

Teorem:

La $K \subset \mathbb{R}^m$ være lukket og begrenset, og la $f: K \rightarrow \mathbb{R}^p$ være kontinuerlig. Da er bildet $f(K) = \{f(x) \mid x \in K\} \subset \mathbb{R}^p$ også lukket og begrenset.

Bevis:

Det er nok å vise at enhver følge i $f(K)$ har en delfølge som konvergerer mot et punkt i $f(K)$. La $(y_n)_n$ være en følge i $f(K)$. For hver n er $y_n \in f(K)$, så vi kan velge en $x_n \in K$ med $f(x_n) = y_n$. Da er $(x_n)_n$ en følge i K , som er lukket og begrenset. Vet da at vi kan finne en delfølge $(x_{n(j)})_j$ som konvergerer mot et punkt $X \in K$ når $j \rightarrow \infty$. Bruker at f er kontinuerlig i X til å slutte at følgen $(f(x_{n(j)}))_j = (y_{n(j)})_j$ konvergerer mot $f(X)$. Men $(y_{n(j)})_j$ er en delfølge av $(y_n)_n$, og $f(X) \in f(K)$, så dette er en delfølge av $(y_n)_n$ som konvergerer mot et punkt i $f(K)$. QED.

Teorem:

La $K \subset \mathbb{R}^m$ være lukket, begrenset og ikke-tomt, og la $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ være kontinuerlig. Da finnes k_1 og k_2 i K slik at

$$f(k_1) \leq f(x) \leq f(k_2)$$

for alle $x \in K$.

Bevis:

Bildet $E = f(K) \subset \mathbb{R}$ er lukket, begrenset og ikke-tomt. Det har da et supremum $M = \sup f(K)$. For hver $n \in \mathbb{N}$ er $M - 1/n$ ikke en øvre skranke for $f(K)$, siden M er den minste øvre skranken. Altså finnes en $y_n \in f(K)$ med $M - 1/n < y_n \leq M$. Da vil $y_n \rightarrow M$ når $n \rightarrow \infty$. Siden $f(K)$ er lukket må $M \in f(K)$. Altså finnes en $k_2 \in K$ med $f(k_2) = M = \sup f(K)$. Spesielt er $f(x) \leq f(k_2)$ for alle $x \in K$. Et tilsvarende argument for $\inf f(K)$ viser at det finnes en $k_1 \in K$ med $f(k_1) = \inf f(K)$, slik at $f(k_1) \leq f(x)$ for alle $x \in K$. QED.

Teorem:

La $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon. Da finnes $k_1, k_2 \in [a,b]$ slik at $f(k_1) \leq f(x) \leq f(k_2)$ for alle $x \in [a,b]$.

Med andre ord: en kontinuerlig funksjon på et lukket og begrenset intervall oppnår sitt maksimum og sitt minimum.