UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 001 — Matematiske metoder.
Eksamensdag:	Mandag 11. desember 2000.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgåvesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Alle skriftlige hjelpemidler og lommekalkulator.

Kontroller at oppgåvesettet er komplett
før du tek til å svare på spørsmåla.

Oppgåve 1.

a) Finn dei ubestemde integralane

$$\int (3 + 4\sin 2x)\,dx \qquad \text{og} \qquad \int x^2 \cos x\,dx\,.$$

b) La $D = 1 + i\sqrt{3}$ der $i^2 = -1$. Finn kvadratrota $\sqrt{D}$ og skriv svaret på forma $a + ib$.

Oppgåve 2.

La funksjonen ℓ være gitt ved formelen $\ell(y) = y + \ln y$.

a) Kva reelle y er $\ell(y)$ definert for ? Finn $\lim_{y\to 0^+} \ell(y)$ og $\lim_{y\to\infty} \ell(y)$. Kva er verdimengda til ℓ ?

b) Rekn ut $\ell'(y)$. Avgjør om ℓ er strengt vaksande eller ikkje. Rekn ut $\ell''(y)$. Avgjør om grafen til ℓ krummar oppover eller nedover.

(Held fram side 2.)

La $y = e(x)$ være den omvende funksjonen til $x = \ell(y)$, dvs. $y = e(x)$ om og berre om $x = \ell(y)$.

c) Kva er definisjonsmengda og verdimengda til e ? Finn $\lim_{x\to-\infty} e(x)$ og $\lim_{x\to\infty} e(x)$.

Fylgjande tabell gir nokon funksjonsverdiar for ℓ, nøyaktig med to desimalar:

y	0.10	0.40	0.70	1.00	1.30
$\ell(y)$	-2.20	-0.52	0.34	1.00	1.56

d) La $L(y) = ay + b$ være den lineære funksjonen bestemd av $L(0.40) = \ell(0.40) \approx -0.52$ og $L(0.70) = \ell(0.70) \approx 0.34$.
Finn y_1 slik at $L(y_1) = -0.20$, nøyaktig med to desimalar.

e) Ligger grafen til L over eller under grafen til ℓ når $0.40 < y < 0.70$? Er den nøyaktige løysinga y_2 til likninga $\ell(y_2) = -0.20$ større eller mindre enn løysinga y_1 til likninga $L(y_1) = -0.20$? Grunngje båe svar.

f) La K være ein positiv konstant. Gje prov for at

$$y + K\ln y = K \cdot \ell(\frac{y}{K}) + K\ln K$$

ved å rekne ut $K \cdot \ell(y/K)$.

Oppgåve 3.

Ved ein enzymreaksjon dannes eit stoff A om til eit stoff B. På grunn av ein inhibitor (gift) blir ikkje det som forbrukes av stoff A erstatta. La $y = y(t)$ være konsentrasjonen av stoffet A ved tida t. Vi går ut frå at $y(t) > 0$ for alle t. Reaksjonssnøggleiken antas være gitt ved Michaelis–Mentens likning, som gir differensiallikninga

$$(*) \qquad \frac{dy}{dt} = -V \cdot \frac{y}{y+K}$$

der V og K er positive konstantar. Dette er ein separabel differensiallikning $dy/dt = f(t)g(y)$ der $f(t) = -V$ og $g(y) = y/(y+K)$.

a) Gje prov for at løysingane $y = y(t)$ til differensiallikninga $(*)$ er akkurat dei funksjonene som oppfyller likninga

$$y + K\ln y = -Vt + C$$

der C er ein vilkårlig konstant.

(Held fram side 3.)

b) Bruk resultatet i oppgåve 2(f) til å gje prov for at løysingane til differensiallikninga (∗) kan skrives

$$y(t) = K \cdot e(-\frac{V}{K}t + D)$$

der e er funksjonen frå oppgåve 1 og D er ein vilkårlig konstant.

c) Gje prov for at

$$D = \frac{y_0}{K} + \ln\frac{y_0}{K}$$

der $y_0 = y(0)$.

d) Finn grensen for konsentrasjonen av stoff A når $t \to \infty$, dvs. $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

e) Anta at $V = 2.40$, $K = 2.00$ og $y_0 = 2.00$. Det antas kjent at løysinga y_1 frå oppgåve 2(d) tilnærmer løysinga $y_2 = e(-0.20)$ frå oppgåve 2(e) med én desimals nøyaktighet. Bruk dette og resultatet i oppgåve 2(d) til å finne $y(1.00)$ med én desimals nøyaktighet.

Oppgåve 4.

a) Skravér området M i xy-planet som er gitt ved krava

$$x - 2y \geq 1\,, \qquad x + 3y \geq -4\,, \qquad 2x + y \leq 8\,, \qquad 3x - y \leq 8\,.$$

Bruk same lengdeeining på båe aksane.

b) Tegn, i same figur, ein av nivålinjane til funksjonen $f(x, y) = x + y$, og finn største og minste verdi for $f(x, y)$ når (x, y) varierer i M.

Oppgåve 5.

a) Finn egenverdiane til matrisa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Finn den allmenne løysinga $(x(t), y(t))$ til differensiallikningssystemet:

$$(**) \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= x \end{aligned}$$

c) Finn den spesielle løysinga til differensiallikningssystemet (∗∗) med byrjingskravet $x(0) = 1$ og $y(0) = 2$. Finn også den andre spesielle løysinga som oppfyller $x(0) = 1$ og $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

SLUTT