

OBLIG 2 FOR MA 001

Hver student som er oppmeldt til eksamen i MA 001 høsten 2000 skal ha godkjent to obligatoriske oppgaver. Dette er den andre av disse. Hver student leverer en individuell besvarelse til sin gruppelærer, som retter besvarelsene og godkjenner de som tilsvarende en bestått karakter (4.0 eller bedre). Husk å skrive ditt fulle navn og nummeret på MA 001-gruppen du følger på besvarelsen.

Absolutt innleveringsfrist for både Oblig 1 og Oblig 2 er fredag 10. november 2000. Gi en matematisk begrunnelse for alle svar. Gi eksakte svar når det er mulig.

OPPGAVE 1

Student A og student B skal drikke en kopp kaffe hver. Kaffen serveres sort med volum $V_k = 150$ ml og temperatur $T_k = 68^\circ\text{C}$. Begge studentene vil ha en skvett melk i kaffen, med volum $V_m = 10$ ml. Melken står kaldt, og har temperatur $T_m = 4^\circ\text{C}$. Student A heller melk i sin kaffe, men så ringer begge studentenes mobiltelefoner og student B heller ikke melk i sin kopp.

(a) Når melken helles i kaffen får blandingen temperatur

$$T_b = \frac{V_k T_k + V_m T_m}{V_k + V_m}.$$

Finn blandingstemperaturen i student A's kopp kaffe med melk.

(b) Ettersom samtaler trekker ut, avtar temperaturen i kaffen (med eller uten melk) eksponentielt mot romtemperaturen, som er konstant lik $T_r = 20^\circ\text{C}$. Etter t minutter er temperaturen gitt ved uttrykket

$$T(t) = T_r + (T_0 - T_r) \left(\frac{1}{2}\right)^{t/h}.$$

Gi en presis fortolkning av konstantene T_0 og h .

(c) Etter 10 minutter ($t = 10$) har temperaturen i student A's kaffe (med melk) falt til 42°C . Finn konstanten h . Hva er temperaturen i student A's kaffe etter ytterligere 10 minutter ($t = 20$) ?

(d) Etter 20 minutter er student B ferdig med telefonsamtalen. Hva er da temperaturen i student B's kaffe (uten melk) ?

(e) Student B heller så melk i sin kaffe. Finn blandingstemperaturen for kaffen tilsatt melk etter 20 minutter. Hvilken kopp kaffe med melk er varmest etter 20 minutter ?

OPPGAVE 2

(a) La a , b , k og ℓ være positive konstanter. Vis at funksjonen

$$F(t) = -(a/k)te^{-kt} - (a/k^2)e^{-kt} - (b/\ell)e^{-\ell t}$$

er en antiderivert til funksjonen

$$f(t) = ate^{-kt} + be^{-\ell t}.$$

Etter et regnskyll renner det vann inn i et vannreservoar. Etter $t \geq 0$ timer er tilstrømningshastigheten $f(t)$ m³/h, der $f(t)$ er gitt som i (a) og $a = 2.0 \cdot 10^5$, $b = 2.0 \cdot 10^4$, $k = 1.0$ og $\ell = 0.1$.

(b) Finn $f(0)$ og $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$.

(c) La $V(t)$ m³ være det samlede vannvolumet som har strømmet inn i reservoaret fra tiden 0 til tiden t . Da er $V'(t) = f(t)$. Finn en formel for $V(t)$ for $t \geq 0$.

(d) Finn $V(0)$ og $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t)$.

(e) Det tappes også vann ut av reservoaret med konstant utstrømningshastighet $c = 2.0 \cdot 10^4$ m³/h for $t \geq 0$, inntil reservoaret er tomt. Vis at reservoaret tømmes innen $t = 20$ timer.

OPPGAVE 3

En bølge i xy -planet er ved tidspunktet t gitt som grafen til funksjonen

$$f_t(x) = 4 \cos x + 3 \cos(x - t).$$

Dette er summen av to bølger i xy -planet: en stillestående med amplitude 4, og en med amplitude 3 som beveger seg mot høyre når t vokser.

(a) Vis at $f_t(x) = (4 + 3 \cos t) \cos x + (3 \sin t) \sin x = C \cos(x - x_0)$ der $C = \sqrt{25 + 24 \cos t}$ og $\tan x_0 = 3 \sin t / (4 + 3 \cos t)$.

(b) La $g(t) = 3 \sin t / (4 + 3 \cos t)$ for $0 \leq t \leq \pi$. Finn $g'(t)$ og avgjør hvor g er voksende og hvor g er avtagende.

(c) Finn maksimumspunktet og maksimumsverdien for $g(t)$. Gi eksakte svar.

(d) Ved tidspunktet t har bølgetoppen nærmest y -aksen xy -koordinater (x_0, C) . Finn xy -koordinatene til denne bølgetoppen når $g(t)$ har sin maksimale verdi.

OPPGAVE 4

(a) Likningen $y = cx^r$ gjelder for $(x, y) = (4, 5)$ og $(x, y) = (25, 2)$. Finn c og r . Er grafen til y som en funksjon av x en rett linje i et rettvinklet lineært koordinatsystem, i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem, eller i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem?

(b) Bruk L'Hôpitals regel (eventuelt flere ganger) for å finne

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2h}{h^2}.$$

(c) Finn det bestemte integralet

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 x \cos x \, dx$$

ved hjelp av substitusjonen $u = g(x) = \sin x$.