

EKSAMEN I MA 001, HØSTEN 2000

OPPGAVE 1

(a) Finn de ubestemte integralene

$$\int (3 + 4 \sin 2x) dx \quad \text{og} \quad \int x^2 \cos x dx .$$

(b) La $D = 1 + i\sqrt{3}$ der $i^2 = -1$. Finn kvadratroten $\sqrt{D}$ og skriv svaret på formen $a + ib$.

OPPGAVE 2

La funksjonen ℓ være gitt ved formelen $\ell(y) = y + \ln y$.

(a) For hvilke reelle y er $\ell(y)$ definert? Finn $\lim_{y \rightarrow 0^+} \ell(y)$ og $\lim_{y \rightarrow \infty} \ell(y)$. Hva er verdimengden til ℓ ?

(b) Beregn $\ell'(y)$. Avgjør om ℓ er strengt voksende eller ikke. Beregn $\ell''(y)$. Avgjør om grafen til ℓ krummer oppover eller nedover.

La $y = e(x)$ være den omvendte funksjonen til $x = \ell(y)$, dvs. $y = e(x)$ hvis og bare hvis $x = \ell(y)$.

(c) Hva er definisjonsmengden og verdimengden til e ? Finn $\lim_{x \rightarrow -\infty} e(x)$ og $\lim_{x \rightarrow \infty} e(x)$.

Følgende tabell gir noen funksjonsverdier for ℓ med to desimalers nøyaktighet:

y	0.10	0.40	0.70	1.00	1.30
$\ell(y)$	-2.20	-0.52	0.34	1.00	1.56

(d) La $L(y) = ay + b$ være den lineære funksjonen bestemt av $L(0.40) = \ell(0.40) \approx -0.52$ og $L(0.70) = \ell(0.70) \approx 0.34$. Finn y_1 slik at $L(y_1) = -0.20$, med to desimalers nøyaktighet.

(e) Ligger grafen til L over eller under grafen til ℓ når $0.40 < y < 0.70$? Er den nøyaktige løsningen y_2 til likningen $\ell(y_2) = -0.20$ større eller mindre enn løsningen y_1 til likningen $L(y_1) = -0.20$? Begrunn begge svar.

(f) La K være en positiv konstant. Vis at

$$y + K \ln y = K \cdot \ell\left(\frac{y}{K}\right) + K \ln K$$

ved å regne ut $K \cdot \ell(y/K)$.

OPPGAVE 3

Ved en enzymreaksjon omdannes et stoff A til et stoff B. Grunnet en inhibitor (gift) erstattes ikke det som forbrukes av stoff A. La $y = y(t)$ være konsentrasjonen av stoffet A ved tiden t . Vi antar at $y(t) > 0$ for alle t . Reaksjonshastigheten antas gitt ved Michaelis–Mentens likning, som gir differensiallikningen

$$(*) \quad \frac{dy}{dt} = -V \cdot \frac{y}{y + K}$$

der V og K er positive konstanter. Dette er en separabel differensiallikning $dy/dt = f(t)g(y)$ der $f(t) = -V$ og $g(y) = y/(y + K)$.

(a) Vis at løsningene $y = y(t)$ til differensiallikningen $(*)$ tilfredsstiller likningen

$$y + K \ln y = -Vt + C$$

der C er en vilkårlig konstant.

(b) Bruk resultatet i oppgave 2(f) til å vise at løsningene til differensiallikningen $(*)$ kan skrives

$$y(t) = K \cdot e\left(-\frac{V}{K}t + D\right)$$

der e er funksjonen fra oppgave 1 og D er en vilkårlig konstant.

(c) Vis at

$$D = \frac{y_0}{K} + \ln \frac{y_0}{K}$$

der $y_0 = y(0)$.

(d) Finn grensen for konsentrasjonen av stoff A når $t \rightarrow \infty$, dvs. $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.

(e) Anta at $V = 2.40$, $K = 2.00$ og $y_0 = 2.00$. Det antas kjent at løsningen y_1 fra oppgave 2(d) tilnærmer løsningen $y_2 = e(-0.20)$ fra oppgave 2(e) med én desimal nøyaktighet. Bruk dette og resultatet i oppgave 2(d) til å finne $y(1.00)$ med én desimal nøyaktighet.

OPPGAVE 4

(a) Skravér området M i xy -planet som er gitt ved ulikhetene

$$x - 2y \geq 1, \quad x + 3y \geq -4, \quad 2x + y \leq 8, \quad 3x - y \leq 8.$$

Bruk samme lengdeenhet på begge aksene.

(b) Tegn, i samme figur, en av nivålinjene til funksjonen $f(x, y) = x + y$, og finn største og minste verdi for $f(x, y)$ når (x, y) varierer i M .

OPPGAVE 5

(a) Finn egenverdiene til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Finn den generelle løsningen $(x(t), y(t))$ til differensiallikningssystemet:

$$\begin{aligned} (**) \quad & \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ & \frac{dy}{dt} = x \end{aligned}$$

(c) Finn den spesielle løsningen til differensiallikningssystemet $(**)$ med initialbetingelsen $x(0) = 1$ og $y(0) = 2$. Finn også den andre spesielle løsningen som oppfyller $x(0) = 1$ og $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.