

12.2. Eksistens av løsninger for differensiallikninger

Teorem 12.8: Anta $f \colon \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert, $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ og $\delta > 0$. Anta videre at det finnes en $K > 0$ med $K\delta < 1$ slik at

$$(*) \quad |f(t, u) - f(t, v)| \leq K|u - v|$$

for alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ og $u, v \in \mathbb{R}$.

(i) Da finnes det en entydig kontinuert funksjon

$$y \colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$$

som oppfyller integrallikningen

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) \, du$$

for alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

(ii) Restriksjonen av y til $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ er den entydige deriverbare funksjonen

$$y \colon (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$$

som oppfyller differensiallikningen

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

for alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Bevis: Vi vet at vektorrommet $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ med sup-normen $\|\cdot\|_\infty$ er komplett. Se på lineærabildningen

$$T \colon C([t_0 - \delta, t_0 + \delta]) \rightarrow C([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$$

som tar g til Tg gitt ved

$$(Tg)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, g(u)) \, du.$$

La $g, h \in C([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$. Vi skal vise at $\|Tg - Th\|_\infty \leq K\delta \|g - h\|_\infty$, slik at T er en kontraksjonsavbildning.

Hvis $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$ er

$$|(Tg)(t) - (Th)(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(u, g(u)) - f(u, h(u)) \, du \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^t |f(u, g(u)) - f(u, h(u))| du$$

$$\leq \int_{t_0}^{t_0 + \delta} K |g(u) - h(u)| du$$

$$\leq (t - t_0) K \|g - h\|_\infty$$

$$\leq K\delta \|g - h\|_\infty.$$

Tilsvarende er

$$|(Tg)(t) - (Th)(t)| \leq K\delta \|g - h\|_\infty$$

for alle $t_0 - \delta \leq t \leq t_0$. Altså er

$$\|Tg - Th\|_\infty \leq K\delta \|g - h\|_\infty$$

slik at T er en kontraksjonsavbildning, siden $K\delta < 1$. Ved kontraksjonsprinsippet har T et entydig fikspunkt, dvs. det finnes en entydig kontinuerlig $y \colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ slik at $Ty = y$, dvs. at

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du$$

for alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Dette viser (i). Del (ii) følger som tidligere, ved kalkulusens fundamentalteorem. QED.

Eksempel (MAT1300-eksamen våren 2008): La

$$f(t, y) = \sin(y+t).$$

Da er $f \colon \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kontinuerlig. Siden $df/dy = \cos(y+t)$ tar verdier i $[-1, 1]$ er

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq |u - v|$$

for alle $t, u, v \in \mathbb{R}$. La $K = 1$ og $\delta < 1$, slik at $K\delta < 1$. For vilkårlig valgte $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ finnes det da en entydig deriverbar funksjon

$$y \colon (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$$

slik at $y(t_0) = y_0$ og

$$(**) \quad y'(t) = \sin(y(t) + t)$$

for alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Konkret, hvis $\delta = \pi/4$, $t_0 = 0$ og $y_0 = \pi/3$ finner vi en entydig deriverbar funksjon $y \colon (-\pi/4, \pi/4) \rightarrow \mathbb{R}$ med $y(0) = \pi/3$, slik at differensiallikningen (**) er oppfylt.

De ulike lokale løsningene kan i dette tilfellet limes sammen til en global løsning. Gitt startbetingelser $y(t_0) = y_0$ og $\delta \in (1/2, 1)$ finnes en entydig løsning $y(t)$

for $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. La så $t_1 = t_0 + 1/2$ og $y_1 = y(t_1)$. Da finnes en entydig løsning $y(t)$ for $t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$. Ved entydighet må disse to løsningene stemme overens på snittet $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap (t_1 - \delta, t_1 + \delta) = (t_1 - \delta, t_0 + \delta)$. Altså har likningen en entydig løsning på $(t_0 - \delta, t_1 + \delta)$. La så $t_2 = t_1 + 1/2$, og fortsett videre. Etter hvert gir dette eksistens av en entydig løsning på hele $(t_0 - \delta, \infty)$. Tilsvarende forlengelse i den andre retningen gir en entydig løsning på hele $\mathbb{R}$.

Dette diskuteres videre i avsnitt 12.3, se Teorem 12.16, som ikke er pensum.

Eksempel: Lipschitz-betingelsen (*) kan generelt ikke utelates. La

$$f(t, y) = \begin{cases} 0 & \text{for } y \leq 0, \\ 2\sqrt{y} & \text{for } y \geq 0. \end{cases}$$

Dette definerer en kontinuerlig funksjon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, men det finnes ingen K slik at

$$|f(t, u) - f(t, v)| = |2\sqrt{u} - 2\sqrt{v}| \leq K|u - v|$$

for alle $u, v \geq 0$. Med $v=0$ ville dette bety $2\sqrt{u} \leq K u$ eller $K \geq 2/\sqrt{u}$ for $u > 0$, som vokser ubegrenset når $u \rightarrow 0$. Differensiallikningen

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

har løsninger for alle initialbetingelser, men de er ikke entydig bestemt av initialbetingelsene. For eksempel, la $a \in \mathbb{R}$ og se på

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq a, \\ (t-a)^2 & \text{for } t \geq a. \end{cases}$$

Da er

$$y'(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq a, \\ 2(t-a) & \text{for } t \geq a, \end{cases}$$

slik at $y(t) \geq 0$ for alle t og $y'(t) = 2\sqrt{y(t)} = f(t, y(t))$ for alle t . Altså finnes det uendelig mange løsninger med $y(0) = 0$ ($t_0=0, y_0=0$), en for hver $a \geq 0$. Gitt initialbetingelsen $y(0) = 0$ og differensiallikningen $y'(t) = 2\sqrt{y(t)}$ er det altså umulig å forutsi når løsningen slutter å være konstant, og går over til å vokse kvadratisk som en funksjon av tiden.

Høyere dimensjoner

Vi kan også studere differensiallikninger på formen

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

der $y \colon (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ er en deriverbar funksjon til $\mathbb{R}^n$. Her antar vi at

$$f \colon \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

er en kontinuerlig funksjon, og $(t, y(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, som vi identifiserer med $\mathbb{R}^{n+1}$. Vi bruker den Euklidiske normen $\|\cdot\|$ på $\mathbb{R}^n$.

Oppgave/Teorem 12.12: Anta $f \colon \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ er kontinuerlig, $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ og $\delta > 0$. Anta videre at det finnes en $K > 0$ med $K\delta < 1$ slik at

$$(*) \quad \|f(t, u) - f(t, v)\| \leq K\|u - v\|$$

for alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ og $u, v \in \mathbb{R}^n$.

(i) Da finnes det en entydig kontinuerlig funksjon

$$y \colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

som oppfyller integrallikningen

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) \, du$$

for alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

(ii) Restriksjonen av y til $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ er den entydige deriverbare funksjonen

$$y \colon (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

som oppfyller differensiallikningen

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

for alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Bevis: Vi ser på vektorrommet $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$ av kontinuerlige funksjoner

$$y \colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

med sup-normen $\|\cdot\|_\infty$ gitt ved

$$\|y\|_\infty = \sup_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|y(t)\|.$$

Dette er et komplett vektorrom, ved samme bevis som utleder at $\mathbb{R}^n$ er komplett

gitt at R er komplett. Se Teorem 4.70.

((ETC))

Vi kan så se på n 'te-ordens differensiallikninger på formen

$$(***) \quad y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) ,$$

der $g \colon R^{n+1} \rightarrow R$ er kontinuerlig. Her er $y \colon (a, b) \rightarrow R$ antatt å være n ganger deriverbar, og vi oppfatter

$$(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

som et punkt i R^{n+1} .

Vi kan omgjøre dette til et system av differensiallikninger

$$\begin{aligned} y'_1(t) &= y_2(t) \\ &\dots \\ y'_{n-1}(t) &= y_n(t) \\ y'_n(t) &= g(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \end{aligned}$$

der

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y(t) \\ y_2(t) &= y'(t) \\ &\dots \\ y_n(t) &= y^{(n-1)}(t) . \end{aligned}$$

Vi erstatter altså funksjonen $y \colon (a,b) \rightarrow R$ med vektorfunksjonen

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \\ &= (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \end{aligned}$$

Differensiallikningen $(***)$ kan da omskrives til

$$\vec{y}'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t))$$

der

$$\vec{f}(t, u_1, \dots, u_n) = (u_2, \dots, u_n, g(t, u_1, \dots, u_n))$$

definerer funksjonen

$$f \colon R^{n+1} \rightarrow R^n .$$

((ETC))