MAT1300 – Analyse I – 28. april 2009

12.1. Banachs kontraksjonsprinsipp

Definisjon 12.1: La (X, d) være et metrisk rom og $T \: X \to X$ en funksjon. Vi sier at $w \in X$ er et **fikspunkt** for T dersom $Tw = w$. Vi sier at T er en **kontraksjonsavbildning** dersom det finnes et tall $0<K<1$ slik at $d(Tx, Ty) \le Kd(x, y)$ for alle x, y i X.

Oppgave 12.2: La (X, d) være et ikketomt komplett metrisk rom, og la $T \: X \to X$ være en kontraksjonsavbildning, med fikspunkt w. La x_0 være et vilkårlig punkt i X, og la $x_n = Tx_{n-1}$ for alle $n\ge1$. Da vil $d(x_n, w) \to 0$ når $n \to \infty$, s~ $x_n \to w$ i (X, d) når $n \to \infty$.

Teorem 12.3 (Kontraksjonsprinsippet): La (X, d) være et ikketomt komplett metrisk rom, og la $T \: X \to X$ være en kontraksjonsavbildning. Da har T et entydig fikspunkt w i X.

12.2. Eksistens av løsninger for differensiallikninger

Lemma 12.6: Hvis $f \: R^2 \to R$ er kontinuerlig, $t_0, y_0 \in R$ og $\delta>0$ så er følgende utsagn ekvivalente:

(A) Funksjonen $y \: (t_0-\delta, t_0+\delta) \to R$ er deriverbar og oppfyller differensiallikningen

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

for alle t i $(t_0-\delta, t_0+\delta)$, samt at $y(t_0) = y_0$.

(B) Funksjonen $y \: (t_0-\delta, t_0+\delta) \to R$ er kontinuerlig og oppfyller integrallikningen

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du$$

for alle t i $(t_0-\delta, t_0+\delta)$.

Teorem 12.8: Anta $f \: R^2 \to R$ er kontinuerlig, $t_0, y_0 \in R$ og $\delta>0$. Anta videre at det finnes en $K>0$ med $K\delta<1$ slik at

$$(*) \qquad |f(t,u) - f(t,v)| \le K|u-v|$$

for alle t i $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ og u,v i R. Da finnes det en entydig kontinuerlig $y : [t_0-\delta, t_0+\delta] \to R$ som oppfyller integrallikningen

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))\, du$$

for alle t i $[t_0-\delta, t_0+\delta]$.

Bevis: Vi vet at vektorrommet $C([t_0-\delta, t_0+\delta])$ med sup-normen $||.||_\infty$ er komplett. Se på lineæravbildningen

$$T \: C([t_0-\delta, t_0+\delta]) \to C([t_0-\delta, t_0+\delta])$$

som tar g til Tg gitt ved

$$(Tg)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, g(u))\, du .$$

La g, h i $C([t_0-\delta, t_0+\delta])$. Vi skal vise at $||Tg-Th||_\infty \le K\delta ||g-h||_\infty$, slik at T er en kontraksjonsavbildning.

Hvis $t_0 \le t \le t_0+\delta$ er

$$|(Tg)(t) - (Th)(t)| = | \int_{t_0}^t f(u,g(u)) - f(u, h(u))\, du |$$

$$\le \int_{t_0}^t | f(u, g(u)) - f(u, h(u)) |\, du$$

$$\le \int_{t_0}^t K |g(u) - h(u)|\, du$$

$$\le (t-t_0) K ||g-h||_\infty$$

$$\le K\delta ||g-h||_\infty .$$

Tilsvarende er

$$|(Tg)(t) - (Th)(t)| \le K\delta ||g-h||_\infty$$

for alle $t_0 - \delta \le t \le t_0$. Altså er

$$||Tg - Th||_\infty \le K\delta ||g-h||_\infty$$

slik at T er en kontraksjonsavbildning, siden $K\delta<1$. Ved kontraksjonsprinsippet har T et entydig fikspunkt, dvs. det finnes en entydig kontinuerlig $y \: [t_0-\delta, t_0+\delta] \to R$ slik at $Ty = y$, dvs. at

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))\, du$$

for alle t i $[t_0-\delta, t_0+\delta]$. QED.

Korollar 12.9: Anta $f \: R^2 \to R$ er kontinuerlig, $t_0, y_0 \in R$ og $\delta>0$. Anta videre at det finnes en $K>0$ med $K\delta<1$ slik at

$$(*) \qquad |f(t,u) - f(t,v)| \le K|u-v|$$

for alle t i [t_0-\delta, t_0+\delta] og u,v i R. Da finnes det en entydig kontinuerlig y : [t_0-\delta, t_0+\delta] \to R som er deriverbar på (t_0-\delta, t_0+\delta) og oppfyller differensiallikningen

y'(t) = f(t, y(t))

for alle t i (t_0-\delta, t_0+\delta).