

8.2. Riemann-integralet

La $a \leq b \in \mathbb{R}$ og la $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ være en **begrenset** funksjon, dvs. slik at det finnes en konstant K med $|f(x)| \leq K$ for alle $x \in [a,b]$. Grafen til f ligger da innen rektangelet $[a,b] \times [-K,K] \subset \mathbb{R}^2$.

Definisjon:

En **disseksjon** (= **partisjon**) D av $[a,b]$ er en endelig delmengde

$$D = \{a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b\}$$

som inneholder endepunktene til $[a,b]$.

La **øvre-summen** til f assosiert til D være

$$S(f,D) = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \sup_{x_{j-1} \leq t \leq x_j} f(t)$$

og la **nedre-summen** til f assosiert til D være

$$s(f,D) = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \inf_{x_{j-1} \leq t \leq x_j} f(t).$$

Intuitivt er $S(f, D)$ arealet mellom x-aksen og grafen til den minste trappefunksjonen som er konstant på hvert intervall (x_{j-1}, x_j) , og som ligger over grafen til f .

Tilsvarende er $s(f, D)$ arealet mellom x-aksen og grafen til den største trappefunksjonen som er konstant på disse intervallene, og som ligger under grafen til f .

Lemma 8.9:

La D og D' være disseksjoner av $[a,b]$, med $D \subset D'$. Da er

$$s(D, f) \leq s(D', f) \leq S(D', f) \leq S(D, f).$$

Bevis:

Det er klart at

$$s(f, D) \leq S(f, D)$$

for enhver disseksjon D . Vi vil vise at $s(D, f) \leq s(D', f)$ når $D \subset D'$. Beviset for $S(D', f) \leq S(D, f)$ er helt tilsvarende.

Ved induksjon kan vi anta at $D' = D \cup \{c\}$ der $x_{j-1} < c < x_j$ for en $1 \leq j \leq n$. For enkelhets skyld antar vi at $j=n+1$, så $D = \{a, b\}$ og $D' = \{a, c, b\}$. Da er

$$s(f, D) = (b-a) \inf_{a \leq t \leq b} f(t)$$

mens

$$s(f, D') = (c-a) \inf_{a \leq t \leq c} f(t) + (b-c) \inf_{c \leq t \leq b} f(t) .$$

Vi har inklusjoner

$$\{f(t) \mid a \leq t \leq c\}, \{f(t) \mid c \leq t \leq b\} \subseteq \{f(t) \mid a \leq t \leq b\}$$

så den (største) nedre skranken $\inf_{a \leq t \leq b} f(t)$ for $\{f(t) \mid a \leq t \leq b\}$ er også en nedre skranke for $\{f(t) \mid a \leq t \leq c\}$ og $\{f(t) \mid c \leq t \leq b\}$. Altså er

$$\inf_{a \leq t \leq b} f(t) \leq \inf_{a \leq t \leq c} f(t), \inf_{c \leq t \leq b} f(t)$$

siden $\inf_{a \leq t \leq c} f(t)$ er den største nedre skranken for $\{f(t) \mid a \leq t \leq c\}$ og $\inf_{c \leq t \leq b} f(t)$ er den største nedre skranken for $\{f(t) \mid c \leq t \leq b\}$. Da følger at

$$\begin{aligned} s(f, D) &= (b-a) \inf_{a \leq t \leq b} f(t) \\ &= (c-a) \inf_{a \leq t \leq b} f(t) + (b-c) \inf_{a \leq t \leq b} f(t) \\ &\leq (c-a) \inf_{a \leq t \leq c} f(t) + (b-c) \inf_{c \leq t \leq b} f(t) \\ &= s(f, D') . \end{aligned}$$

QED.

Lemma 8.10:

La D_1 og D_2 være to disseksjoner, med union $D_1 \cup D_2$. Da er

$$s(f, D_1), s(f, D_2) \leq s(f, D_1 \cup D_2)$$

og

$$S(f, D_1 \cup D_2) \leq S(f, D_1), S(f, D_2) .$$

Bevis:

Bruk Lemma 8.9 for $D = D_1, D_2 \subseteq D_1 \cup D_2 = D'$. QED.

Definisjon:

La **øvre-integralet**

$$I^*(f) = \inf_D S(f, D)$$

være infimum av øvre-summene $S(f, D)$, der D løper over alle disseksjoner av $[a,b]$.

La **nedre-integralet**

$$I_*(f) = \sup_D s(f, D)$$

være supremum av nedre-summene $s(f, D)$, der D løper over alle disseksjoner av $[a, b]$.

Lemma 8.11: $I_*(f) \leq I^*(f)$.

Bevis:

Gitt to disseksjoner D_1 og D_2 er $s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$, så ved å la D_1 variere får vi $I_*(f) \leq S(f, D_2)$, og ved å la D_2 variere får vi $I_*(f) \leq I^*(f)$. QED.

Definisjon: La $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ være en begrenset funksjon. Dersom $I_*(f) = I^*(f)$ sier vi at f er **Riemann-integrerbar**, og lar **Riemann-integralet**

$$\int_a^b f(x) \, dx = I_*(f) = I^*(f)$$

være den felles verdien.

Oppgave 8.12: La $k \in \mathbb{R}$ og $f(t) = k$ (en konstant funksjon). Da er f Riemann-integrerbar med

$$\int_a^b k \, dx = k(b-a).$$

Lemma 8.13(i):

En begrenset funksjon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er Riemann-integrerbar hvis og bare hvis gitt $\epsilon > 0$ finnes en disseksjon D med

$$S(f, D) - s(f, D) < \epsilon.$$

Bevis: Anta f er Riemann-integrerbar med Riemann-integral $I = I_*(f) = I^*(f)$. La $\epsilon > 0$. Da finnes disseksjoner D_1 og D_2 slik at

$$I - \epsilon/2 < s(f, D_1)$$

og

$$S(f, D_2) < I + \epsilon/2.$$

La $D = D_1 \cup D_2$. Da er

$$I - \epsilon/2 < s(f, D_1) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq S(f, D_2) < I + \epsilon/2$$

så

$$S(f, D) - s(f, D) < (I + \epsilon/2) - (I - \epsilon/2) = \epsilon.$$

Omvendt, anta at gitt $\epsilon > 0$ finnes en disseksjon D med

$$S(f, D) - s(f, D) < \epsilon.$$

Da er

$$s(f, D) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S(f, D)$$

så

$$0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq S(f, D) - s(f, D) < \epsilon.$$

Siden $\epsilon > 0$ var vilkårlig valgt, må $I^*(f) - I_*(f) = 0$, så f er Riemann integrerbar. QED.

Lemma 8.15:

Hvis $f, g \in [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er Riemann-integrerbare, så er også $f+g$ det, med

$$\int_a^b f(x)+g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

Bevis:

La $I(f) = \int_a^b f(x) \, dx$ og $I(g) = \int_a^b g(x) \, dx$. La $\epsilon > 0$. Da finnes disseksjoner D_1 og D_2 av $[a, b]$ slik at

$$I(f) - \epsilon/4 < s(f, D_1) \leq I(f) \leq S(f, D_1) < I(f) + \epsilon/4$$

og

$$I(g) - \epsilon/4 < s(g, D_2) \leq I(g) \leq S(g, D_2) < I(g) + \epsilon/4.$$

La $D = D_1 \cup D_2$. Da er

$$s(f, D_1), s(f, D_2) \leq s(f, D) \leq I(f) \leq S(f, D) \leq S(f, D_1), S(f, D_2)$$

så

$$I(f) - \epsilon/4 < s(f, D) \leq I(f) \leq S(f, D) < I(f) + \epsilon/4$$

og

$$I(g) - \epsilon/4 < s(g, D) \leq I(g) \leq S(g, D) < I(g) + \epsilon/4.$$

Nå er

$$S(f+g, D) \leq S(f, D) + S(g, D)$$

og

$$s(f, D) + s(g, D) \leq s(f+g, D)$$

så

$$I(f) + I(g) - \epsilon/2 < s(f, D) + s(g, D) \leq s(f+g, D)$$

$$\leq S(f+g, D) \leq S(f, D) + S(g, D) \leq I(f) + I(g) + \epsilon/2$$

slik at

$$S(f+g, D) - s(f+g, D) < \epsilon .$$

Altså er $f+g$ Riemann integrerbar. ((ETC))