LØSNINGSFORSLAG FOR MA 001, HØSTEN 2000

Oppgave 1

(a) Substituerer $u = 2x$ med $du/dx = 2$, så $dx = (1/2)\,du$. Får

$$\begin{aligned}\int (3 + 4\sin 2x)\,dx &= \int 3\,dx + \int (4\sin u)(1/2)\,du \\ &= 3x + (4/2)(-\cos u) + C = 3x - 2\cos 2x + C\,.\end{aligned}$$

Bruker delvis integrasjon to ganger:

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,dx &= x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - \int 2\cos x\,dx \\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C\,.\end{aligned}$$

(b) Lar $r = |D| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$ og $v = \arg D = \tan^{-1}(\sqrt{3}/1) = \pi/3$. Da er $D = re^{iv} = 2e^{i\pi/3}$ og

$$\sqrt{D} = \sqrt{r}e^{iv/2} = \sqrt{2}e^{i\pi/6} = \sqrt{2}(\cos\pi/6 + i\sin\pi/6) = \sqrt{6}/2 + i\sqrt{2}/2\,.$$

Oppgave 2

(a) $\ell(y)$ er definert der hvor $\ln y$ er definert, dvs. for $y > 0$.

$\lim_{y\to 0+}(y + \ln y) = 0 + \lim_{y\to 0+}\ln y = -\infty$.

$\lim_{y\to\infty+}(y + \ln y) = \infty + \lim_{y\to\infty}\ln y = \infty$.

Verdimengden til ℓ er $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

(b) $\ell'(y) = 1 + 1/y$.

For $y > 0$ er $1 + 1/y > 0$, så ℓ er strengt voksende.

$\ell''(y) = -1/y^2$.

For $y > 0$ er $-1/y^2 < 0$ så grafen til ℓ krummer nedover.

(c) Definisjonsmengden til e er lik verdimengden til ℓ, som er $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Verdimengden til e er lik definisjonsmengden til ℓ, som er $(0, \infty)$.

$\lim_{x\to-\infty} e(x) = 0$ og $\lim_{x\to\infty} e(x) = \infty$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(d) Finner a og b: $0.40a + b \approx -0.52$ og $0.70a + b \approx 0.34$ gir $(0.70 - 0.40)a \approx 0.34 - (-0.52) = 0.86$, så $a \approx 2.87$ og $b \approx 0.34 - 0.70 \cdot 2.87 \approx -1.67$. Da gir $ay_1 + b = -0.20$ at $y_1 = (-0.20 - b)/a \approx 0.51$.

Alternativt kan vi bruke at $(y_1 - 0.40)/(0.70 - 0.40) \approx (-0.20 - (-0.52))/(0.34 - (-0.52))$ som gir $y_1 \approx 0.51$.

(e) Grafen til ℓ, som krummer nedover, og grafen til L, som er en rett linje, skjærer hverandre for $y = 0.40$ og for $y = 0.70$. Derfor ligger grafen til L under grafen til ℓ når $0.40 < y < 0.70$.

Løsningene y_1 og y_2 ligger mellom 0.40 og 0.70, der grafen til L ligger under grafen til ℓ. Så $\ell(y_2) = -0.20 = L(y_1) < \ell(y_1)$. Siden ℓ er strengt voksende må $y_2 < y_1$. Altså er den nøyaktige løsningen y_2 mindre enn $y_1 \approx 0.51$.

(f) Regner ut $K \cdot \ell(y/K) = K(y/K + \ln(y/K)) = K(y/K + \ln y - \ln K) = y + K \ln y - K \ln K$. Dette gir $y + K \ln y = K \cdot \ell(y/K) + K \ln K$.

Oppgave 3

(a) Ved separasjon av variable må

$$\frac{y + K}{y} \frac{dy}{dt} = -V\,.$$

Integerer med hensyn på t:

$$\int \frac{y + K}{y}\, dy = \int \frac{y + K}{y} \frac{dy}{dt}\, dt = \int -V\, dt\,.$$

Her er $(y + K)/y = 1 + K/y$, så

$$y + K \ln y = \int (1 + K/y)\, dy = \int -V\, dt = -Vt + C$$

for en konstant C.

(b) Setter inn likningen fra oppgave 2(f), som gir

$$K \cdot \ell(y/K) + K \ln K = y + K \ln y = -Vt + C$$

og løser med hensyn på y:

$$\begin{aligned} K \cdot \ell(y/K) &= -Vt + C - K \ln K \\ \ell(y/K) &= -\frac{V}{K} t + \frac{C}{K} - \ln K \\ y/K &= e(-\frac{V}{K} t + \frac{C}{K} - \ln K) \\ y &= K \cdot e(-\frac{V}{K} t + \frac{C}{K} - \ln K) \end{aligned}$$

Lar $D = C/K - \ln K$, som kan ta vilkårlige verdier når K er en positiv konstant og C varierer fritt.

(c) Setter inn $t = 0$ og får $y_0 = K \cdot e(D)$, som gir $e(D) = y_0/K$ og $D = \ell(y_0/K) = y_0/K + \ln(y_0/K)$.

(d) Når $t \to \infty$ vil $-(V/K)t + D \to -\infty$, og $\lim_{x\to-\infty} e(x) = 0$, så $\lim_{t\to\infty} y(t) = K \cdot \lim_{t\to\infty} e(-(V/K)t + D) = 0$.

(e) Med $V = 2.40$, $K = 2.00$ og $y_0 = 2.00$ er $D = 2.00/2.00 + \ln(2.00/2.00) = 1.00$, og $y(1.00) = 2.00 \cdot e(-(2.40/2.00)1.00 + 1.00) = 2.00e(-0.20)$. Vi har $e(-0.20) = y_2 \approx y_1 \approx 0.5$ med én desimals nøyaktighet fra oppgave 2(d), så $y(1.00) = 2.00e(-0.20) \approx 1.0$ med én desimals nøyaktighet.

Oppgave 4

(a) Se vedlagt figur. Området M er trekanten med hjørner i $(-1,-1)$, $(-2,2)$ og $(3,1)$.

(b) I hjørnene av M tar $f(x,y) = x + y$ verdiene $-1 - 1 = -2$, $-2 + 2 = 0$ og $3 + 1 = 4$. Den minste verdien for f er -2, og den største verdien er 4.

Oppgave 5

(a) Egenverdiene λ for matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

er røttene i likningen

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0\,.$$

Det gir

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

lik $\lambda_1 = -1$ eller $\lambda_2 = 2$.

(b) Fra (a) ser vi at koeffisientmatrisen har to forskjellige reelle egenverdier. Egenvektorene til egenverdien $\lambda_1 = -1$ er løsningene $[A_1, B_1]$ for likningssystemet

$$\begin{aligned} (1-(-1))A_1 + 2B_1 &= 0 \\ 1A_1 + (0-(-1))B_1 &= 0 \end{aligned}$$

som gir $A_1 = -B_1$. Så $x_1 = -B_1 e^{-t}$, $y_1 = B_1 e^{-t}$ gir én løsning.

Egenvektorene til egenverdien $\lambda_2 = 2$ er løsningene $[A_2, B_2]$ for likningssystemet

$$\begin{aligned} (1-2)A_2 + 2B_2 &= 0 \\ 1A_2 + (0-2)B_2 &= 0 \end{aligned}$$

som gir $A_2 = 2B_2$. Så $x_2 = 2B_2 e^{2t}$, $y_2 = B_2 e^{2t}$ gir en annen løsning.

Den generelle løsningen er summen av disse,

$$x = x(t) = -B_1 e^{-t} + 2B_2 e^{2t}$$
$$y = y(t) = B_1 e^{-t} + B_2 e^{2t}$$

der B_1 og B_2 kan velges fritt.

(c) Initialbetingelsene gir $1 = x(0) = -B_1 + 2B_2$ og $2 = y(0) = B_1 + B_2$. Løser likningene og får $B_1 = 1$ og $B_2 = 1$, som gir

$$x = x(t) = -e^{-t} + 2e^{2t}$$
$$y = y(t) = e^{-t} + e^{2t}\,.$$

For at $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ må $B_2 = 0$. Da må $1 = x(0) = -B_1$, som gir

$$x = x(t) = e^{-t}$$
$$y = y(t) = -e^{-t}\,.$$

John Rognes

Oslo, 11. desember 2000