# GEOMETRI I PLANET

KRISTIAN RANESTAD

## 1. Innledning

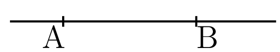
Dette er kompendiet i Euklidsk plangeometri leder til beviser av Pappos' setning og Pascals setning. En rekke kjente setninger er vist underveis, med argumenter som i hovedsak bruker formlikhetssetningene. For noen av oppgavene egner geometriverktøy som Geogebra seg til å lage gode hjelpefigurer.

Kompendiet er organisert i to deler med oppgavesamling etter hver del. Den første delen omhandler trekantgeometri og avsluttes med et bevis av Pappos' setning. Den andre delen omhandler sirkelgeometri og avsluttes med et bevis av Pascals setning for sirkler.

## 2. Trekantgeometri

Den første delen om trekanter begynner med mål for lengde og vinkler.

2.1. **Lengdemål og vinkelmål.** Geometri betyr landmåling. Derfor er det naturlig i et geometri kurs å starte med lengdemål. Linjestykker har lengdemål. Et linjestykke er avgrenset av to punkter. Linjestykket mellom punktene $A$ og $B$ i planet kaller vi $AB$, og med linja gjennom $AB$ mener vi linja gjennom punktene $A$ og $B$.



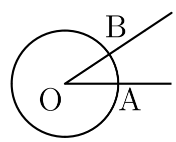

Figur 1. Linja gjennom $AB$

Lengden til linjestykket mellom $A$ og $B$ betegner vi også med $AB$. Denne lengden måler vi med en valgt lengdeenhet, f. eks centimeter eller meter. Lengdemålet blir derfor et tall som angir forholdet mellom lengden og en lengdeenhet. Ofte vil vi undertrykke lengdeenheten, og oppgi lengdene med et positivt reelt tall. Det vil si at om en måer i

*Date*: October 5, 2011.

centimeter undertrykker vi ofte benevningen, slik at om lengden fra $A$ til $B$ er 3 cm, skriver vi ofte $AB = 3$.

Vinkler kan også måles med en valgt enhet, som når en måler en vinkel i grader. Her er der imidlertid et annet mål som er mer naturlig, nemlig radianer. Grunnen til at det er mer naturlig, er at vinkelmålet i radianer er forholdstallet mellom lengden til den sirkelbuen som vinkelen spenner over og radien til denne sirkelen.




$$\angle AOB = \frac{\cup AB}{OA}$$

FIGUR 2. Vinkel $\angle AOB$ målt i radianer

Siden dette forholdstallet er uavhengig av radien til sirkelen, blir det et absolutt mål uavhengig av hvilken lengdeenhet en bruker. Dersom radius i sirkelen er 1, blir omkretsen til hele sirkelen $2\pi$, så en rett vinkel får måltall $\frac{\pi}{2}$. Vi vil som regel oppgi vinkelmål i radianer. Dersom $A, B, C$ er tre punkter i planet, vil linjestykkene $AB$ og $BC$ danne en vinkel som vi betegner med $\angle ABC$. I radianer vil denne vinkelen ha mål mellom 0 og $\pi$.

**Fortegnsmål for linjestykker:** Noen ganger velger vi en orientering langs ei linje. Et linjestykke $AB$ er da positivt eller negativt ettersom retningen fra $A$ til $B$ følger orienteringen eller ikke. **Lengden** til linjestykket $AB$ **med fortegn**, bestemt av retningen fra $A$ til $B$, betegner vi med $\overline{AB}$. Tallverdien $|\overline{AB}|$ betegner vi på samme måte som linjestykket selv med $AB$.

Den grunnleggende egenskapen til fortegnsmålet er at

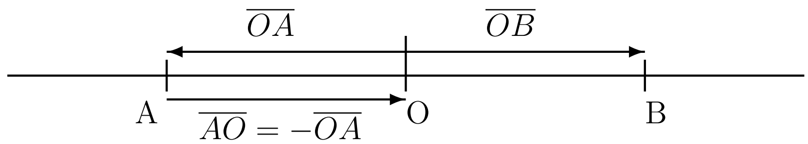
$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

uavhengig av orientering, rekkefølge og om noen av punktene er like. Spesielt er

$$\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = 0, \quad \text{og} \qquad \overline{AB} = -\overline{BA}$$

For tre **kollineære** punkter $A, B, C$, det vil si tre punkter som ligger på samme linje, er

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{AC} + \overline{CA} = 0.$$



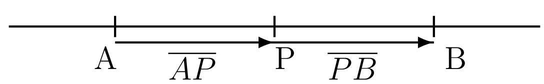

FIGUR 3. Tre punkter $A$, $B$ og $O$ på linje

Tilsvarende får vi for hvert punkt $O$ på linja gjennom $AB$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

Fortegnsmål for linjestykker gir en nyttig definisjon av delingsforholdet som et punkt på ei linje deler et linjestykke på linja i.
Delingsforhold. Hvis $A, B, P$ er tre forskjellige kollineære punkter, sier vi at $P$ **deler** $AB$ **i forholdet**

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}.$$




FIGUR 4. $P$ deler $AB$ innvendig og $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} > 0$

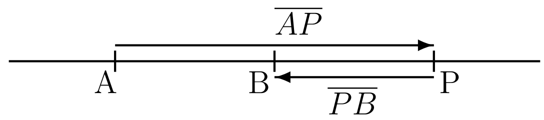
Med denne definisjonen ser en lett at forholdet er negativt dersom $P$ ligger utenfor linjestykket $AB$ (**deler** $AB$ **utvendig**) og positivt dersom $P$ ligger mellom $A$ og $B$ (**deler** $AB$ **innvendig**).

Denne definisjonen har en naturlig utvidelse til hele linja dersom en tillater $\infty$ som verdi. Det skal vi la ligge her. Viktigere er

**Setning 1.** *Et punkt $P$ på linja gjennom $AB$ er entydig bestemt av delingsforholdet $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$.*

*Bevis.* La $P$ og $Q$ være to punkter på linja gjennom $AB$ med

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}}.$$




FIGUR 5. $P$ deler $AB$ utvendig og $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} < 0$

Legg til 1 på begge sider:

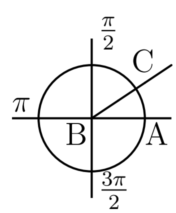
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} + \frac{\overline{PB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} + \frac{\overline{QB}}{\overline{QB}},$$

da får vi

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{QB}}.$$

Dermed er $\overline{PB} = \overline{QB}$, og setningen følger. □

Vinkelmål kan også defineres med fortegn. Dette skjer når en velger orientering som en retning for rotasjon rundt et punkt, med klokka eller mot klokka.




FIGUR 6. Vinkler målt i radianer mellom 0 og $2\pi$

Det er vanlig konvensjon å si at rotasjon mot klokka er positiv. Vinkelmålet er da mellom 0 og $2\pi$ for $\angle ABC$, når en går fra $AB$ til $BC$ i positiv omdreiningsretning om punktet $B$. Noen foretrekker vinkelmål $\leq \pi$ i tallverdi, og bruker derfor intervallet $(-\pi, \pi]$.

2.2. **Oppgaver.**

(1) Vis at om $A, B, C, D$ er kollineære, så er

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{BD} \cdot \overline{CA} + \overline{CD} \cdot \overline{AB} = 0.$$

(2) La $A$ og $B$ være punktene 0 og 1 på tallinja, og la $P$ være et tredje punkt $x$. Utrykk $x$ ved hjelp av forholdstallet $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$.

2.3. **Trekanter.** I dette avsnittet skal vi se noen velkjente og noen kanskje mindre kjente resultater fra trekantgeometrien. Dersom tre punkter $A, B, C$ ikke er kollineære, altså ikke ligger på linje, betegner vi trekanten med hjørner i disse punktene med $\triangle ABC$. I hvert hjørne har trekanten en vinkel. Vinkelen i hjørnet $A$ har vinkelmål som vi betegner med $\angle A$ og ligger mellom 0 og $\pi$. To vinkler er like dersom de har samme vinkelmål, tilsvarende er to linjestykker like, dersom de har samme lengdemål. Målt i radianer kjenner vi følgende setning om vinkelsummen i en trekant.

**Setning 2. (Vinkelsumsetningen)** *I en trekant $\triangle ABC$ er summen av vinklene*

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi.$$

*Bevis.* Se oppgavene. □

**Kongruente trekanter.** *To trekanter er kongruente dersom vinkler og sidekanter er parvise like.*

Fra skolematematikken kjenner vi følgende kongruenssetning.

**Setning 3. (Kongruenssetningen)** *To trekanter er kongruente hvis og bare hvis et av følgende tre kriterier er oppfyllt:*

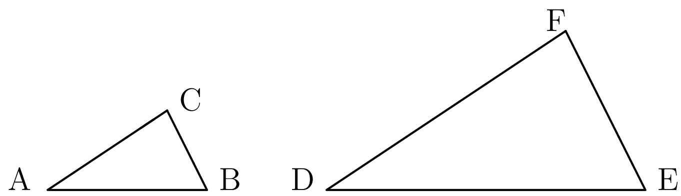
(1) *De tre sidekantene er parvis like.*

(2) *To vinkler og en sidekant er parvis like.*

(3) *To sidekanter og vinkelen mellom dem er parvis like.*

*Bevis.* Se oppgavene. □

Legg merke til at om to trekanter har parvis like vinkler, så er de ikke nødvendigvis kongruente.




FIGUR 7. Formlike trekanter

**Formlike trekanter.** *To trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike, dersom vinklene er parvis like, altså $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ og $\angle C = \angle F$ og de tilsvarende sidekantene er proporsjonale, det vil si*

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}.$$

I skolematematikken bruker vi ofte følgende setning for formlike trekanter.

**Setning 4. (Formlikhetsetningen)** *To trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike hvis og bare hvis et av følgende fire kriterier er oppfyllt:*

(1) *Trekantene har to parvis like vinkler.*
(2) *Trekantene har en lik vinkel, og de tilhørende sidekantene er proporsjonale, for eksempel er $\angle A = \angle D$ og $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$*
(3) *Sidekantene er parvis proporsjonale, for eksempel er $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.*
(4) *Forholdet mellom lengdene til sidekantene er det samme i de to trekantene, for eksempel er $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ og $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$*

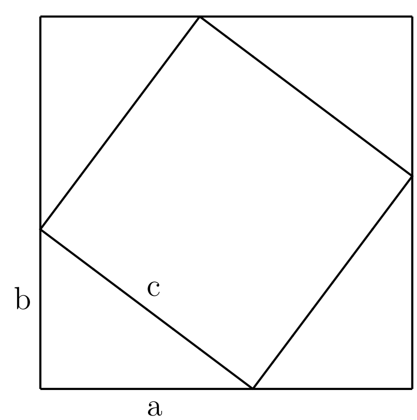
*Bevis.* **(Ufullstendig)** De to kriteriene 3 og 4 er ekvivalente, siden en kan gå fra det ene til det andre ved enkel algebraisk manipulasjon. Prøv! Videre vil to trekanter som er formlike opplagt fylle kriteriene 1, 2 og 3. Så det som gjenstår å vise at to trekanter som oppfyller krav 1,2 eller 3 også er formlike. Når det gjelder 1 er det klart at når to vinkler er like, må også den tredje være det, siden summen av de tre er $\pi$. Å vise at sidekantene er parvis proporsjonale, krever imidlertid noe mer. For å vise dette helt fra grunnen må en bygge opp aritmetikk med linjestykker helt systematisk (se [1]). Dette skal vi ikke gjøre her, men heller bruke resultatet som et grunnleggende prinsipp i plangeometri. Når jeg lar dette stå som setning, er det fordi det altså er mulig å vise det ut fra mer grunnleggende prinsipper.

For å vise at to trekanter som oppfyller 2 er formlike forlenger vi om nødvendig sidekanten $AB$ i trekanten $\triangle ABC$ til $B'$, slik at $AB' = DE$, og trekker ei linje gjennom $B'$ parallell med $BC$. La $C'$ være skjæringspunktet mellom denne parallellen og forlengelsen av linja gjennom $AC$. Da har $\triangle ABC$ og $\triangle AB'C'$ to like vinkler og er derfor formlike. Det vil si at $\frac{AC}{AC'} = \frac{AC}{DF}$, så $AC' = DF$ og trekantene $\triangle AB'C$ og $\triangle DEF$ er kongruente etter setning 3. Da kan vi konkludere at $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike.

Beviset for at to trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ som oppfyller 3, er formlike, er helt tilsvarende og overlates til leseren. □

Til slutt i dette innledende avsnittet gir vi et bevis for Pytagoras som kombinerer et geometrisk argument med algebra. Setningen gjelder en rettvinklet trekant, en trekant der en av vinklene er $\frac{\pi}{2}$. De tilhørende sidekantene kalles kateter, og den motstående sidekanten kalles hypotenusen.

**Setning 5. (Pytagoras)** *I en rettvinklet trekant, er summen av kvadratene av sidelengdene til katetene lik kvadratet av sidelengden til hypotenusen.*




FIGUR 8. Bevis av Pytagoras

*Bevis.* På figur 8 har katetene sidelengde $a$ og $b$, mens hypotenusen har sidelengde $c$. Siden de to spisse vinklene i trekanten har vinkelsum $\frac{\pi}{2}$, er firkanten i midten av figuren et kvadrat med sidelengde $c$. Det store kvadratet har areal $(a+b)^2$, mens trekanten har areal $\frac{ab}{2}$, så arealet til det lille kvadratet er også lik $(a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$. Men arealet er selvsagt uavhengig av hvordan vi regner det ut så

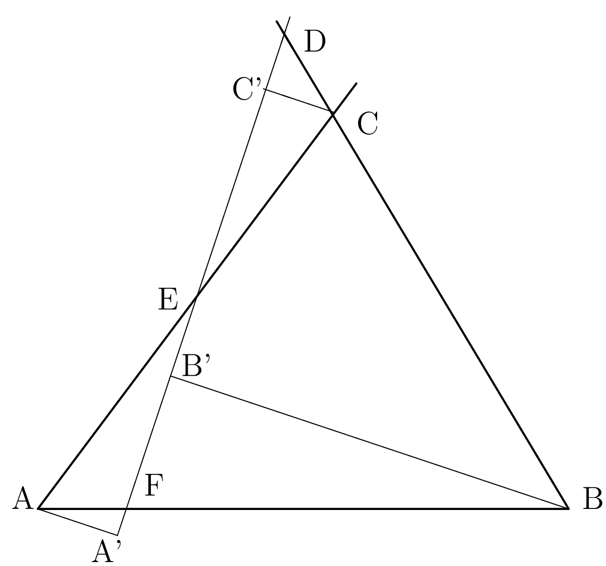
$$a^2 + b^2 = c^2$$

som er det vi skulle vise. □

Fra disse klassiske setningene skal vi i neste avnitt vise to andre setninger som på en slående måte kombinerer geometriske egenskaper med algebraiske relasjoner. Setningene vi skal se på er ikke like godt kjent som Pytagoras, men bruker også lengder av linjestykker, til og med med fortegn, altså fortegnsmål slik vi introduserte det i avsnitt 2.1.

2.4. **Menelaos og Ceva.**

**Menelaos-punkt.** *I en trekant $\triangle ABC$ kalles et punkt på linja gjennom $AB$ som ikke faller sammen med noen av hjørnene, et* **Menelaos-punkt** *til trekanten på siden $AB$.*




Figur 9. Menelaos

**Setning 6. (Menelaos)** *Tre Menelaos-punkter* $D, E, F$ *på sidene* $BC, CA, AB$ *til trekanten* $\triangle ABC$ *ligger på linje hvis og bare hvis*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1.$$

*Bevis.* Anta at Menelaos-punktene $D, E, F$ ligger på linje. Da vil ett eller alle tre punktene ligge utenfor trekanten. Derfor vil enten ett eller tre av punktene dele sin side negativt, så produktet av delingsforholdene er også negativt. I resten av beviset kan vi derfor konsentrere oss om absoluttverdiene til delingsforholdene.

Trekk høydene fra hjørnene i trekanten ned til linja gjennom $D, E, F$ og kall skjæringspunktene for $A'$, $B'$ og $C'$. Da er $\triangle BB'D$ og $\triangle CC'D$ formlike siden de er rettvinklede og i tillegg har en vinkel felles.

Tilsvarende er også $\triangle AA'E$ og $\triangle CC'E$, og $\triangle AA'F$ og $\triangle BB'F$ formlike. Dermed er

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BB'}{CC'}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{CC'}{AA'}, \quad \frac{AF}{FB} = \frac{AA'}{BB'}.$$

Da blir

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{CC'}{AA'} \cdot \frac{AA'}{BB'} = 1$$

og "bare hvis"-delen av setningen følger.

Anta på den andre siden at $D$, $E$ og $F$ er Menelaos-punkter på sidene $BC, CA, AB$ og at

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1.$$

La $F'$ være skjæringspunktet mellom linja gjennom $DE$ og linja gjennom $AB$.

(Hvis disse linjene er parallelle er det lett å vise at

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1.$$

Dette delingsforholdet forekommer ikke uten at vi utvider linja med et uendelig fjernt punkt.)

Med punktet $F'$ vet vi av første delen at

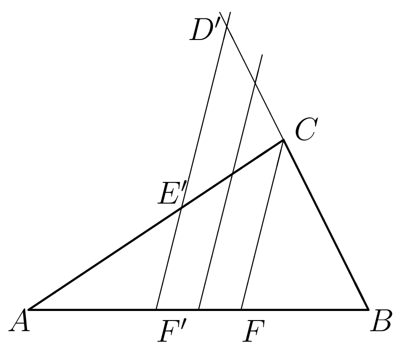
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = -1.$$

Ved å forkorte får vi derfor at

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}}.$$

Men av setningen over er punktene $F$ og $F'$ på linja gjennom $AB$ derfor like, og Menelaos' setning følger. $\square$

Dersom linja gjennom $D'$ og $E'$ er parallell med halveringslinja til vinkelen $C$ slik som i figur 10, er $D'C = E'C$.




FIGUR 10. Halveringslinja til vinkelen $C$

Når denne linja nærmer seg $C$ vil derfor produktet

$$\frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} = \frac{BD'}{E'A}$$

nærme seg

$$\frac{BC}{CA}.$$

Dersom vi bruker Menelaos' setning på linja $D'E'$, får vi

$$\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} \cdot \frac{\overline{CE'}}{\overline{E'A}} \cdot \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} =$$
$$= \frac{BD'}{E'A} \cdot \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = -1,$$

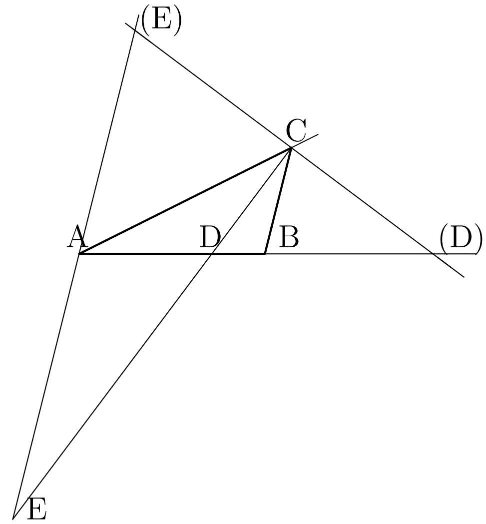
og som et grensetilfelle, når linja nærmer seg $C$

$$\frac{BC}{CA} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1.$$

Som kan omskrives til:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -\frac{AC}{CB}$$

Dette er en del av




FIGUR 11. Indre og ytre halveringslinje

**Setning 7.** **(Halveringslinjesetningen)** *I en trekant $\triangle ABC$ vil ei linje gjennom hjørnet $C$ dele linjestykket $AB$ innvendig i forholdet $\frac{AC}{CB}$ hvis og bare hvis linja halverer vinkelen i $C$. Tilsvarende vil ei linje gjennom hjørnet $C$ dele linjestykket $AB$ utvendig i forholdet $-\frac{AC}{CB}$ hvis og bare hvis linja halverer den utvendige vinkelen i hjørnet $C$.*

*Bevis.* La $D$ være skjæringspunktet mellom linja gjennom $C$ og linja gjennom $AB$. Trekk linja gjennom $A$ parallelt med $BC$. Denne skjærer linja gjennom $CD$ i $E$. Da er trekantene $\triangle ADC'$ og $\triangle BDC$ formlike, så

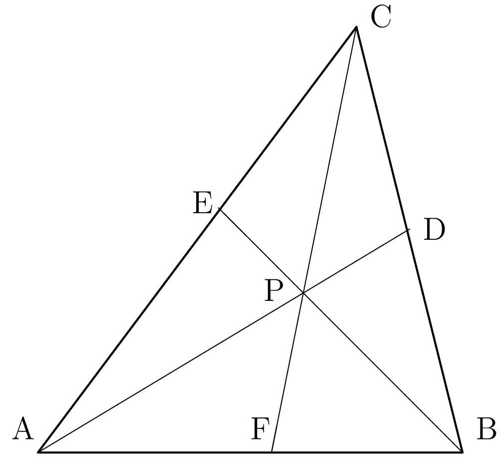
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{AE}{BC}.$$

Men $AE = AC$ hvis og bare hvis linja gjennom $CD$ halverer vinkelen i $C$, så setningen følger. □

**Ceva-linje.** *Ei linje gjennom et hjørne i en trekant $\triangle ABC$, som ikke faller sammen med linja til noen av sidene i trekanten, kalles ei* **Ceva-linje** *til trekanten gjennom dette hjørnet.*

Ei Ceva-linje gjennom $A$ skjærer linja gjennom $BC$ (hvis den ikke er parallell med $BC$) i Menelaos-punktet $D$. Ceva-linja identifiseres derfor ofte med linja gjennom $AD$.

En fin anvendelse av Menelaos' setning er




FIGUR 12. Ceva's setning

**Setning 8. (Ceva)** *Dersom tre Ceva-linjer $AD, BE, CF$ til trekanten $\triangle ABC$ er konkurrente, d.v.s. møtes i et felles punkt, så er*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$

*Omvendt, dersom denne relasjonen holder, er Ceva-linjene parallelle eller konkurrente.*

*Bevis.* Dersom Ceva-linjene er konkurrente, vil enten to eller ingen av delingsforholdene være negative, derfor er produktet av dem positivt og vi kan konsentrere oss om absoluttverdien til dette produktet.

La $P$ være skjæringspunktet mellom Ceva-linjene $AD, BE$ og $CF$. Ved å anvende Menelaos' setning på $\triangle ABD$ og $\triangle ADC$ får vi

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{DP}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = -1$$

Produktet av de to sidene blir 1 og flere faktorer kan forkortes:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{DP}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}$$
$$= \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$$

så første del av setningen følger.

Anta omvendt at produktet av delingsforholdene er 1 og at Ceva-linjene ikke er parallelle (hvis de er parallelle, vis at produktrelasjonen holder (oppgave 11)). Trekk linja gjennom $C$ og skjæringspunktet mellom Ceva-linjene $AD$ og $BE$ til skjæring $F'$ med siden $AB$. Da er $AF'$

en ny Ceva-linje gjennom $A$. Helt tilsvarende beviset for andre del av Menelaos' setning bruker vi produktrelasjonen innsatt $F$ og $F'$ til å vise at $F$ og $F'$ deler $AB$ i samme forhold. Av setningen om entydighet av slike delingsforhold konkluderer vi at $F$ og $F'$ må være samme punkt. Dermed følger også andre delen av setningen. □

En annen fin anvendelse av Menelaos' setning er

**Setning 9. (Pappos)** *Dersom $A, B, C$ og $A', B', C'$ er to tripler av kollineære punkter på to forskjellige linjer, så er skjæringspunktene $C'', A'', B''$ mellom linjene gjennom $AB'$ og $A'B$, $BC'$ og $B'C$, $CA'$ og $C'A$ kollineære (se figur 13).*

*Bevis.* . Tegn figur med skjæringspunkt $D$ mellom linjene gjennom $BC'$ og $CA'$, skjæringspunkt $E$ mellom linjene gjennom $AB'$ og $BC'$ og skjæringspunkt $F$ mellom linjene gjennom $CA'$ og $AB'$.

Menelaos' setning brukt på triplene av Menelaos-punkter

$$\{A, B, C\} \quad \{A', B', C'\} \quad \{A, B'', C'\}, \quad \{A', B, C''\} \quad \text{og} \quad \{A'', B', C\}$$

til trekanten $\triangle DEF$ gir

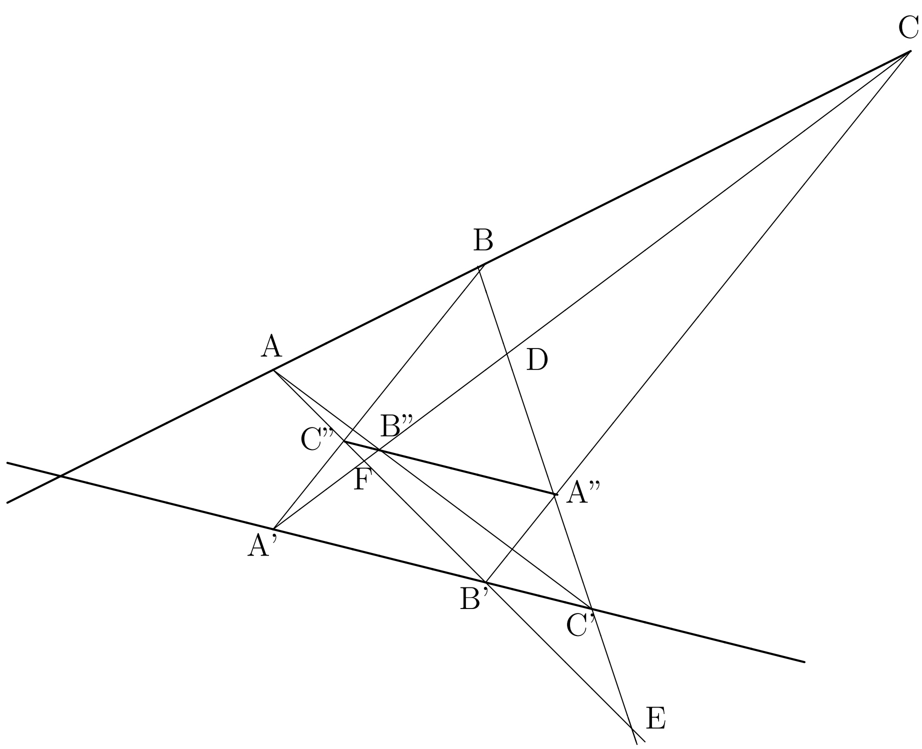
$$\frac{\overline{EB}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{AE}} = -1,$$
$$\frac{\overline{EC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DA'}}{\overline{A'F}} \cdot \frac{\overline{FB'}}{\overline{B'E}} = -1,$$
$$\frac{\overline{EC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DB''}}{\overline{B''F}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{AE}} = -1,$$
$$\frac{\overline{EB}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{DA'}}{\overline{A'F}} \cdot \frac{\overline{FC''}}{\overline{C''E}} = -1$$

og

$$\frac{\overline{EA''}}{\overline{A''D}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FB'}}{\overline{B'E}} = -1.$$

Sammenligner vi produktet av de tre siste venstresidene med produktet av de to første får vi:

$$\frac{\overline{EC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DB''}}{\overline{B''F}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{DA'}}{\overline{A'F}} \cdot \frac{\overline{FC''}}{\overline{C''E}} \cdot \frac{\overline{EA''}}{\overline{A''D}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FB'}}{\overline{B'E}}$$
$$= -\frac{\overline{EB}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{EC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DA'}}{\overline{A'F}} \cdot \frac{\overline{FB'}}{\overline{B'E}}$$




Figur 13. Pappos' setning

Denne ligningen kan vi redusere til:

$$\frac{\overline{DB''}}{\overline{B''F}} \cdot \frac{\overline{FC''}}{\overline{C''E}} \cdot \frac{\overline{EA''}}{\overline{A''D}} = -1$$

Menelaos-punktene $A'', B'', C''$ til trekanten $\triangle DEF$ er derfor kollineære.

□

2.5. **Oppgaver.**

(1) Vis vinkelsumsetningen.

(2) Vis kongruenssetningen.

(3) Finn to trekanter med to parvis like sider og en lik vinkel som ikke er kongruente.

(4) (Likebeinte trekanter) Vis at i en trekant er to sidekanter like lange hvis og bare hvis vinklene ved den tredje siden er like store.

(5) Vis følgende generalisering av Menelaos' setning: I en firkant $ABCD$ la $A', B', C', D'$ være punkter på henholdsvis linjene gjennom $AB$, $BC$, $CD$ og $DA$. Vis at hvis punktene $A', B', C', D'$ er kollineære, så er
$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DD'}}{\overline{D'A}} = 1.$$
Gjelder setningen den andre veien, d.v.s er punktene kollineære om produktrelasjonen holder?

(6) Vis at halveringslinjene til to vinkler i en trekant og halveringslinja til den utvendige vinkelen i det tredje hjørnet skjærer sine respektive motsatte linjer i trekanten i kollineære punkter.

(7) Vis at halveringslinjene til de utvendige vinklene i en trekant skjærer sine respektive motsatte linjer i trekanten i kollineære punkter.

(8) Vis at tangentlinjene til den omskrevne sirkelen til en trekant i hjørnene skjærer sine respektive motsatte linjer i trekanten i kollineære punkter.

(9) For to parallellogrammer $ADCB$ og $A'B'CD'$ med felles vinkel i $C$, vis at $DD'$, $A'A$ og $BB'$ er konkurrente.

(10) La $AD$, $BE$ og $CF$ være tre Ceva-linjer til en trekant $\triangle ABC$ som er konkurrente. Anta at linjene gjennom $EF$, $FD$, og $DE$ skjærer linjene gjennom $BC$, $CA$ og $AB$ respektivt i punktene $D'$, $E'$ og $F'$. Vis at $D'$, $E'$ og $F'$ er kollineære.

(11) Vis at hvis tre Ceva-linjer til en trekant er parallelle, så er produktrelasjonen mellom delingsforholdene i Cevas setning oppfylt.

(12) Bruk Cevas setning til å vise at høydene i en trekant er konkurrente.

(13) Bruk Cevas setning til å vise at medianene i en trekant er konkurrente.

(14) Bruk Cevas setning til å vise at vinklenes halveringslinjer i en trekant er konkurrente.

## References

[1] R. Hartshorne, *Companion to Euclid* Berkeley Mathematics Lecture Notes. **9** AMS 1997

## 3. Sirkelgeometri

3.1. **Geometriske steder.** De grunnleggende objektene i plangeometrien er punkter og linjer. Siden kommer sirkler, kjeglesnitt og mer generelle kurver. Geometri består så ofte av studiet av relasjoner mellom disse objektene, relasjoner som ofte er uttrykt med lengdemål eller vinkelmål, men ofte også ved insidens, som for eksempel at punktet ligger på linja, eller linja går gjennom punktet. En nyttig synsvinkel er ofte å karakterisere alle punkter som oppfyller en bestemt egenskap. Mer formelt ser vi på:

Mengden av punkter som oppfyller en bestemt geometrisk betingelse kalles *det geometriske stedet for punkter som oppfyller denne betingelsen.*

Den geometriske betingelsen som inngår kan være ofte avstander vinkelmål eller insidens. I så fall gis disse ved sine absolutte mål og ikke fortegnsmål som vi ofte brukte i den første bolken. For å få et første inntrykk av nytten ser vi på noen første eksempler:

**Eksempel 1.** *Det geometriske stedet for punkter som har en gitt fast avstand fra et gitt fast punkt $O$, er en sirkel med sentrum i $O$ og radius den gitte avstanden.*

Dette er ikke annet enn en naturlig definisjon av en sirkel.

**Eksempel 2.** *Det geometriske stedet for punkter som har samme avstand fra to gitte punkter $A$ og $B$, er midtnormalen på linjestykket $AB$.*

*Bevis.* Dersom $P$ ligger like langt fra $A$ og $B$, og $T$ er fotpunktet for normalen fra $P$ på $AB$, så er trekantene $\triangle ATP$ og $\triangle BTP$ kongruente. Derfor er $T$ midt mellom $A$ og $B$, og $P$ ligger på midtnormalen. □

**Eksempel 3.** *Det geometriske stedet for punkter hvis forhold mellom avstandene til to gitte faste linjer er konstant, er ei linje gjennom skjæringspunktet til de to gitte linjene.*

*Bevis.* Oppgave. □

Kjeglesnitt er eksempler på kurver som kan defineres som geometriske steder:

Gitt ei linje $l$, et punkt $S$ utenfor linja og et reelt tall $e > 0$.

**Kjeglesnitt (brennpunkt og styrelinje-definisjon)**: *Det geometriske stedet for punkter $P$ hvis forhold mellom avstandene til punktet $S$ og til linja $l$ er lik $e$, er en* **ellipse** *dersom $0 < e < 1$, en* **parabel** *dersom $e = 1$ og en* **hyperbel** *dersom $e > 1$.*Hvis $M$ er

skjæringspunktet mellom normalen til $l$ gjennom punktet $P$ og linja $l$, så er altså

$$PS = ePM.$$

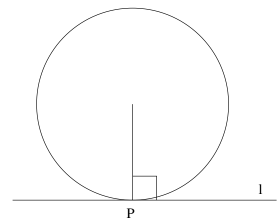
En fellesbetegnelse for disse kurvene er **kjeglesnitt**. $S$ kalles et **brennpunkt** og $l$ kalles ei **styrelinje** til kjeglesnittet. Størrelsen $e$ kalles **eksentrisiteten** til kjeglesnittet.

Det er også andre definisjoner av kjeglesnitt som geometriske steder, men siden vi ikke skal studere kjeglesnitt nærmere her lar vi dem ligge.

I neste avsnitt vil vi definere flere nye geometriske steder, som alle sammen er linjer eller sirkler.

3.2. **Sirkel og sirkelgeometri.** En sirkel er, som vi så over, et geometrisk sted bestemt av sitt sentrum $O$ og sin radius $r$. Punktene på sirkelen er alle punktene i planet som har avstand $r$ til sentrum $O$

Ei linje og en sirkel kan ha to, ett eller ingen punkt felles. Dersom linja og sirkelen har ett punkt felles (vel og merke når en forlenger linja så langt en vil) sier vi at linja tangerer sirkelen eller at linja er tangent

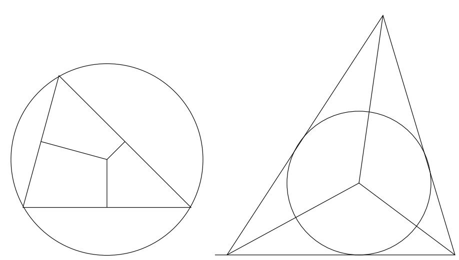



FIGUR 14. Linja $l$ tangerer sirkelen i $P$

til sirkelen. Denne linja står da normal på den linja som går gjennom sentrum og tangeringspunktet.

En trekant bestemmer naturlig to sirkler. **Den omskrevne** og **den innskrevne** sirkelen ti trekanten. Den omskrevne sirkelen går gjennom hjørnene til trekanten og ligger ellers utenfor trekanten, mens den innskrevne sirkelen tangerer de tre sidene i trekanten og ligger ellers inne i trekanten.

**Setning 10.** *Sentrum i den omskrevne sirkelen ligger på skjæringspunktet mellom midtnormalene på de tre sidene. Sentrum i den innskrevne sirkelen ligger i skjæringspunktet mellom halveringslinjene til de tre vinklene.*



FIGUR 15. Omskreven og innskreven sirkel

*Bevis.* Siden den omskrevne sirkelen går gjennom de tre hjørnene, kall dem $A, B$ og $C$, må sentrum ligge like langt fra alle tre. Men midtnormalen på siden $AB$ er jo alle punktene som ligger like langt fra $A$ som fra $B$. Tilsvarende for $BC$ og $AC$. Men et punkt som ligger på to av disse midtnormalene ligger selvsagt like langt fra alle tre hjørnene, så den tredje midtnormalen går også gjennom dette punktet som må være sentrum i den omskrevne sirkelen.

Siden den innskrevne sirkelen tangerer alle sidene i trekanten, ligger sentrum like langt fra de tre kantene, det vil si at normalene fra sentrum og ned på de tre sidene er alle like store. Men et punkt som ligger like langt fra to linjer, ligger på halveringslinja for vinkelen mellom de to linjene. Skjæringspunktet for to slike halveringslinjer i en trekant ligger derfor like langt fra alle tre linjene, så det må også ligge på den tredje halveringslinja og må være sentrum i den innskrevne sirkelen. □

Vi skal nå vise den sentrale setningen i sirkelgeometrien om periferivinkler. Denne anvender vi til å bestemme noen nye geometriske steder som for eksempel Appolonios' sirkel. Deretter viser vi setningen for punkts potens som sammen med Menelaos' setning er nøkkel til beviset for Pascals setning for sirkelen. Denne setningen representerer sammen med Pappos' setning i forrige del to spesialtilfeller av Pascals setning for kjeglesnitt. Beviset for Pascals setning bygger i vesentlig grad på disse spesialtilfellene.

For tre punkter $A, B, C$ betegner vi vinkelen med toppunkt i $A$ og vinkelbein langs $AB$ og $AC$ med $\angle BAC$. I en sirkel kalles en vinkel med toppunkt i sentrum av sirkelen for en **sentralvinkel**. Dersom sentrum er $O$ og vinkelbeina spenner over buen mellom $A$ og $B$ på sirkelperiferien, identifiserer vi sentralvinkelen med $\angle AOB$. En vinkel med toppunkt i periferien og med vinkelbein som skjærer periferien i to andre punkter kalles en **periferivinkel** til sirkelen. Som grensetilfelle inkluderer vi tilfellet der det ene vinkelbeinet tangerer sirkelen i toppunktet. Dersom toppunktet er $P$ og vinkelbeina spenner over buen fra $A$ til $B$ på sirkelperiferien, identifiserer vi vinkelen med $\angle APB$.

**Setning 11. Periferivinkelsetningen.** *I en sirkel er en sentralvinkel dobbelt så stor som en periferivinkel som spenner over samme bue. Spesielt er periferivinkler som spenner over samme bue like store.*

*Bevis.* Lag figur med en sentralvinkel $\angle AOB$ og en periferivinkel $\angle APB$, forleng linja gjennom $PO$ til skjæringspunktet $Q$ med periferien.

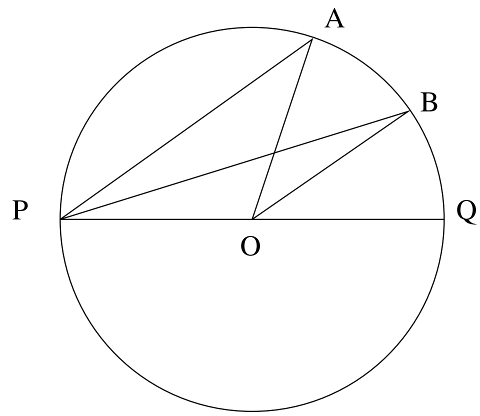
Vinkelen $\angle AOQ$ er nabovinkel til $\angle AOP$ i $\triangle AOP$, og vinkelen $\angle BOQ$ er nabovinkel til $\angle BOP$ i $\triangle BOP$.

Men trekantene $\triangle AOP$ og $\triangle BOP$ er begge likebeinte trekante, så $\angle AOQ = 2\angle APO$ og $\angle BOQ = 2\angle BPO$. Derfor er

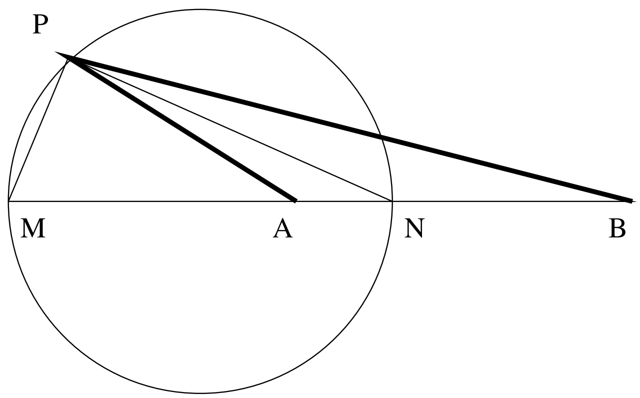
$$\angle AOB = \angle AOQ - \angle BOQ = 2\angle APO - 2\angle BPO = 2\angle APB$$

og setningen følger. □

**Setning 12.** *Det geometriske stedet for topp-punktet til en rett vinkel med vinkelbein gjennom punktene $A$ og $B$ i planet er sirkelen som har $AB$ som diameter.*




FIGUR 16. Setning of periferivinkler



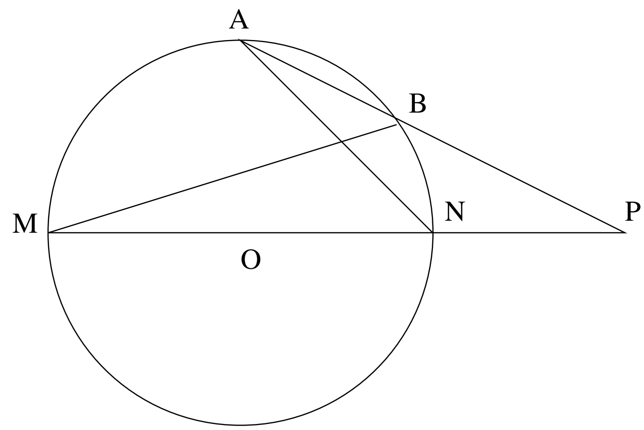

FIGUR 17. Appolonios' sirkel

*Bevis.* Periferivinkelsetningen sier at dersom $P$ er topp-punkt til en rett vinkel med vinkelbein gjennom $A$ og $B$, så ligger $P$ på sirkelen med diameter $AB$. Omvendt er alle vinkler med vinkelbein gjennom $A$ og $B$ og topp-punkt på denne sirkelen rette. □

**Setning 13. Apollonios sirkel** *Det geometriske stedet for punkter $P$ hvis avstander $PA$ og $PB$ til to faste punkter $A$ og $B$ har et konstant forhold*

$$k = \frac{PA}{PB} \geq 0$$

*er en sirkel med sentrum på linja gjennom $AB$. Denne sirkelen kalles* **Apollonios sirkel**.




FIGUR 18. Punkts potens

*Bevis.* Det geometriske stedet ligger symmetrisk om linja gjennom $AB$ og har to punkt $M$ og $N$ på denne linja siden vi regner med absolutte mål. Et punkt, $M$, deler linjestykket $AB$ utvendig mens det andre punktet, $N$, deler $AB$ innvendig. Fra et punkt $P$ på dette geometriske stedet utenfor linja, trekker vi linjene $PB, PM, PA, PN$. I trekanten $\triangle ABP$ er nå

$$\frac{PA}{PB} = \frac{NA}{NB}$$

så av setningen om halveringslinja til en vinkel i en trekant følger det at $PN$ halverer vinkelen i $P$. Helt tilsvarende følger det at $PM$ halverer den utvendige vinkelen i $P$. Siden summen av den innvendige og den utvendige vinkelen i $P$ er $\pi$, må de halve vinklene $\angle APM$ og $\angle APN$ til sammen være $\frac{\pi}{2}$. Dermed er $\angle MPN$ en rett vinkel og $P$ ligger på periferien til sirkelen som har $MN$ som diameter. Denne sirkelen danner derfor det søkte geometriske stedet. □

**Setning 14. Punkts potens.** *La $P$ være et punkt og la $\Sigma$ være en sirkel i planet. La $l$ være ei linje gjennom $P$ som skjærer $\Sigma$ i punktene $A$ og $B$. Da er produktet $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ uavhengig av posisjonen til linja $l$.*

*Bevis.* Tegn figur og trekk linja gjennom $P$ og sentrum $O$ i $\Sigma$ til skjæringspunkter $M$ og $N$ med sirkelen. Trekk linjene $NA$ og $MB$. I trekantene $\triangle MPB$ og $\triangle APN$ er vinkelen i $P$ felles. Videre spenner periferivinklene $\angle NMB$ og $\angle NAB$ over samme bue, så av setningen om periferivinkler er de like. Derfor er $\triangle MPB$ og $\triangle APN$ formlike.

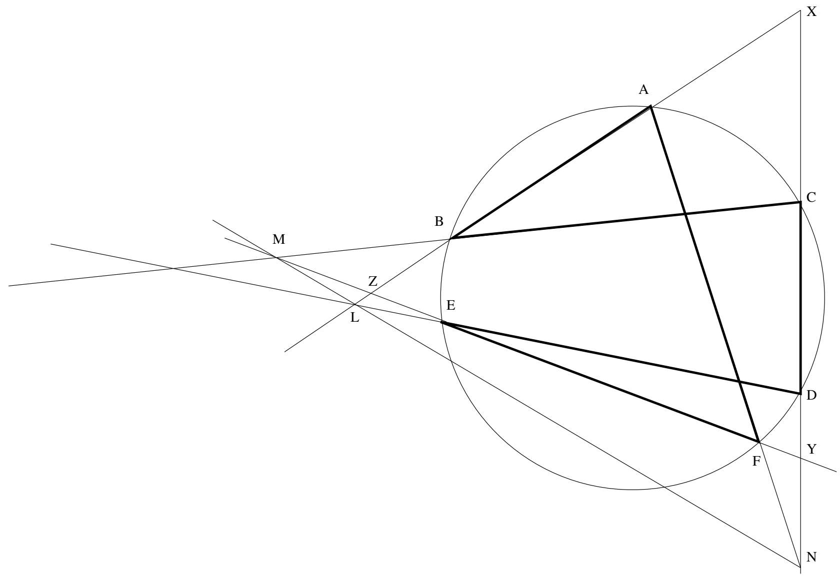
Men da er
$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PN}},$$
med fortegn til og med (alle linjemålene har samme fortegn dersom $P$ ligger utenfor sirkelen, mens to og to har samme fortegn dersom $P$ ligger inne i sirkelen). Så
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PM} \cdot \overline{PN}$$
er uavhengig av linja $l$. □

Produktet $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ i setningen kalles **punktet $P$'s potens m.h.p. sirkelen** $\Sigma$. Legg merke til at punktet $P$'s potens m.h.p. $\Sigma$ er positiv dersom $P$ ligger utenfor sirkelen, 0 dersom $P$ ligger på sirkelen og negativ dersom $P$ ligger inne i sirkelen.

**Setning 15. Pascals setning for en sirkel.** *La $A, B, C, D, E, F$ være 6 forskjellige punkter på en sirkel. Da er skjæringspunktene mellom linjene gjennom $AB$ og $DE$, $BC$ og $EF$, $FA$ og $CD$ (dersom ingen av disse parene er parallelle) kollineære.*

*Bevis.* Tegn figur med skjæringspunkter henholdsvis $L$, $M$ og $N$. Forleng linjene gjennom $AB$ og $CD$ til skjæringspunktet $X$, linjene gjennom $CD$ og $EF$ til skjæringspunktet $Y$, og linjene gjennom $AB$ og $EF$ til skjæringspunktet $Z$.

Menelaos' setning for triplene av Menelaos-punkter $\{E, L, D\}$, $\{F, A, N\}$ og $\{M, B, C\}$ til trekanten $\triangle XYZ$ sier nå at
$$\frac{\overline{YE}}{\overline{EZ}} \cdot \frac{\overline{ZL}}{\overline{LX}} \cdot \frac{\overline{XD}}{\overline{DY}} = -1,$$
$$\frac{\overline{YF}}{\overline{FZ}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{AX}} \cdot \frac{\overline{XN}}{\overline{NY}} = -1$$
og
$$\frac{\overline{YM}}{\overline{MZ}} \cdot \frac{\overline{ZB}}{\overline{BX}} \cdot \frac{\overline{XC}}{\overline{CY}} = -1.$$
Produktet av disse blir
$$\frac{\overline{YE}}{\overline{EZ}} \cdot \frac{\overline{ZL}}{\overline{LX}} \cdot \frac{\overline{XD}}{\overline{DY}} \cdot \frac{\overline{YF}}{\overline{FZ}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{AX}} \cdot \frac{\overline{XN}}{\overline{NY}} \cdot \frac{\overline{YM}}{\overline{MZ}} \cdot \frac{\overline{ZB}}{\overline{BX}} \cdot \frac{\overline{XC}}{\overline{CY}} = -1,$$
som vi kan skrive
$$\frac{\overline{YM}}{\overline{MZ}} \cdot \frac{\overline{ZL}}{\overline{LX}} \cdot \frac{\overline{XN}}{\overline{NY}} = -\frac{\overline{DY}}{\overline{XD}} \cdot \frac{\overline{EZ}}{\overline{YE}} \cdot \frac{\overline{AX}}{\overline{ZA}} \cdot \frac{\overline{FZ}}{\overline{YF}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{XC}}.$$




FIGUR 19. Pascals setning for en sirkel

På den andre siden sier setningen om et punkts potens m.h.p. sirkelen brukt på punktene $X, Y, Z$ at

$$\overline{XA} \cdot \overline{XB} = \overline{XC} \cdot \overline{XD},$$

$$\overline{YC} \cdot \overline{YD} = \overline{YE} \cdot \overline{YF}$$

og

$$\overline{ZA} \cdot \overline{ZB} = \overline{ZE} \cdot \overline{ZF}.$$

Setter vi inn for disse ligningene i høyre siden ovenfor får vi

$$\frac{\overline{YM}}{\overline{MZ}} \cdot \frac{\overline{ZL}}{\overline{LX}} \cdot \frac{\overline{XN}}{\overline{NY}} = -\frac{\overline{EY}}{\overline{XD}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{YE}} \cdot \frac{\overline{CX}}{\overline{ZA}} \cdot \frac{\overline{BZ}}{\overline{YF}} \cdot \frac{\overline{DX}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{FY}}{\overline{XC}} = -1.$$

Av Menelaos' setning anvendt på Menelaos-punktene $M, L, N$ til trekanten $\triangle XYZ$ følger det at $M, L, N$ er kollineære. □

### 3.3. **Oppgaver.**

(1) (a) Bevis at en firkant har en omskrevet sirkel hvis og bare hvis motstående vinkler er supplementære (dvs har sum lik 180°).
    (b) Forsøk å finne et kriterium for når en firkant har en innskrevet sirkel.

(2) La $S$ være sentrum i en sirkel, og la $A$ og $B$ være to punkter på sirkelen som ikke ligger på samme diameter. Tangentene til sirkelen i $A$ og i $B$ skjærer hverandre i $P$.
  (a) Forklar hvorfor det fins en sirkel som går gjennom de fire punktene $A$, $B$, $S$, $P$.
  (b) Forklar hvordan man kan konstruere tangentene til en sirkel fra et punkt utenfor sirkelen.

(3) $AB$ er diameter i en sirkel. Punktene $C$ og $D$ ligger på sirkelen, på hver sin side av $AB$ og slik at buen $AC$ er $120°$ og buen $BD$ er $90°$. Trekk $AC$ og $BD$ til skjæring i $P$, og trekk $AD$ og $BC$ til skjæring i $Q$.
  (a) Vis at $\angle P = \angle Q$.
  (b) Generaliser denne oppgaven.

(4) En fotballoppgave:
  (a) Flo står på hjørnet av straffeområdet ("16-meteren"). Hvor på banen kan Solskjær stå og se målet under samme vinkel som Flo?
  (b) På hvilke steder på banen ses de to målene under samme vinkel?
  (c) Linjedommeren beveger seg langs sidelinja. Hvor ser han det norske målet under størst vinkel?

I trekanten $\triangle ABC$ er $\angle A = 75°$ og $\angle B = 60°$. Tangentene til trekantens omskrevne sirkel i $A$ og i $B$ skjærer hverandre i $D$.

(5) (a) Vis at $\triangle ABD$ er rettvinklet og likebeint.
  (b) Høyden fra $D$ i $\triangle ABD$ forlenges til skjæring med sirkelen i punktet $E$. ($E$ ligger utenfor $\triangle ABD$.) Bestem gradtallet til buen $CE$.

(6) I et rektangel $ABCD$ (med $AB > BC$) fjerner vi et kvadrat $AEFD$, der $E$ ligger på $AB$ og $F$ på $CD$. Dersom det gjenværende rektangelet $BCFE$ er formlikt med det opprinnelige rektangelet $ABCD$, det vil si at sidekantene har parvis proporsjonale lengder, sier vi at forholdet $AB/BC$ er det gylne forhold.
  (a) Vis at det gylne forhold har verdien $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.
  (b) Et kvadrat er innskrevet i en halvsirkel slik at to hjørner ligger på diameteren og to hjørner på sirkelen. La $a$ være siden i kvadratet, og la $b$ være den ene av de to bitene av diameteren som ligger mellom kvadratet og sirkelen. Vis at $a/b$ er det gylne forhold.

(c) En likesidet trekant er innskrevet i en sirkel. En sekant i sirkelen deler to av trekantsidene på midten. La $t$ være den delen av sekanten som ligger inne i trekanten, og la $s$ være den ene av de to delene av sekanten som ligger mellom trekanten og sirkelen. Vis at $t/s$ er det gylne forhold.

(7) En sekant skjærer av en bue $ST$ på $90°$ av en sirkel. På forlengelsen av sekanten ligger et punkt $P$ slik at tangenten til sirkelen fra $P$ danner $40°$ med sekanten. (Sirkelens sentrum ligger inne i denne vinkelen.) Kall tangeringspunktet $A$.
  (a) Bestem gradtallet til buen $TA$.
  (b) La $M$ være midtpunktet på buen $ST$. Trekk korden $AM$. Den skjærer sekanten i $B$.
  Vis at $\triangle APB$ er likebeint.
  (c) Vis at trekantene $\triangle ATM$ og $\triangle ABS$ er formlike.

(8) To sirkler med sentrene $S$ og $T$ berører hverandre utvendig i $R$. En rett vinkel med toppunkt i R har vinkelbein som skjærer de to sirklene i henholdsvis $P$ og $Q$. Vis at $SP$ er parallell med $TQ$.

(9) Vis at halveringslinja for en vinkel i en trekant og midtnormalen på den motstående trekantsiden skjærer hverandre på trekantens omskrevne sirkel.

(10) Diameteren i en trekants omskrevne sirkel er lik produktet av to av trekantens sider delt på høyden på den tredje siden. Vis dette.

(11) Bevis Ptolemaios' teorem: Dersom firkanten $ABCD$ kan omskrives av en sirkel, så er produktet av diagonalene lik summen av produktene av motsatte sider, dvs

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

(Hint: La $E$ ligge på $BD$ slik at $\angle BAE = \angle CAD$. Sammenlign trekantene $\triangle ABE$ og $\triangle ACD$, og trekantene $\triangle AED$ og $\triangle ABC$.)

(12) Fire sirkler ligger i en "ring" og berører hverandre utvendig: $S_1$ berører $S_2$, som berører $S_3$, som berører $S_4$, som berører $S_1$. Vis at de fire berøringspunktene ligger på en sirkel.

(13) (**Skaus vinkelpar-setning**) La $A, A', B, B', C, C'$ være punkter i planet slik at ingen utvalg av tre er kollineære. Anta at $\angle B'AC = \angle BAC'$ og at $\angle C'BA = \angle CBA'$. Da er linjene gjennom $AA'$, $BB'$ og $CC'$ konkurrente hvis og bare hvis $\angle A'CB = \angle ACB'$. Vis denne setningen. Et bevis for Skaus vinkelpar-setning er gitt av Killinbergtrø, (Normat 43, s 162-167).

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo P.O.Box 1053, Blindern, 0316 Oslo

*E-mail address*: ranestad@math.uio.no