengelsen av disse utenfor trekanten. Dersom linjene AD, BE, CF er konkurrente, d.v.s. møtes i et felles punkt, så er*

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Omvendt, dersom denne relasjonen holder, og en eller tre av punktene D, E, F ligger inne i trekanten, da er linjene AD, BE og CF konkurrente eller parallelle.

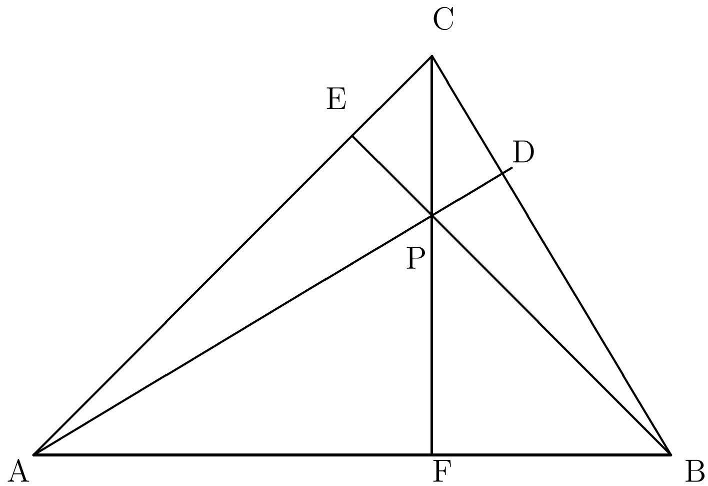
Bevis. Beviset er helt analogt med beviset over og overlates til leseren. □

Nå skal vi bruke Cevas setning til å vise to klassiske resultater.

2.2. **Bruk av Cevas setning.** Med Cevas setning kan vi vise de klassiske skjæringssetningene om at medianene i en trekant møtes i et felles punkt, at høydene i en trekant møtes i et felles punkt og at halveringslinjene i en trekant møtes i et felles punkt. Beviset for at medianene møtes i et punkt er enklest og overlates som oppgave til leseren. At høydene møtes i et punkt er litt mer komplisert, så vi gjengir et bevis her.

Setning 4. *Høydene i en trekant, det vil si normalene fra hvert hjørne på motstående side, møtes i et felles punkt.*

Bevis. La D, E, F være fotpunktene til de tre høydene, det vil si at AD står normalt på BC, BE står normalt på AC og CF står normalt



Figur 3. Høydene i en trekant

på AB. Vi vil nå undersøke produktet på venstre side i Cevas setning og vise ved regning at det blir lik 1. I så fall følger setningen av Cevas setning.

Hver av de tre normalene deler trekanten opp i to rettvinklete trekanter; for eksempel deler normalen CF trekanten $\triangle ABC$ opp i de rettvinklete trekantene $\triangle AFC$ og $\triangle BFC$. Siden $\triangle AFC$ og $\triangle ABE$ begge er rettvinklede og har vinkelen A felles, så er trekantene formlike. Derfor er

$$\frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AB}.$$

Tilsvarende er $\triangle BFC$ og $\triangle BDA$ formlike og $\triangle CEB$ og $\triangle CAD$ formlike. Derfor er

$$\frac{BD}{BF} = \frac{AB}{BC}$$

og

$$\frac{CE}{CD} = \frac{BC}{AC}.$$

Produktet av venstresidene er lik produktet av høyresidene, så

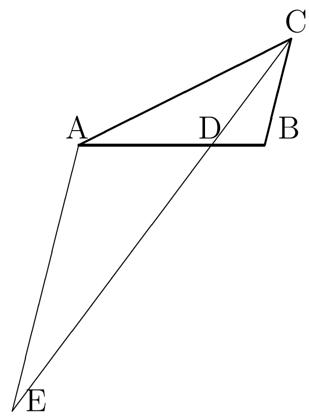
$$\frac{AF}{AE} \cdot \frac{BD}{BF} \cdot \frac{CE}{CD} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC}.$$

Men på høyre side kan vi forkorte så produktet er lik 1. Samtidig vil ombytting av noen faktorer i teller og nevner på venstre side gi venstre siden i Cevas setning. Så

$$\frac{AF}{AE} \cdot \frac{BD}{BF} \cdot \frac{CE}{CD} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

Av Cevas setning har derfor høydene et felles punkt. $\square$

Vi kan og bruke Cevas setning til å vise at halveringslinjene for de tre vinklene i en trekant har et felles punkt. Men da trenger vi **halveringslinjesetningen**.



FIGUR 4. Halveringslinje

Setning 5. (Halveringslinjesetningen) *I en trekant $\triangle ABC$ vil ei linje gjennom hjørnet C dele linjestykket AB innvendig i forholdet $\frac{AC}{CB}$ hvis og bare hvis linja halverer vinkelen i C.*

Bevis. La D være skjæringspunktet mellom linja gjennom C og linja gjennom AB. Trekk linja gjennom A parallelt med BC. Denne skjærer linja gjennom CD i E. Da er trekantene $\triangle ADE$ og $\triangle BDC$ formlike, så

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{BC}.$$

Derfor er

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$$

hvis og bare hvis $AE = AC$. Men $AE = AC$ hvis og bare hvis $\angle E = \angle ACE$, og siden $\angle DCB = \angle E$, er $\angle E = \angle ACE$ hvis og bare hvis $\angle DCB = \angle ACE$, altså at linja CD halverer vinkel C, så setningen følger. $\square$

Vi overlater nå som oppgave til leseren å bruke denne setningen sammen med Cevas setning til å vise at halveringslinjene møtes i et punkt.

2.3. **Oppgaver.**

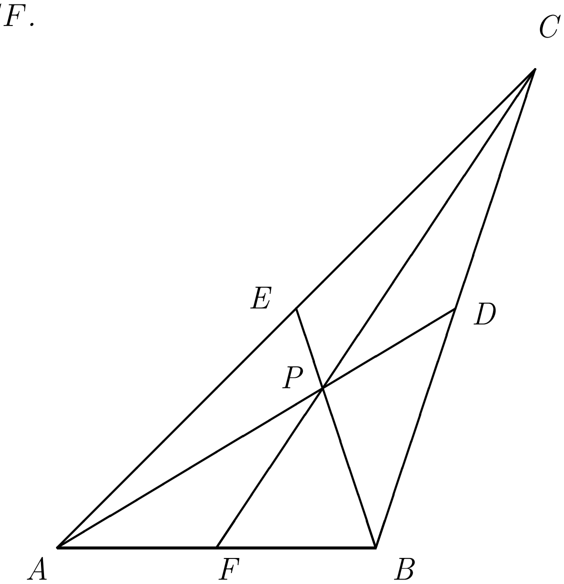
(1) Bruk Cevas setning til å vise at medianene i en trekant har et felles punkt.
(2) Bruk Cevas setning og halveringslinjesetningen til å vise at halveringslinjene i en trekant har et felles punkt.
(3) Den innskrevne sirkelen i en trekant berører hver av de tre sidene i et punkt. Bruk Cevas setning til å vise at linjene fra hvert hjørne i trekanten til berøringspunktet på den motsatte siden har et felles punkt. (Dette punktet kalles Gergonne-punktet)

3. Bevis i geometri

I forrige økt så vi hvordan formlikhet kan brukes til å vise Cevas setning. Denne setningen gir et algebraisk kriterium på når tre linjer gjennom hjørnene i en trekant møtes i et felles punkt. Vi skal her bruke to andre metoder til å vise noen av de samme resultatene.

3.1. **Vektorer.** Vektorer kan brukes til å vise rene geometriske resultater. Reglene for vektorregning brukes da til å overføre rent geometriske fenomener til algebra. Vi skal illustrere dette i et eksempel. Som vanlig betyr $\vec{PQ}$ vektoren fra P til Q.

Eksempel 1. *Vektorer kan brukes til å vise at medianene i en trekant har et felles punkt: La D, E, F være midtpunktene på sidene i trekanten $\triangle ABC$. Da er $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$, $\vec{CF} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AC}$ og $\vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AB}$. La P være skjæringspunktet mellom medianene BE og CF.*



Figur 5. Medianene i en trekant

Vi vil finne et utrykk for vektoren $\vec{AP}$, og vise at denne er proporsjonal med $\vec{AD}$ slik at P ligger på AD. Siden P ligger på BE kan vi skrive:

$$\vec{AP} = \vec{AB} + x(\frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AB})$$

for et tall x mellom 0 og 1. Tilsvarende ligger P også på CF så:

$$\vec{AP} = \vec{AC} + y(\frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AC})$$

for et tall y mellom 0 og 1. Derfor er

$$\vec{AP} = (1-x)\vec{AB} + \frac{x}{2}\vec{AC} = \frac{y}{2}\vec{AB} + (1-y)\vec{AC},$$

så

$$1 - x = \frac{y}{2}, \quad \frac{x}{2} = 1 - y$$

som har løsningen $x = y = \frac{2}{3}$. Så

$$\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{AD}.$$

Derfor ligger P også på AD, som var det vi skulle vise.

Argumentasjon med vektorer og vektorregning reduserer geometri til algebra. Rene geometriske argumenter, for eksempel bruk av geometriske steder, kan imidlertid også føre fram.

3.2. **Geometriske steder.** Mengden av punkter som oppfyller en bestemt geometrisk betingelse kalles *det geometriske stedet for punkter som oppfyller denne betingelsen.*

Eksempel 2.

(1) *Det geometriske stedet for punkter som har en gitt fast avstand fra et gitt fast punkt O, er en sirkel med sentrum i O og radius den gitte avstanden.*
(2) *Det geometriske stedet for punkter som har samme avstand fra to gitte punkter A og B, er midtnormalen på linjestykket AB.*
(3) *Det geometriske stedet for punkter som har samme avstand til to gitte faste linjer er halveringslinjene til vinklene mellom de to gitte linjene.*

Vi kan bruke det siste ekempelet til å vise

Setning 6. *Halveringslinjene i en trekant møtes i et punkt.*

Bevis. Halveringslinja til en vinkel er mengden av punkter som har samme avstand til de to vinkelbeina. Det betyr at skjæringspunktet mellom to halveringslinjer har samme avstand til alle tre linjene, derfor ligger det også på den tredje halveringslinja. □

3.3. **Oppgaver.**

(1) Vis at i en trekant er to sidekanter like lange hvis og bare hvis vinklene ved den tredje siden er like store.

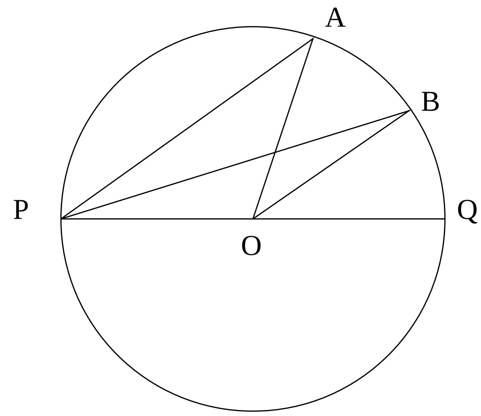
(2) Vis Pythagoras setning for en rettvinklet trekant $\triangle ABC$ med rett vinkel i B og sidelengder a, b, c med følgende steg:

  (a) La $\triangle BDC$ være en rettvinklet trekant med D på forlengelsen av AB, slik at $\angle BCD = \angle CAB$. Vis at trekantene $\triangle BAC$, $\triangle BDC$ og $\triangle CAD$ er formlike.

  (b) Vis at BD har lengde $\frac{a^2}{c}$ og at CD har lengde $\frac{ab}{c}$

  (c) Vis at Pythagoras setning nå følger av at $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$.

(3) La l og m være to linjer som skjærer hverandre i P. Vis at det geometriske stedet for punkter som ligger dobbelt så langt fra l som fra m er to linjer gennom P. I en trekant $\triangle ABC$, vis at der er ett og bare ett punkt inne i trekanten som ligger like langt fra linjene AC og BC, men dobbelt så langt fra linja AB som fra linjene AC og BC.



FIGUR 6. Setning om periferivinkler

4. Periferivinkler

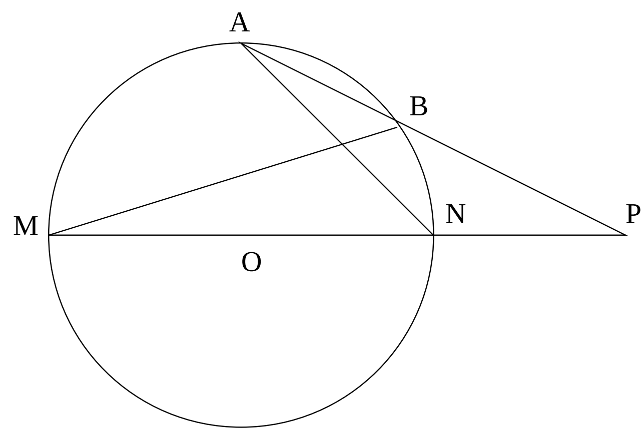
Vi skal vise setningene i sirkelgeometrien om periferivinkler og punkts potens.

I en sirkel kalles en vinkel med toppunkt i sentrum av sirkelen for en **sentralvinkel**. Dersom sentrum er O og vinkelbeina spenner over buen mellom A og B på sirkelperiferien, sier vi at sentralvinkelen spenner over buen AB. En vinkel som har toppunkt i periferien og vinkelbein som skjærer periferien i to andre punkter kalles en **periferivinkel** til sirkelen. Som grensetilfelle inkluderer vi tilfellet der det ene vinkelbeinet tangerer sirkelen i toppunktet. Dersom toppunktet er P og vinkelbeina spenner over buen fra A til B på sirkelperiferien, sier vi at vinkelen spenner over buen AB.

Setning 7. (Setning om periferivinkler.) *I en sirkel er en sentralvinkel dobbelt så stor som en periferivinkel som spenner over samme bue. Spesielt er periferivinkler som spenner over samme bue like store.*

Bevis. På figur 4 er $\angle AOB$ en sentralvinkel og $\angle APB$ en periferivinkel som spenner over samme bue AB i en sirkel med sentrum i O. Linja gjennom PO er forlenget til skjæringspunktet Q med perifierien.

Vinkelen $\angle AOQ$ er nabovinkel til $\angle AOP$ i $\triangle AOP$, og vinkelen $\angle BOQ$ er nabovinkel til $\angle BOP$ i $\triangle BOP$.



Figur 7. Punkts potens

Trekantene $\triangle AOP$ og $\triangle BOP$ er begge likebeinte trekante, så $\angle AOQ = 2\angle APO$ og $\angle BOQ = 2\angle BPO$. Derfor er

$$\angle AOB = \angle AOQ - \angle BOQ = 2\angle APO - 2\angle BPO = 2\angle APB$$

og setningen følger. $\square$

Setning 8. *Det geometriske stedet for topp-punktet til en vinkel v med vinkelbein gjennom to fast punkter A og B, er to sirkelbuer mellom A og B.*

Bevis. På en sirkel gjennom A og B slik at sentralvinkelen som spenner over AB er $2v$, er periferivinklene som spenner over AB lik v. Det finnes to slike sirkler, symmetrisk om linjestykket AB. Fra et punkt P som ligger utenfor disse sirklene, trekker vi linjene til A og B. Disse, eller forlengelsen av disse, vil skjære en av sirklene fra første del. En enkel sammenligning med skjæringspunktet viser at vinkelen $\angle APB$ ikke kan være lik v. $\square$

Setning 9. (Punkts potens.) *La P være et punkt og la Σ være en sirkel i planet. La l være ei linje gjennom P som skjærer Σ i punktene A og B. Da er produktet $PA \cdot PB$ uavhengig av posisjonen til linja l.*

Bevis. Tegn figur og trekk linja gjennom P og sentrum O i Σ til skjæringspunkter M og N med sirkelen. Trekk linjene NA og MB. I trekantene $\triangle MPB$ og $\triangle APN$ er vinkelen i P felles. Videre spenner periferivinklene $\angle NMB$ og $\angle NAB$ over samme bue, så av setningen om periferivinkler er de like. Derfor er $\triangle MPB$ og $\triangle APN$ formlike. Men da er

$$\frac{PM}{PB} = \frac{PA}{PN},$$

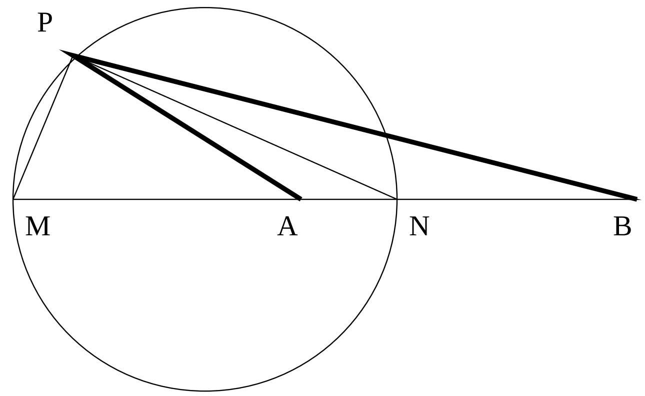
så

$$PA \cdot PB = PM \cdot PN$$

er uavhengig av linja l. $\square$

4.1. **Oppgaver.**

(1) Bevis at en firkant har en omskrevet sirkel hvis og bare hvis motstående vinkler er supplementære (dvs har sum lik 180°).
(2) Fire sirkler med forskjellig radius ligger i ring og berører hverandre utvendig. Vis at de fire berøringspunktene ligger på en sirkel.



FIGUR 8. Appolonios' sirkel

5. Konstruksjon med dynamisk programvare

Her skal vi konsentrere oss om geometriske steder og konstruksjon og bruk av disse med dynamisk programvare. I tillegg til dem vi har sett tidligere får vi bruk for noen

5.1. Flere geometriske steder.

(1) *Det geometriske stedet for toppunktet for en rett vinkel med vinkelbein gjennom to faste punkter er sirkelen med linjestykket mellom punktene som diameter.*

(2) *Det geometriske stedet for punkter P hvis avstander PA og PB til to faste punkter A og B har et konstant forhold*

$$k = \frac{PA}{PB} \geq 0$$

er en sirkel med sentrum på linja gjennom AB. Denne sirkelen kalles **Apollonios sirkel**.

Det geometriske stedet ligger symmetrisk om linja gjennom AB og har to punkt M og N på denne linja. Et punkt, M, deler linjestykket AB utvendig mens det andre punktet, N, deler AB innvendig. Fra et punkt P på dette geometriske stedet utenfor linja, trekker vi linjene PB, PM, PA, PN. I trekanten $\triangle ABP$ er nå

$$\frac{PA}{PB} = \frac{NA}{NB}$$

så av setningen om halveringslinja til en vinkel i en trekant følger det at PN halverer vinkelen i P. Helt tilsvarende følger det at PM halverer den utvendige vinkelen i P (den utvendige vinkelen i P er vinkelen mellom PA og forlengelsen av PB og kalles også nabovinkelen til $\angle APB$). Siden summen av den innvendige og den utvendige vinkelen i P er π, må de halve vinklene $\angle APM$ og $\angle APN$ til sammen være $\frac{\pi}{2}$. Dermed er $\angle MPN$ en rett vinkel og P ligger på periferien til sirkelen som har MN som diameter. Denne sirkelen danner derfor det søkte geometriske stedet.

5.2. **Oppgaver.**

(1) Konstruer den omskrevne sirkelen til en trekant.
(2) Konstruer den innskrevne sirkelen til en trekant.
(3) Konstruer ei linje som tangerer en gitt sirkel og passerer gjennom et gitt punkt utenfor sirkelen.
(4) Konstruer ei linje som tangerer to gitte sirkler som ligger utenfor hverandre.

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo P.O.Box 1053, Blindern, 0316 Oslo
E-mail address: `ranestad@math.uio.no`