

**LØSNINGSFORSLAG FOR
EKSAMEN MA 001 HØSTEN 1999**

OPPGAVE 1

(a) Regner ut

$$\begin{aligned} z &= \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i . \end{aligned}$$

(b) Substituerer $u = t^2$, $du/dt = 2t$ så $dt = 1/2t du$:

$$\begin{aligned} \int t \cos t^2 dt &= \int t \cos u \cdot \frac{1}{2t} du \\ &= \frac{1}{2} \int \cos u du \\ &= \frac{1}{2} \sin u + C = \frac{1}{2} \sin t^2 + C . \end{aligned}$$

Substituerer $u = 1 + \sin x$, $du/dx = \cos x$ så $dx = 1/\cos x du$:

$$\begin{aligned} \int \cos x \sqrt{1 + \sin x} dx &= \int \cos x \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{1}{\cos x} du \\ &= \int u^{1/2} du = \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3} (1 + \sin x)^{3/2} + C . \end{aligned}$$

(c) Dette er en separabel differensiallikning $(dy/dt) = f(t)g(y)$ med $f(t) = t$, $g(y) = e^{-y}$. Separerer de variable, integrerer, og løser med hensyn på y :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= e^{-y}t \\ e^y \frac{dy}{dt} &= t \\ \int e^y \frac{dy}{dt} dt &= \int t dt \\ \int e^y dy &= \int t dt \\ e^y &= \frac{1}{2}t^2 + C \\ y &= \ln\left(\frac{1}{2}t^2 + C\right)\end{aligned}$$

der C er en konstant. Gitt $y(0) = 0$ må

$$0 = y(0) = \ln\left(\frac{1}{2} \cdot 0^2 + C\right) = \ln C$$

så $C = e^0 = 1$ og

$$y(t) = \ln\left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right).$$

OPPGAVE 2

Veksthastigheten $y' = dy/dt$ er lik proporsjonalitetskonstanten $a = 2.31 \cdot 10^{-2} \text{ minutt}^{-1}$ ganger antallet bakterier y , så $y = y(t)$ oppfyller differensiallikningen

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y.$$

Det er kjent at løsningene til denne likningen har formen $y(t) = ce^{at}$ der $c = y(0)$. For at antallet bakterier skal fordobles fra tiden t til tiden $t + T$ må:

$$y(t + T) = 2y(t)$$

$$ce^{a(t+T)} = 2ce^{at}$$

$$ce^{at}e^{aT} = 2ce^{at}$$

$$e^{aT} = 2$$

$$aT = \ln 2$$

$$T = \ln 2/a$$

så dette skjer i løpet av $T = \ln 2/a = \ln 2/(2.31 \cdot 10^{-2}) = 30.0$ minutter. (Har tre gjeldende siffer siden a er gitt med denne nøyaktigheten.)

OPPGAVE 3

(a) Koeffisientmatrisen til differensiallikningssystemet er

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dens egenverdier er røttene i polynomet

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & -4 \\ 1 & -2 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (3 - \lambda)(-2 - \lambda) - (-4)(1) \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2 \end{aligned}$$

som er

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \\ &= \frac{1 \pm 3}{2} = -1 \text{ eller } 2. \end{aligned}$$

Egenvektorene $\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$ for $\lambda_1 = -1$ er løsningene i likningssystemet

$$\begin{aligned}(3 - (-1))A_1 + (-4)B_1 &= 0 \\ 1A_1 + (-2 - (-1))B_1 &= 0\end{aligned}$$

som forenkler til $A_1 - B_1 = 0$, dvs $A_1 = B_1$. Egenvektorene $\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$ for $\lambda_2 = 2$ er løsningene i likningssystemet

$$\begin{aligned}(3 - 2)A_2 + (-4)B_2 &= 0 \\ 1A_2 + (-2 - 2)B_2 &= 0\end{aligned}$$

som forenkler til $A_2 - 4B_2 = 0$, dvs $A_2 = 4B_2$. Den generelle løsningen til (*) er derfor

$$\begin{aligned}x &= x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = B_1 e^{-t} + 4B_2 e^{2t} \\ y &= y(t) = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} = B_1 e^{-t} + B_2 e^{2t}\end{aligned}$$

der B_1, B_2 er vilkårlige konstanter.

(b) De konstante løsningene (x, y) til det inhomogene likningssystemet (**) oppfyller

$$\begin{aligned}0 &= 3x - 4y + 5 \\ 0 &= x - 2y + 3\end{aligned}$$

som vi stiller opp slik:

$$\begin{aligned}x - 2y &= -3 \\ 3x - 4y &= -5\end{aligned}$$

og løser ved Gauss-eliminasjon:

$$\begin{aligned}x - 2y &= -3 \\ 2y &= 4\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}x &= 1 \\ 2y &= 4\end{aligned}$$

som gir $x = 1$, $y = 2$. Den generelle løsningen til $(**)$ er summen av denne konstante løsningen og den generelle løsningen til det tilsvarende homogene systemet $(*)$, dvs.:

$$\begin{aligned}x(t) &= 1 + B_1 e^{-t} + 4B_2 e^{2t} \\ y(t) &= 2 + B_1 e^{-t} + B_2 e^{2t}\end{aligned}$$

Gitt at $x(0) = 3$, $y(0) = 4$ må B_1, B_2 oppfylle

$$\begin{aligned}3 &= 1 + B_1 e^0 + 4B_2 e^0 \\ 4 &= 2 + B_1 e^0 + B_2 e^0\end{aligned}$$

som gir

$$\begin{aligned}B_1 + 4B_2 &= 2 \\ B_1 + B_2 &= 2\end{aligned}$$

med løsningen $B_1 = 2$, $B_2 = 0$. (Utregningen er utelatt.) Altså er

$$\begin{aligned}x(t) &= 1 + 2e^{-t} \\ y(t) &= 2 + 2e^{-t}.\end{aligned}$$

Når $t \rightarrow \infty$ vil $x(t) = 1 + 2e^{-t} \rightarrow 1 + 2 \cdot 0 = 1$, og $y(t) = 2 + 2e^{-t} \rightarrow 2 + 2 \cdot 0 = 2$, siden $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0$. (Kan alternativt skrive $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1 + 2 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 1 + 2 \cdot 0 = 1$, etc.) Altså nærmer denne løsningen seg tilstanden $x = 1$, $y = 2$ når $t \rightarrow \infty$. Dette er lik den konstante løsningen til likningssystemet, som er en likevektsstilstand for $(**)$.

OPPGAVE 4

(a) Vannvolumet i bassenget øker med raten $V'(t) = \frac{dV}{dt}$, som er lik differansen mellom innstrømningsraten v og utstrømningsraten. Den siste er lik proporsjonalitetskonstanten a ganger vannvolumet, dvs. aV . Differansen er derfor lik $v - aV$, og $V(t)$ må oppfylle differensiallikningen

$$\frac{dV}{dt} = v - aV.$$

Det er kjent at denne likningen har generell løsning

$$V(t) = ce^{-at} - \frac{v}{(-a)} = ce^{-at} + \frac{v}{a}$$

der c er en vilkårlig konstant. Her er $v/a = 2.4 \text{ m}^3 \text{ minutt}^{-1} / (3.0 \cdot 10^{-3} \text{ minutt}^{-1}) = 800 \text{ m}^3$. Vi er interessert i den spesielle løsningen med $V(0) = 0$ (siden bassenget er tomt ved tiden $t = 0$), som gir $0 = ce^0 + (v/a)$, dvs. $c = -v/a$. Altså er

$$\begin{aligned} V(t) &= (v/a) - (v/a)e^{-at} \\ &= 800 - 800e^{-3 \cdot 10^{-3}t}. \end{aligned}$$

(b) Bassenget er halvfullt ved tiden t når $V(t) = (1/2) \cdot 10^3 \text{ m}^3 = 500 \text{ m}^3$. Dette gir

$$\begin{aligned} 500 &= 800 - 800e^{-3 \cdot 10^{-3}t} \\ 800e^{-3 \cdot 10^{-3}t} &= 800 - 500 = 300 \\ e^{-3 \cdot 10^{-3}t} &= 300/800 = 3/8 \\ -3 \cdot 10^{-3}t &= \ln 3/8 \approx -0.981 \\ t &\approx 0.981/(3 \cdot 10^{-3}) \approx 327 \end{aligned}$$

så bassenget er halvfullt etter 327 minutter, dvs. etter 5 timer og 27 minutter ($327 = 5 \cdot 60 + 27$). Når $t \rightarrow \infty$ vil $V(t) \rightarrow 800 - 800 \cdot 0 = 800$ siden $e^{-3 \cdot 10^{-3}t} \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$. Altså vil vannvolumet nærme seg 800 m^3 ettersom tiden går mot uendelig.

OPPGAVE 5

(a) Lar x_n være antall på arbeid den n te arbeidsdagen, og lar y_n være antall syke samme dag. Neste arbeidsdag er disse tallene henholdsvis x_{n+1} og y_{n+1} . Av de x_{n+1} friske på dag $n+1$ var $90\% \cdot x_n = 0.9x_n$ friske dagen før, og $50\% \cdot y_n = 0.5y_n$ var syke dagen før. Så $x_{n+1} = 0.9x_n + 0.5y_n$. Av de y_{n+1} syke på dag $n+1$ var $10\% \cdot x_n = 0.1x_n$ friske dagen før, og $50\% \cdot y_n = 0.5y_n$ var syke dagen før. Så $y_{n+1} = 0.1x_n + 0.5y_n$. Altså er

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9x_n + 0.5y_n \\ 0.1x_n + 0.5y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

som skulle vises. Gitt $x_0 = 21000$, $y_0 = 3000$ får vi for $n = 0$ at

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 21000 \\ 3000 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.9 \cdot 21000 + 0.5 \cdot 3000 \\ 0.1 \cdot 21000 + 0.5 \cdot 3000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20400 \\ 3600 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(Alternativt kunne vi ha brukt formlene direkte $x_1 = 0.9x_0 + 0.5y_0 = 0.9 \cdot 21000 + 0.5 \cdot 3000 = 20400$ og $y_1 = 0.1x_0 + 0.5y_0 = 0.1 \cdot 21000 + 0.5 \cdot 3000 = 3600$.)

(b) Vi har at

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} 21000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

for alle $n \geq 0$. Vi vil skrive $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ som en sum av egenvektorer for M . Egenverdiene til koeffisientmatrisen

$$M = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

er røttene i polynomet

$$\begin{aligned}\det(M - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 0.9 - \lambda & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (0.9 - \lambda)(0.5 - \lambda) - 0.5 \cdot 0.1 \\ &= \lambda^2 - 1.4\lambda + 0.4\end{aligned}$$

som er

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1.4 \pm \sqrt{1.4^2 - 4 \cdot 0.4}}{2} = \frac{1.4 \pm \sqrt{0.36}}{2} \\ &= \frac{1.4 \pm 0.6}{2} = 0.4 \text{ eller } 1.0.\end{aligned}$$

Egenvektorene $\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$ for $\lambda_1 = 0.4$ er løsningene til likningssystemet

$$\begin{aligned}(0.9 - 0.4)A_1 + 0.5B_1 &= 0 \\ 0.1A_1 + (0.5 - 0.4)B_1 &= 0\end{aligned}$$

som forenkler til $A_1 + B_1 = 0$ eller $A_1 = -B_1$. Egenvektorene $\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$ for $\lambda_2 = 1.0$ er løsningene til likningssystemet

$$\begin{aligned}(0.9 - 1.0)A_2 + 0.5B_2 &= 0 \\ 0.1A_2 + (0.5 - 1.0)B_2 &= 0\end{aligned}$$

som forenkler til $-0.1A_2 + 0.5B_2 = 0$ eller $A_2 = 5B_2$. Dersom $\begin{bmatrix} 21000 \\ 3000 \end{bmatrix}$ er en sum av egenvektorer for M må

$$\begin{bmatrix} -B_1 \\ B_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5B_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

som gir

$$\begin{aligned} -B_1 + 5B_2 &= 21000 \\ B_1 + B_2 &= 3000. \end{aligned}$$

Løser ved Gauss-eliminasjon, og får $6B_2 = 24000$, dvs. $B_2 = 4000$ og $B_1 = 3000 - B_2 = -1000$. Derfor er

$$\begin{bmatrix} 21000 \\ 3000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_1 \\ B_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5B_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ -1000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20000 \\ 4000 \end{bmatrix}.$$

Her er $\begin{bmatrix} 1000 \\ -1000 \end{bmatrix}$ en egenvektor for M med egenverdi $\lambda_1 = 0.4$ og $\begin{bmatrix} 20000 \\ 4000 \end{bmatrix}$ en egenvektor for M med egenverdi $\lambda_2 = 1.0$. Derfor er

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} &= M^n \begin{bmatrix} 21000 \\ 3000 \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} 1000 \\ -1000 \end{bmatrix} + M^n \begin{bmatrix} 20000 \\ 4000 \end{bmatrix} \\ &= (0.4)^n \begin{bmatrix} 1000 \\ -1000 \end{bmatrix} + (1.0)^n \begin{bmatrix} 20000 \\ 4000 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 20000 \\ 4000 \end{bmatrix} + (0.4)^n \begin{bmatrix} 1000 \\ -1000 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Når $n \rightarrow \infty$ vil $(0.4)^n \rightarrow 0$, så

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 20000 + 1000 \lim_{n \rightarrow \infty} (0.4)^n = 20000 + 1000 \cdot 0 = 20000$$

og

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 4000 - 1000 \lim_{n \rightarrow \infty} (0.4)^n = 4000 - 1000 \cdot 0 = 4000.$$

OPPGAVE 6

(Utelatt.)

Copyright ©2000 ved John Rognes
Matematisk institutt, Universitetet i Oslo